

УДК 523

ЭФФЕКТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ, ВЫЗВАННЫЕ ЖИДКИМ ЯДРОМ, И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЙ МОДЫ СВОБОДНОЙ ЛИБРАЦИИ

© 2014 г. Ю. Баркин^{1, 2*}, Х. Ханада¹, К. Матсумото¹, С. Сасаки¹, М. Баркин^{1, 3**}

¹Национальная астрономическая обсерватория Японии, Мицузава, Япония

²Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга МГУ
им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³Московский авиационный институт, Москва, Россия

^{1, 2*}приглашенный профессор НАОЯ

^{1, 3**}приглашенный исследователь НАОЯ

e-mail: barkin@inbox.ru

Поступила в редакцию 27.12.2012 г. После исправления 18.11.2013 г.

Разрабатывается аналитическая теория физической либрации Луны на основе ее двухслойной модели, состоящей из твердой несферичной мантии и эллипсоидального жидкого ядра. Луна движется по высокоточной возмущенной орбите в гравитационном поле Земли и других небесных тел. Определена четвертая мода свободной либрации, вызванная влиянием жидкого ядра, с длинным периодом в 205.7 г., с амплитудой $S = 0''0395$ и с начальной фазой $\Pi_0 = -134^\circ$ (для начальной эпохи 2000.0). Получены оценки динамических (меридиональных) сжатий жидкого ядра Луны: $\epsilon_D = 4.42 \times 10^{-4}$, $\mu_D = 2.83 \times 10^{-4}$ ($\epsilon_D + \mu_D = 7.24 \times 10^{-4}$). Эти результаты получены в результате сравнения разрабатываемой аналитической теории физической либрации Луны с эмпирической теорией либрации Луны, построенной на основе лазерных наблюдений.

DOI: 10.7868/S0320930X14060012

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

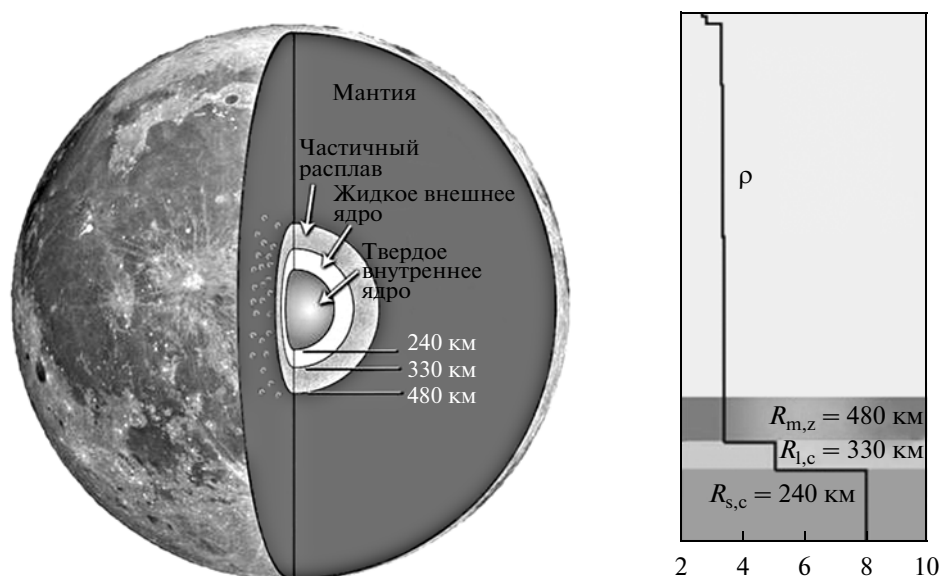
В последние годы были получены важные результаты по изучению внутреннего строения Луны методом сейсмической томографии (Weber и др., 2011) и была построена высокоточная эмпирическая теория физической либрации Луны на основе обширного материала по ее лазерным наблюдениям (Rambaux, Williams, 2011). Указанные работы составили основу для наших исследований вращения Луны. Для определения эллипсоидальностей жидкого ядра были использованы оценки для определенных соотношений моментов инерции ядра и Луны, полученные в недавних работах (Williams и др., 2010; 2011; 2012) на основе данных лазерных наблюдений.

В работе (Weber и др., 2011) на основе имеющихся сейсмических данных эры лунных миссий Apollo на Луну и с помощью современных методов анализа сейсмических сигналов на Луне (с учетом свойств отраженного и преобразованных сигналов от ядра) были получены сильные аргументы в пользу существования твердого и жидкого ядра с радиусами 240 и 330 км соответственно. В нашей статье мы используем указанные сей-

смографические результаты для определения динамических параметров ядра и мантии Луны с целью дальнейшего изучения влияния жидкого ядра Луны на ее физические либрации.

