ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 222, № 2
февраль, 2025

© **2025 г. М. В. Артемьева**[∗†]**, М. О. Корпусов**[∗†]**, А. А. Панин**[∗†]

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ОДНОЙ ТЕПЛО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается одна тепло-электрическая $(3+1)$-мерная модель нагрева полупроводника в электрическом поле. Для соответствующей задачи Коши доказано существование непродолжаемого во времени классического решения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10825

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные радиоинформационные системы, решающие задачи мониторинга космического пространства, характеризуются большим числом плотно расположенной радиоэлектронной аппаратуры, непрерывным функционированием в течение длительного времени, а также высокими требованиями к надежности. При работе структурно сложной радиоинформационной системы в теплонапряженных режимах резко возрастает тепловыделение в радиоэлектронной аппаратуре за счет высокой токовой нагрузки. Повышение тепловыделения влечет за собой перегрев аппаратуры и, как следствие, снижение надежности изделия [1], а также увеличение вероятности отказов аппаратуры. Данные обстоятельства обуславливают необходимость исследования нелинейных тепловых процессов в полупроводнике, а также построения и изучения тепло-электрической модели полупроводника.

Данная работа продолжает исследования, начатые в работах [2]–[8]. В работе [8] мы рассмотрели следующую задачу Коши для модельного $(3+1)$-мерного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u(x,t) + |D_x u(x,t)|^q) + \Delta_x u(x,t) = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{1.1}$$

$$\Delta_x := \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \qquad D_x = (D_{x_1}, D_{x_2}, D_{x_3}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00056).

[∗]Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: artemeva.mv14@physics.msu.ru, korpusov@gmail.com

[†]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

При $q > 3/2$ в работе [8] мы доказали существование непродолжаемого решения, причем для малых начальных данных мы доказали существование глобального во времени решения задачи Коши и получили оценку убывания по времени.

В настоящей работе мы рассмотрели случай $q \in (1, 3/2]$ и также доказали существование непродолжаемого решения задачи Коши.

2. ЗАДАЧА КОШИ. СЛУЧАЙ $q \in (1, 3/2)$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u(x,t) + |D_x u(x,t)|^q) + \Delta_x u(x,t) = 0, \qquad q > 1, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T], \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.2}$$

Рассмотрим класс радиально-симметричных решений задачи Коши (2.1), (2.2) и введем функцию

$$w(r,t) := r^2 \frac{\partial u(r,t)}{\partial r}. \tag{2.3}$$

Тогда задача Коши (2.1), (2.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w(r,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^{2(q-1)}}|w(r,t)|^q\right) + \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} = 0, \tag{2.4}$$

$$w(r,0) = r^2 \frac{\partial u_0(r)}{\partial r}. \tag{2.5}$$

Итак, мы пришли к следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w(r,t)}{\partial r} + \frac{|w|^q(r,t)}{r^{2(q-1)}}\right) + \frac{\partial w(r,t)}{\partial r} = 0, \qquad q > 1, \quad (r,t) \in [0,+\infty) \times [0,T], \tag{2.6}$$

$$w(0,t) = 0, \qquad w(r,0) = w_0(r), \qquad (r,t) \in [0,+\infty) \times [0,T]. \tag{2.7}$$

Рассмотрим оператор

$$Q_2(w)h(r) := \frac{\partial h(r)}{\partial r} + q\frac{|w(r)|^{q-2}w(r)}{r^{2(q-1)}}h(r). \tag{2.8}$$

Введем необходимые в дальнейшем банаховы пространства. Дадим определения.

Определение 1. Будем говорить, что $h \in C_b(r^{-\alpha}, 1 + r^\gamma; [0,+\infty))$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$, если $h \in C_b[0,+\infty)$, причем конечна норма

$$\|h\|_{\alpha,\gamma} := \sup_{r \in [0,+\infty)} \max\{1 + r^\gamma, r^{-\alpha}\}|h(r)|. \tag{2.9}$$

Замечание 1. Если $\gamma = 0$, то вместо $C_b(r^{-\alpha}, 1+r^\gamma; [0,+\infty))$ будем писать просто $C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))$, а также вместо $\|\cdot\|_{\alpha,\gamma}$ будем писать $\|\cdot\|_\alpha$.

Определение 2. Будем говорить, что $h \in C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1 + r^\gamma; [0,+\infty))$ при $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$, если $h \in C_b^{(1)}[0,+\infty)$, причем конечна норма

$$\|h\|_{\alpha,\beta,\gamma} := \sup_{r \in [0,+\infty)} \max\{1, r^{-\alpha}\}|h(r)| + \sup_{r \in [0,+\infty)} \max\{1 + r^\gamma, r^{-\beta}\}\left|\frac{dh(r)}{dr}\right|. \tag{2.10}$$

Справедлива следующая несложная лемма.

Лемма 1. *Линейные пространства*

$$C_b(r^{-\alpha}, 1+r^{\gamma}; [0,+\infty)), \qquad C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r^{\gamma}; [0,+\infty))$$

являются банаховыми относительно норм (2.9) *и* (2.20) *соответственно.*

Справедлива

Лемма 2. *Для любой функции* $w \in C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))$ *при выполнении неравенств*

$$\alpha \geqslant 2, \qquad q \in (1, 3/2), \qquad w(r) \geqslant a_0 \min\{1, r^{\alpha}\}, \qquad a_0 > 0, \tag{2.11}$$

оператор $Q_2(w)$ *действует следующим образом*:

$$Q_2(w)\colon\ C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r^{\gamma}; [0,+\infty)) \to C_b(r^{-\beta}, 1+r^{\gamma}; [0,+\infty)), \tag{2.12}$$

$$\beta = \alpha + (\alpha-2)(q-1), \qquad \gamma = 2(q-1), \tag{2.13}$$

причем справедливо

$$Q_2^{-1}(w)\colon\ C_b(r^{-\beta}, 1+r^{\gamma}; [0,+\infty)) \to C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r^{\gamma}; [0,+\infty)), \tag{2.14}$$

$$h(r) := Q_2^{-1}(w)f(r) = \int_0^r \exp\left(-q\int_\rho^r \frac{|w(y)|^{q-2}w(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy\right) f(\rho)\,d\rho. \tag{2.15}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим функцию

$$\Phi(r,\rho) := \int_\rho^r \frac{|w(y)|^{q-2}w(y)}{y^{\gamma}}\,dy, \qquad \gamma = 2(q-1) \in (0,1), \quad q \in (1, 3/2). \tag{2.16}$$

Нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. При $0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant 1$ справедлива оценка снизу

$$\Phi(r,\rho) \geqslant a_0^{q-1}\int_\rho^r y^{(\alpha-2)(q-1)}\,dy = \frac{a_0^{q-1}}{\delta}[r^{\delta} - \rho^{\delta}], \qquad \delta := (\alpha-2)(q-1)+1. \tag{2.17}$$

Случай 2. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1 < r$ справедлива оценка снизу

$$\begin{aligned}
\Phi(r,\rho) &= \int_\rho^1 \frac{|w(y)|^{q-2}w(y)}{y^{\gamma}}\,dy + \int_1^r \frac{|w(y)|^{q-2}w(y)}{y^{\gamma}}\,dy \geqslant \\
&\geqslant a_0^{q-1}\int_\rho^1 y^{(\alpha-2)(q-1)}\,dy + a_0^{q-1}\int_1^r \frac{1}{y^{\gamma}}\,dy = \\
&= \frac{a_0^{q-1}}{\delta}[1-\rho^{\delta}] + \frac{a_0^{q-1}}{\mu}[r^{\mu}-1] \geqslant \\
&\geqslant \frac{a_0^{q-1}}{\mu}[r^{\mu}-1], \qquad \mu = 1-\gamma = 3-2q \in (0,1).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Случай 3. При $1 < \rho \leqslant r$ справедлива оценка снизу

$$\Phi(r,\rho) \geqslant a_0^{q-1}\int_\rho^r \frac{dy}{y^{\gamma}} = \frac{a_0^{q-1}}{\mu}[r^{\mu} - \rho^{\mu}], \qquad \mu = 1-\gamma = 3-2q \in (0,1). \tag{2.19}$$

Заметим, что равенство (2.17) можно переписать в следующем виде:

$$h(r) = \int_0^r e^{-q\Phi(r,\rho)} f(\rho)\, d\rho. \tag{2.20}$$

Нужно рассмотреть два случая.

Случай 3а: $0 \leqslant r \leqslant 1$. Тогда с учетом (2.15) справедлива оценка сверху

$$\frac{|h(r)|}{r^\alpha} \leqslant \|f\|_{\beta,\gamma} \frac{1}{r^\alpha} \int_0^r y^\beta\, dy \leqslant \frac{1}{\beta+1} \|f\|_{\beta,\gamma}. \tag{2.21}$$

Случай 3б: $1 < r$. Тогда с учетом (2.18) и (2.19) имеет место оценка

$$\begin{aligned} |h(r)| &\leqslant \int_0^1 e^{-q\Phi(r,\rho)} |f(\rho)|\, d\rho + \int_1^r e^{-q\Phi(r,\rho)} |f(\rho)|\, d\rho \leqslant \\ &\leqslant \exp\biggl(-q\frac{a_0^{q-1}}{\mu}[r^\mu - 1]\biggr) \|f\|_{\beta,\gamma} \int_0^1 \rho^\beta\, d\rho + \\ &\quad + \|f\|_{\beta,\gamma} \int_1^r \exp\biggl(-q\frac{a_0^{q-1}}{\mu}[r^\mu - \rho^\mu]\biggr) \frac{1}{\rho^\gamma}\, d\rho := J_1(r) + J_2(r). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Очевидно, что

$$\sup_{r\in[1+\infty)} J_1(r) \leqslant \frac{\|f\|_{\beta,\gamma}}{\beta+1}, \tag{2.23}$$

$$\sup_{r\in[1+\infty)} J_2(r) \leqslant \|f\|_{\beta,\gamma} \frac{1}{\mu} \int_1^{r^\mu} \exp\biggl(-q\frac{a_0^{q-1}}{\mu}[r^\mu - z]\biggr) \frac{dz}{z} \leqslant \frac{\|f\|_{\beta,\gamma}}{qa_0^{q-1}}. \tag{2.24}$$

Таким образом, из соотношений (2.21) и (2.22) с учетом формул (2.23), (2.24) получаем, что $h \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$. Несложно доказать равенство

$$\frac{dh}{dr} = f - q\frac{|w|^{q-2}w}{r^{2(q-1)}} h \in C_b(r^{-\beta}, 1 + r^\gamma; [0, +\infty)). \tag{2.25}$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Для любой функции* $w(t) \in C([0, T]; C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty)))$ *такой, что*

$$w(t) \geqslant w_0 e^{-t}, \qquad w_0 \geqslant a_0 \min\{1, r^\alpha\}, \qquad a_0 > 0, \tag{2.26}$$

где $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$, *при выполнении неравенства*

$$\alpha \geqslant 2, \qquad q \in (1, 3/2), \tag{2.27}$$

оператор $Q_2(w)$ *действует следующим образом*:

$$\begin{aligned} Q_2(w)\colon\ & C([0, T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1 + r^\gamma; [0, +\infty))) \to \\ & \to C([0, T]; C_b(r^{-\beta}, 1 + r^\gamma; [0, +\infty))), \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\beta = \alpha + (\alpha - 2)(q - 1), \qquad \gamma = 2(q - 1), \tag{2.29}$$

причем справедливо

$$Q_2^{-1}(w)\colon\ C([0,T];C_b(r^{-\beta},1+r^{\gamma};[0,+\infty)))\to \\ \to C([0,T];C_b^{(1)}(r^{-\alpha},r^{-\beta},1+r^{\gamma};[0,+\infty))), \tag{2.30}$$

$$h(t):=Q_2^{-1}(w)f(t)=\int_0^r \exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w(y,t)|^{q-2}w(y,t)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)f(\rho,t)\,d\rho. \tag{2.31}$$

Доказательство. Свойство (2.28) очевидно. Докажем свойства (2.30) и (2.31). Справедливы следующие равенства:

$$h(r,t_1)-h(r,t_2)=\int_0^r\biggl[\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w(y,t_1)|^{q-2}w(y,t_1)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)- \\ -\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w(y,t_2)|^{q-2}w(y,t_2)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)\biggr]f(\rho,t_1)\,d\rho+ \\ +\int_0^r \exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w(y,t_2)|^{q-2}w(y,t_2)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)\times \\ \times[f(\rho,t_1)-f(\rho,t_2)]\,d\rho:=h_1(r)+h_2(r), \tag{2.32}$$

$$\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w(y,t_1)|^{q-2}w(y,t_1)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)-\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w(y,t_2)|^{q-2}w(y,t_2)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)= \\ =\int_0^1 \frac{d}{ds}\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}w_s(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)ds, \tag{2.33}$$

$$w_s(y):=sw(y,t_1)+(1-s)w(y,t_2),$$

$$\frac{d}{ds}\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}w_s(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)= \\ =-q(q-1)\exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}w_s(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr)\times \\ \times\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}}{y^{2(q-1)}}[w(y,t_1)-w(y,t_2)]\,dy. \tag{2.34}$$

Прежде всего заметим, что в силу (2.26) справедливы оценки

$$w_s(y)\geqslant w_0(y)[se^{-t_1}+(1-s)e^{-t_2}]\geqslant w_0(y)\min\{e^{-t_1},e^{-t_2}\}\geqslant \\ \geqslant a_0\min\{1,r^{\alpha}\}\min\{e^{-t_1},e^{-t_2}\}\geqslant a_0\min\{1,r^{\alpha}\}e^{-T}. \tag{2.35}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\Psi(r,\rho,s):=\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}}{y^{2(q-1)}}|w(y,t_1)-w(y,t_2)|\,dy. \tag{2.36}$$

Нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. При $0\leqslant\rho\leqslant r\leqslant 1$ в силу (2.35) справедлива оценка сверху

$$\Psi(r,\rho,s)\leqslant a_0^{q-2}e^{(2-q)T}\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\int_\rho^r y^{(\alpha-2)(q-1)}\,dy= \\ =\frac{1}{a_0^{2-q}\delta}e^{(2-q)T}\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha[r^\delta-\rho^\delta],\qquad \delta:=(\alpha-2)(q-1)+1. \tag{2.37}$$

Случай 2. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1 < r$ в силу (2.35) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\Psi(r,\rho,s) = &\int_\rho^1 \frac{|w_s(y)|^{q-2}}{y^{2(q-1)}}|w(y,t_1)-w(y,t_2)|\,dy+\\&+\int_1^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}}{y^{2(q-1)}}|w(y,t_1)-w(y,t_2)|\,dy\leqslant\\&\leqslant a_0^{q-2}e^{(2-q)T}\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\frac{1}{\delta}[1-\rho^\delta]+\\&+a_0^{q-2}e^{(2-q)T}\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\frac{1}{\mu}[r^\mu-1], \qquad (2.38)\\&\mu:=1-\gamma=3-2q\in(0,1).\end{aligned}$$

Случай 3. При $1 < \rho \leqslant r$ в силу (2.35) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\Psi(r,\rho,s)&\leqslant a_0^{q-2}e^{(2-q)T}\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\int_\rho^r\frac{1}{y^{2(q-1)}}\,dy=\\&=a_0^{q-2}e^{(2-q)T}\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\frac{1}{\mu}[r^\mu-\rho^\mu]. \qquad (2.39)\end{aligned}$$

Теперь заметим, что для функции $h_1(r)$, определенной в (2.32), с учетом (2.33) и (2.34) имеет место равенство

$$h_1(r)=-q(q-1)\int_0^r\int_0^1 e^{-q\Phi(r,\rho,s)}\Psi(r,\rho,s)f(\rho)\,ds\,d\rho, \qquad (2.40)$$

$$\Phi(r,\rho,s):=\int_\rho^r\frac{|w_s(y)|^{q-2}w_s(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy. \qquad (2.41)$$

Поскольку для функции $w_s(y)$ справедлива оценка (2.35), тогда с заменой

$$a_0\mapsto a_0e^{-T}$$

мы получим, как при доказательстве леммы 2, оценки снизу в следующих трех случаях.

Случай 1. При $0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant 1$ имеем

$$\Phi(r,\rho,s)\geqslant\frac{a_0^{q-1}e^{-(q-1)T}}{\delta}[r^\delta-\rho^\delta],\qquad \delta:=(\alpha-2)(q-1)+1. \qquad (2.42)$$

Случай 2. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1 < r$ имеем

$$\Phi(r,\rho,s)\geqslant\frac{a_0^{q-1}e^{-(q-1)T}}{\mu}[r^\mu-1],\qquad \mu:=1-\gamma=3-2q. \qquad (2.43)$$

Случай 3. При $1 < \rho \leqslant r$ имеем

$$\Phi(r,\rho,s)\geqslant\frac{a_0^{q-1}e^{-(q-1)T}}{\mu}[r^\mu-\rho^\mu]. \qquad (2.44)$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 3а: $0 \leqslant r \leqslant 1$. В этом случае из представления (2.40) с учетом оценок (2.37) и (2.42) получим оценку

$$\frac{|h_1(r)|}{r^\alpha} \leqslant M_1(a_0,q,T,\alpha)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,\gamma} \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r y^\beta\,dy \leqslant$$
$$\leqslant M_1(a_0,q,T,\alpha)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,\gamma} \frac{1}{1+\beta}. \tag{2.45}$$

Случай 3б: $1 < r$. В этом случае из представления (2.40) с учетом оценок (2.38), (2.39) и (2.43), (2.44) получим оценку

$$|h_1(r)| \leqslant q(q-1)\int_0^1\int_0^1 e^{-q\Phi(r,\rho,s)}\Psi(r,\rho,s)|f(\rho)|\,ds\,d\rho +$$
$$+ q(q-1)\int_1^r\int_0^1 e^{-q\Phi(r,\rho,s)}\Psi(r,\rho,s)|f(\rho)|\,ds\,d\rho := J_1(r)+J_2(r). \tag{2.46}$$

Для $J_1(r)$ с учетом (2.38) и (2.43) получаем следующую оценку:

$$J_1(r) \leqslant M_{21}(q,\alpha,a_0,T)e^{-a_1(a_0,q,T)r^\mu}[1+r^\mu]\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma}, \tag{2.47}$$

из которой получаем, что

$$\sup_{r\geqslant 1} J_1(r) \leqslant M_{22}(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma}. \tag{2.48}$$

Для $J_2(r)$ с учетом оценок (2.39) и (2.44) получим неравенство

$$J_2(r) \leqslant M_{23}(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma} \times$$
$$\times \int_1^r e^{(-a_1(q,\alpha,a_0,T)[r^\mu-\rho^\mu]}[r^\mu-\rho^\mu]\frac{1}{\rho^\gamma}\,d\rho, \tag{2.49}$$

где, напомним, $\mu := 1-\gamma$, $\gamma := 2(q-1) \in (0,1)$.

Рассмотрим интеграл

$$J_3(r) := \int_1^r e^{-a_1[r^\mu-\rho^\mu]}[r^\mu-\rho^\mu]\frac{1}{\rho^\gamma}\,d\rho, \qquad a_1 > 0. \tag{2.50}$$

Справедлива цепочка выражений

$$J_3(r) = \frac{1}{\mu}\int_1^r e^{-a_1[r^\mu-\rho^\mu]}[r^\mu-\rho^\mu]\,d\rho^\mu = \{z = r^\mu - \rho^\mu\} =$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_0^{r^\mu-1} e^{-a_1 z}z\,dz \leqslant \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} e^{-a_1 z}z\,dz. \tag{2.51}$$

Таким образом, из (2.49) с учетом (2.51) приходим к выводу о том, что

$$\sup_{r\geqslant 1} J_2(r) \leqslant M_{23}(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma}. \tag{2.52}$$

Из неравенства (2.46) с учетом (2.48) и (2.52) получаем

$$\sup_{r\geqslant 1} |h_1(r)| \leqslant M_3(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma}. \tag{2.53}$$

В свою очередь, из (2.45) и (2.53) получаем

$$\|h_1\|_\alpha \leqslant M_4(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma}. \tag{2.54}$$

Аналогичным образом и даже проще получаем оценку

$$\|h_2\|_\alpha \leqslant M_5(q,\alpha,a_0,T)\|f(t_1)-f(t_2)\|_{\beta,\gamma}. \tag{2.55}$$

Итак, из (2.54) и (2.55) получаем оценку

$$\|h(t_1)-h(t_2)\|_\alpha \leqslant M(q,\alpha,a_0,T) \times \\ \times [\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha\|f(t_1)\|_{\beta,\gamma}+\|f(t_1)-f(t_2)\|_{\beta,\gamma}], \tag{2.56}$$

из которой получаем

$$\|h(t_1)-h(t_2)\|_\alpha \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2| \to +0. \tag{2.57}$$

Теперь заметим, что справедливо равенство

$$\frac{dh(r,t)}{dr} = f(r,t) - q\frac{|w(r,t)|^{q-2}w(r,t)}{r^{2(q-1)}}h(r,t), \tag{2.58}$$

из которого получаем

$$\left\|\frac{dh(r,t_1)}{dr} - \frac{dh(r,t_2)}{dr}\right\|_{\beta,\gamma} \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2| \to +0. \tag{2.59}$$

Таким образом, из (2.57) и (2.59) получаем

$$\|h(t_1)-h(t_2)\|_{\alpha,\beta,\gamma} \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2| \to +0. \tag{2.60}$$

Значит, $h(t) \in C([0,T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r^\gamma; [0,+\infty)))$. Лемма доказана.

Дадим определение классического решения начально-краевой задачи (2.6), (2.7).

Определение 3. Функция $w(t) \in C^{(1)}([0,T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r^\gamma; [0,+\infty)))$ при

$$\alpha \geqslant 2, \quad q > 1, \quad \beta = \alpha + (\alpha-2)(q-1), \quad \gamma = 2(q-1)$$

называется *классическим решением задачи* (2.6), (2.7), если функция удовлетворяет указанным равенствам поточечно для всех $(r,t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$, причем в граничных точках цилиндра $[0,+\infty) \times [0,T]$ производные понимаются в смысле односторонних пределов.

Пусть функция $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))$ удовлетворяет неравенству

$$w_0(r) \geqslant a_0 \min\{1, r^\alpha\}, \qquad a_0 > 0. \tag{2.61}$$

Пусть $w(r,t)$ – классическое решение задачи (2.6), (2.7) в смысле определения 1, причем $q \geqslant 2$. Тогда справедливы следующие эквивалентные равенства для всех $(r,t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$:

$$Q_2(w)\frac{\partial w}{\partial t} + Q_2(w)w = f(r,t), \qquad w(r,0) = w_0(r), \qquad f(r,t) := q\frac{|w(r,t)|^q}{r^{2(q-1)}}, \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w = Q_2^{-1}(w)f(r,t), \qquad w(r,0) = w_0(r), \tag{2.63}$$

$$w(t) = w_0 e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)}Q_2^{-1}(w(\tau))f(\tau)\,d\tau, \qquad f(r,t) := q\frac{|w(r,t)|^q}{r^{2(q-1)}}. \tag{2.64}$$

Последнее интегральное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$w(t) = Q(w)(t), \tag{2.65}$$

$$Q(w)(t) := w_0 e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} Q_2^{-1}(w(\tau)) f(\tau)\, d\tau, \qquad f(r,t) := q\frac{|w(r,t)|^q}{r^{2(q-1)}}. \tag{2.66}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Оператор* Q, *определенный равенством* (2.66), *для любой функции* $w_0 \in C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1 + r^{\gamma}; [0, +\infty))$, *удовлетворяющей неравенству* (2.61), *при* $q \in (1, 3/2)$ *действует следующим образом*:

$$Q\colon\ C([0,T]; C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))) \to C^{(1)}([0,T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1 + r^{\gamma}; [0,+\infty))). \tag{2.67}$$

Замечание 2. В частности, имеем

$$Q\colon\ C([0,T]; C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))) \to C([0,T]; C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))). \tag{2.68}$$

Рассмотрим следующее полное метрическое пространство при $R > 0$ и $T > 0$:

$$B_R := \{w(t) \in C([0,T]; C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty)))\colon\ \|w\| \leqslant R,\ w(t) \geqslant w_0 e^{-t}\} \tag{2.69}$$

относительно метрики, порожденной нормой

$$\|w\| := \sup_{t \in [0,T]} \|w(t)\|_{\alpha}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Для любой функции* $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$, *удовлетворяющей неравенству* (2.61), *при* $q > 1$ *найдутся такое достаточно большое* $R > 0$ *и такое достаточно малое* $T > 0$, *что*

$$Q\colon\ B_R \to B_R. \tag{2.70}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Для достаточно малого* $T > 0$ *при* $q \in (1, 3/2)$ *и для функции* $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$, *удовлетворяющей неравенству* (2.61), *оператор* Q *является сжимающим на пространстве* B_R:

$$\|Q(w_1) - Q(w_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\| \tag{2.71}$$

для любых $w_1, w_2 \in B_R$.

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 3, но с заменой $w(t_1, r) \mapsto w_1(t, r)$, $w(t_2, r) \mapsto w_2(t, r)$.

С учетом лемм 5, 6 и принципа сжимающих отображений получаем, что для любой функции $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$ при выполнении неравенства (2.61) при достаточно малом $T > 0$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.65) в классе $C([0,T]; C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty)))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (2.65) во времени (см. работу [9]), получим следующий результат.

Теорема 1. *Если* $q \in (1, 3/2)$, *то для любой функции* $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$ *при выполнении неравенств* $\alpha \geqslant 2$ *и* (2.61) *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(w_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение* $w(t)$ *класса* $C([0, T]; C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty)))$ *интегрального уравнения* (2.65), *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае имеем*

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|w(t)\|_\alpha = +\infty. \tag{2.72}$$

С учетом леммы 4 из равенства (2.65) приходим к основной теореме настоящей работы.

Теорема 2. *Если* $q \in (1, 3/2)$, *то для любой функции* $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty)) \cap C^{(1)}[0, +\infty)$ *при выполнении неравенств* $\alpha \geqslant 2$ *и* (2.61) *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(w_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное классическое решение задачи* (2.6), (2.7) *в смысле определения* 3, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место предельное свойство* (2.72).

3. ЗАДАЧА КОШИ. СЛУЧАЙ $q = 3/2$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Для любой функции* $w \in C_b(r^{-\alpha}; [0, +\infty))$ *при выполнении неравенств*

$$\alpha \geqslant 2, \qquad w(r) \geqslant a_0 \min\{1, r^\alpha\}, \qquad a_0 > 0, \tag{3.1}$$

оператор $Q_2(w)$ *действует следующим образом*:

$$Q_2(w)\colon\ C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1 + r; [0, +\infty)) \to C_b(r^{-\beta}, 1 + r; [0, +\infty)), \tag{3.2}$$

$$\beta = \alpha + \frac{\alpha - 2}{2}, \tag{3.3}$$

причем справедливо

$$Q_2^{-1}(w)\colon\ C_b(r^{-\beta}, 1 + r; [0, +\infty)) \to C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1 + r; [0, +\infty)), \tag{3.4}$$

$$h(r) := Q_2^{-1}(w) f(r) = \int_0^r \exp\biggl(-\frac{3}{2} \int_\rho^r \frac{|w(y)|^{1/2}}{y}\, dy\biggr) f(\rho)\, d\rho. \tag{3.5}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим функцию

$$\Phi(r, \rho) := \int_\rho^r \frac{|w(y)|^{1/2}}{y}\, dy. \tag{3.6}$$

Нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. При $0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant 1$ справедлива оценка снизу

$$\Phi(r, \rho) \geqslant a_0^{1/2} \int_\rho^r y^{(\alpha-2)/2}\, dy = \frac{2a_0^{1/2}}{\alpha} [r^{\alpha/2} - \rho^{\alpha/2}]. \tag{3.7}$$

Случай 2. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1 < r$ справедлива оценка снизу

$$\Phi(r,\rho) = \int_\rho^1 \frac{|w(y)|^{1/2}}{y}\,dy + \int_1^r \frac{|w(y)|^{1/2}}{y}\,dy \geqslant$$
$$\geqslant a_0^{1/2}\int_\rho^1 y^{(\alpha-2)/2}\,dy + a_0^{1/2}\int_1^r \frac{1}{y}\,dy =$$
$$= \frac{2a_0^{1/2}}{\alpha}[1-\rho^{\alpha/2}] + a_0^{1/2}\ln r \geqslant a_0^{1/2}\ln r. \tag{3.8}$$

Случай 3. При $1 < \rho \leqslant r$ справедлива оценка снизу

$$\Phi(r,\rho) \geqslant a_0^{1/2}\int_\rho^r \frac{dy}{y} = a_0^{1/2}\ln\left(\frac{r}{\rho}\right). \tag{3.9}$$

Заметим, что равенство (3.5) можно переписать в следующем виде:

$$h(r) = \int_0^r e^{-q\Phi(r,\rho)} f(\rho)\,d\rho. \tag{3.10}$$

Нужно рассмотреть два случая.

Случай 3а: $0 \leqslant r \leqslant 1$. Тогда с учетом (3.5) справедлива оценка сверху

$$\frac{|h(r)|}{r^\alpha} \leqslant \|f\|_{\beta,1}\frac{1}{r^\alpha}\int_0^r y^\beta\,dy \leqslant \frac{1}{\beta+1}\|f\|_{\beta,1}. \tag{3.11}$$

Случай 3б: $1 < r$. Тогда с учетом (3.8) и (3.9) имеет место оценка

$$|h(r)| \leqslant \int_0^1 e^{-q\Phi(r,\rho)}|f(\rho)|\,d\rho + \int_1^r e^{-q\Phi(r,\rho)}|f(\rho)|\,d\rho \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{3}{2}a_0^{1/2}\ln r\right)\|f\|_{\beta,1}\int_0^1 \rho^\beta\,d\rho +$$
$$+ \|f\|_{\beta,1}\int_1^r \exp\left(-\frac{3}{2}a_0^{1/2}\ln\left(\frac{r}{\rho}\right)\right)\frac{1}{\rho}\,d\rho := J_1(r) + J_2(r). \tag{3.12}$$

Очевидно, что

$$\sup_{r\in[1,+\infty)} J_1(r) \leqslant \frac{\|f\|_{\beta,1}}{\beta+1}, \tag{3.13}$$
$$\sup_{r\in[1,+\infty)} J_2(r) \leqslant \|f\|_{\beta,1}\int_0^{\ln r}\exp\left(-\frac{3}{2}a_0^{1/2}[\ln r - z]\right)dz \leqslant \frac{2\|f\|_{\beta,1}}{3a_0^{1/2}}. \tag{3.14}$$

Таким образом, из соотношений (3.11) и (3.12) с учетом формул (3.13), (3.14) получаем, что $h \in C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))$. Несложно доказать равенство

$$\frac{dh}{dr} = f - q\frac{|w|^{q-2}w}{r}h \in C_b(r^{-\beta}, 1+r; [0,+\infty)). \tag{3.15}$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Для любой функции* $w(t) \in C([0,T]; C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty)))$ *такой, что*

$$w(t) \geqslant w_0 e^{-t}, \qquad w_0 \geqslant a_0 \min\{1, r^\alpha\}, \qquad a_0 > 0, \tag{3.16}$$

где $w_0 \in C_b(r^{-\alpha}; [0,+\infty))$, *при выполнении неравенства*

$$\alpha \geqslant 2 \tag{3.17}$$

оператор $Q_2(w)$ *действует следующим образом*:

$$Q_2(w)\colon\ C([0,T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r; [0,+\infty))) \to \\ \to C([0,T]; C_b(r^{-\beta}, 1+r; [0,+\infty))), \tag{3.18}$$

$$\beta = \alpha + \frac{\alpha-2}{2}, \tag{3.19}$$

причем справедливо

$$Q_2^{-1}(w)\colon\ C([0,T]; C_b(r^{-\beta}, 1+r; [0,+\infty))) \to \\ \to C([0,T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r; [0,+\infty))), \tag{3.20}$$

$$h(t) := Q_2^{-1}(w) f(t) = \int_0^r \exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w(y,t)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr) f(\rho,t)\,d\rho. \tag{3.21}$$

Доказательство. Свойство (3.18) очевидно. Докажем свойства (3.20) и (3.21). Справедливы следующие равенства:

$$h(r,t_1) - h(r,t_2) = \int_0^r \biggl[\exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w(y,t_1)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr) - \\ - \exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w(y,t_2)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr)\biggr] f(\rho,t_1)\,d\rho + \\ + \int_0^r \exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w(y,t_2)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr) \times \\ \times [f(\rho,t_1) - f(\rho,t_2)]\,d\rho := h_1(r) + h_2(r), \tag{3.22}$$

$$\exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w(y,t_1)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr) - \exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w(y,t_2)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr) = \\ = \int_0^1 \frac{d}{ds} \exp\biggl(-\frac{3}{2}\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{1/2}}{y}\,dy\biggr)\,ds, \tag{3.23}$$

$$w_s(y) := s w(y,t_1) + (1-s) w(y,t_2),$$

$$\frac{d}{ds} \exp\left(-q\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2} w_s(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy\right) = \\ = -q(q-1) \exp\biggl(-q\int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2} w_s(y)}{y^{2(q-1)}}\,dy\biggr) \times \\ \times \int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{q-2}}{y^{2(q-1)}} [w(y,t_1) - w(y,t_2)]\,dy. \tag{3.24}$$

Прежде всего заметим, что в силу (3.16) справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
w_s(y) \geqslant w_0(y)[se^{-t_1} + (1-s)e^{-t_2}] \geqslant w_0(y)\min\{e^{-t_1}, e^{-t_2}\} \geqslant \\
\geqslant a_0 \min\{1, r^\alpha\} \min\{e^{-t_1}, e^{-t_2}\} \geqslant a_0 \min\{1, r^\alpha\} e^{-T}.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$
\Psi(r, \rho, s) := \int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{-1/2}}{y} |w(y, t_1) - w(y, t_2)|\, dy. \tag{3.26}
$$

Нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. При $0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant 1$ в силу (3.25) справедлива оценка сверху

$$
\begin{aligned}
\Psi(r, \rho, s) \leqslant a_0^{-1/2} e^{T/2} \|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \int_\rho^r y^{(\alpha-2)/2}\, dy = \\
= \frac{2}{a_0^{1/2}\alpha} e^{T/2} \|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha [r^{\alpha/2} - \rho^{\alpha/2}].
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Случай 2. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1 < r$ в силу (3.25) справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
\Psi(r, \rho, s) = \int_\rho^1 \frac{|w_s(y)|^{-1/2}}{y} |w(y, t_1) - w(y, t_2)|\, dy + \\
+ \int_1^r \frac{|w_s(y)|^{-1/2}}{y} |w(y, t_1) - w(y, t_2)|\, dy \leqslant \\
\leqslant a_0^{-1/2} e^{T/2} \|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \frac{2}{\alpha}[1 - \rho^{\alpha/2}] + \\
+ a_0^{-1/2} e^{T/2} \|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \ln r.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Случай 3. При $1 < \rho \leqslant r$ в силу (3.25) справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
\Psi(r, \rho, s) \leqslant a_0^{-1/2} e^{T/2} \|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \int_\rho^r \frac{1}{y}\, dy = \\
= a_0^{-1/2} e^{T/2} \|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \ln\left(\frac{r}{\rho}\right).
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Теперь заметим, что для функции $h_1(r)$, определенной в (3.22), с учетом (3.23) и (3.24) имеет место равенство

$$
h_1(r) = -\frac{3}{4} \int_0^r \int_0^1 e^{-3\Phi(r,\rho,s)/2} \Psi(r, \rho, s) f(\rho)\, ds\, d\rho, \tag{3.30}
$$

$$
\Phi(r, \rho, s) := \int_\rho^r \frac{|w_s(y)|^{1/2}}{y}\, dy. \tag{3.31}
$$

Поскольку для функции $w_s(y)$ справедлива оценка (3.25), то с заменой

$$
a_0 \mapsto a_0 e^{-T}
$$

мы получим, как при доказательстве леммы 7, оценки снизу в следующих трех случаях.

Случай 1. При $0 \leqslant \rho \leqslant r \leqslant 1$

$$\Phi(r, \rho, s) \geqslant \frac{2a_0^{1/2}e^{-T/2}}{\alpha}[r^{\alpha/2} - \rho^{\alpha/2}]. \tag{3.32}$$

Случай 2. При $0 \leqslant \rho \leqslant 1 < r$

$$\Phi(r, \rho, s) \geqslant a_0^{1/2}e^{-T/2}\ln r. \tag{3.33}$$

Случай 3. При $1 < \rho \leqslant r$

$$\Phi(r, \rho, s) \geqslant a_0^{1/2}e^{-T/2}[\ln r - \ln \rho]. \tag{3.34}$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 3а: $0 \leqslant r \leqslant 1$. В этом случае из представления (3.30) с учетом оценок (3.27) и (3.32) получим оценку

$$\begin{aligned}\frac{|h_1(r)|}{r^\alpha} &\leqslant M_1(a_0, T, \alpha)\|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1} \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r y^\beta\, dy \leqslant \\ &\leqslant M_1(a_0, T, \alpha)\|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1} \frac{1}{1+\beta}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Случай 3б: $1 < r$. В этом случае из представления (3.30) с учетом оценок (3.28), (3.29) и (3.33), (3.34) получим оценку

$$\begin{aligned}|h_1(r)| \leqslant \frac{3}{4}\int_0^1\int_0^1 e^{-3\Phi(r,\rho,s)/2}\Psi(r, \rho, s)|f(\rho)|\, ds\, d\rho + \\ + \frac{3}{4}\int_1^r\int_0^1 e^{-3\Phi(r,\rho,s)/2}\Psi(r, \rho, s)|f(\rho)|\, ds\, d\rho := J_1(r) + J_2(r).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Для $J_1(r)$ с учетом (3.28) и (3.33) получаем следующую оценку:

$$J_1(r) \leqslant M_2(a_0, T, \alpha)\|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1}[1 + \ln r]\frac{1}{r^{\beta_0}}, \tag{3.37}$$

где $\beta_0 := 3a_0^{1/2}e^{-T/2}/2$, из которой получаем

$$\sup_{r \geqslant 1} J_1(r) \leqslant M_{22}(\alpha, a_0, T)\|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1}. \tag{3.38}$$

Для $J_2(r)$ с учетом оценок (3.29) и (3.34) получим неравенство

$$J_2(r) \leqslant M_3(a_0, \alpha, T)\|w(t_1) - w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1}\int_1^r e^{-\beta_0[\ln r - \ln \rho]}[\ln r - \ln \rho]\frac{1}{\rho}\, d\rho. \tag{3.39}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_3(r) := \int_1^r e^{-\beta_0[\ln r - \ln \rho]}[\ln r - \ln \rho]\frac{1}{\rho}\, d\rho. \tag{3.40}$$

Справедлива оценка

$$J_3(r) \leqslant \int_0^{\ln r} e^{-\beta_0(\ln r - z)}(\ln r - z)\, dz \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\beta_0\tau}\tau\, d\tau < +\infty. \tag{3.41}$$

Таким образом, из (3.39) с учетом (3.40) приходим к выводу о том, что

$$\sup_{r\geqslant 1} J_2(r) \leqslant M_{23}(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1}. \tag{3.42}$$

Из неравенства (3.36)) с учетом (3.38) и (3.42) получаем

$$\sup_{r\geqslant 1} |h_1(r)| \leqslant M_3(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1}. \tag{3.43}$$

В свою очередь, из (3.35) и (3.43) получаем

$$\|h_1\|_\alpha \leqslant M_4(q,\alpha,a_0,T)\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1}. \tag{3.44}$$

Аналогичным образом и даже проще получаем оценку

$$\|h_2\|_\alpha \leqslant M_5(q,\alpha,a_0,T)\|f(t_1)-f(t_2)\|_{\beta,1}. \tag{3.45}$$

Итак, из (3.44) и (3.45) получаем оценку

$$\begin{aligned}\|h(t_1)-h(t_2)\|_\alpha \leqslant M(q,\alpha,a_0,T)[\|w(t_1)-w(t_2)\|_\alpha \|f(t_1)\|_{\beta,1} +\\ + \|f(t_1)-f(t_2)\|_{\beta,1}],\end{aligned} \tag{3.46}$$

из которой получаем

$$\|h(t_1)-h(t_2)\|_\alpha \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2|\to +0. \tag{3.47}$$

Теперь заметим, что справедливо равенство

$$\frac{dh(r,t)}{dr} = f(r,t) - q\frac{|w(r,t)|^{q-2}w(r,t)}{r^{2(q-1)}}h(r,t), \tag{3.48}$$

из которого получаем

$$\left\|\frac{dh(r,t_1)}{dr} - \frac{dh(r,t_2)}{dr}\right\|_{\beta,1} \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2|\to +0. \tag{3.49}$$

Таким образом, из (3.47) и (3.49) получаем

$$\|h(t_1)-h(t_2)\|_{\alpha,\beta,1} \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1-t_2|\to +0. \tag{3.50}$$

Значит, $h(t) \in C([0,T]; C_b^{(1)}(r^{-\alpha}, r^{-\beta}, 1+r; [0,+\infty)))$. Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения в предыдущем разделе, и методом сжимающих отображений в сочетании с алгоритмом продолжения во времени интегральных уравнений типа уравнения Вольтерры приходим к теоремам 1 и 2, но уже в случае $q = 3/2$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] А. В. Тимошенко, Д. В. Калеев, А. Ю. Перлов, В. М. Антошина, Д. В. Рябченко, “Сравнительный анализ аналитических и эмпирических методик оценки текущих параметров надежности радиолокационных комплексов мониторинга”, *Изв. вузов. Электроника*, **25**:3 (2020), 244–254.

[2] М. О. Корпусов, “О разрушении решения уравнения, родственного уравнению Гамильтона–Якоби”, *Матем. заметки*, **93**:1 (2013), 81–95.

[3] М. О. Корпусов, “О разрушении решения нелокального уравнения с градиентной нелинейностью”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. матем. моделирование и программирование*, **11** (2012), 45–53.

[4] М. О. Корпусов, А. А. Панин, А. Е. Шишков, “О критическом показателе ‘мгновенное разрушение’ versus ‘локальная разрешимость’ в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **85**:1 (2021), 118–153.

[5] М. О. Корпусов, А. Ю. Перлов, А. В. Тимошенко, Р. С. Шафир, “О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений тепло-электрической модели”, *Матем. заметки*, **114**:5 (2023), 759–772.

[6] М. О. Корпусов, А. Ю. Перлов, А. В. Тимошенко, Р. С. Шафир, “О глобальной во времени разрешимости одной нелинейной системы уравнений тепло-электрической модели с квадратичной нелинейностью”, *ТМФ*, **217**:2 (2023), 378–390.

[7] М. В. Артемьева, М. О. Корпусов, “О разрушении решения одной $(1+1)$-мерной тепло-электрической модели”, *ТМФ*, **219**:2 (2024), 249–262.

[8] М. В. Артемьева, М. О. Корпусов, “О существовании непродолжаемого решения задачи Коши одной $(3+1)$-мерной тепло-электрической модели”, *ТМФ*, **221**:3 (2024), 702–715.

[9] А. А. Панин, “О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра”, *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884–903.

Поступила в редакцию 13.09.2024,
после доработки 13.09.2024,
принята к публикации 16.10.2024