В данной работе будем рассматривать вращение Луны на основе ее двухслойной модели (Ferandiz, Barkin, 2000; 2003), состоящей из твердой мантии и эллипсоидального жидкого ядра с идеальной жидкостью, которая совершает простое движение по Пуанкаре (Poincare, 1910; Ламб, 1947). Твердое ядро в данной работе исключается из рассмотрения.

Орбитальное движение Луны описывается высокоточной долгосрочной численной теорией DE/LE-406, на основе которой были построены необходимые в теории вращения Луны разложения сферических функций координат Луны в ряды Пуассона по кратным аргументов теории орбитального движения l_M, l_S, F and D (Kudryavtsev, 2007; Barkin и др., 2009). В результате, с помощью указанных вспомогательных разложений были построены разложения второй гармоники силовой функции гравитационного потенциала в переменных Андуайе—Пуанкаре (Barkin и др., 2009).



Основные оболочки Луны, их радиусы R и плотности ρ (по работе (Weber и др. 2011)).

Ограниченный объем статьи не позволяет дать полное описание построенной аналитической теории вращения Луны, поэтому здесь мы приводим лишь описание структуры решения задачи о вынужденных и свободных либрациях Луны и концентрируем внимание на определении и интерпретации новой моды свободной либрации Луны (соответствующих колебаний полюса ее оси вращения), обусловленных влиянием жидкого эллипсоидального ядра. В результате сравнения построенной нами аналитической теории физической либрации Луны, в частности ее свободных либраций, и имеющейся в распоряжении эмпирической теории вращения Луны, нами были определены: амплитуда, начальная фаза и период четвертой моды свободной либрации Луны. Основным результатом здесь заключается в том, что впервые определен период свободной нутации ядра ($T_{\Pi} = 77757.032$ сут), его амплитуда и начальная фаза. На основе указанного значения периода оценена сумма двух меридиональных сжатий ядра $\epsilon_D + \mu_D = 7.00 \times 10^{-4}$. По соображениям подобия и идентичности отношений динамических сжатий для всей Луны и для ее ядра определены их индивидуальные значения: $\epsilon_D = 4.42 \times 10^{-4}$, $\mu_D = 2.83 \times 10^{-4}$ (Barkin и др., 2012).

Для исследования вращательного движения двухслойной Луны необходимо в первую очередь определить главные моменты инерции Луны (как полной системы) A , B и C и значения моментов инерции ее ядра A_c , B_c и C_c и, соответственно, динамические сжатия ядра $\epsilon_D = 1 - A_c/B_c$ и $\mu_D = 1 - C_c/B_c$. Указанные параметры являются основными в рассматриваемой задаче и они опреде-

ляют вынужденные и свободные либрации Луны и ее ядра в гравитационном поле Земли и других небесных тел. Выполнены оценки указанных параметров ядра.

МОДЕЛЬ ЛУНЫ, ЕЕ ЖИДКОГО ЯДРА И ТВЕРДОГО ЯДРА. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В работе (Weber и др., 2011) сейсмическими методами была построена оболочечная модель Луны (рис. 1, слева) с твердым ядром и жидким ядром с радиусами около 240 и 330 км. Было подтверждено существование частично расплавленной зоны вокруг жидкого ядра с радиусом 480 км или шарового слоя с радиусами 330–480 км (рис. 1, слева). Жидкое ядро Луны (или жидкий шаровой слой с радиусами 240–330 км) занимает примерно ~60% от объема всего ядра и дает наибольший вклад в значение полярного момента инерции ядра. Здесь мы используем результаты указанной работы для определения динамических параметров ядра и мантии Луны с целью дальнейшего исследования влияния жидкого ядра Луны на физические либрации.

Массы и моменты инерции оболочек Луны. В указанной модели средние значения плотности жидкого ядра и твердого ядра (или их однородных моделей) составляют: $\delta_{l,c} = 5.11$ г/см³ и $\delta_{s,c} = 8.04$ г/см³ (см. рис. 1, справа). Таким образом, избыточная плотность твердого ядра по сравнению с плотностью жидкого ядра составляет $\Delta\delta_{s,l} = 2.93$ г/см³. В дальнейшем пренебрежем погрешностями в

определении средних плотностей. Для значений среднего радиуса твердого ядра и жидкого ядра имеем следующие оценки: $R_{l,c} = 330 \pm 20$ км, $R_{s,c} = 240 \pm 10$ км (Weber и др., 2011).

Подчеркнем, что модель однородного твердого ядра и его жидкой оболочки хорошо согласуется с данными сейсмических наблюдений (рис. 1, справа). Поэтому ряд динамических характеристик ядра (полярные моменты инерции, динамические сжатия и т.п.) мы построим, основываясь на соответствующих однородных моделях в виде однородных шаров или эллипсоидов, используя дополнительные наблюдательные данные, например по лазерной локации Луны (Williams и др., 2011; 2012). Приведем результаты вычисления осевых моментов инерции твердого ядра, рассматриваемого как однородный шар, и жидкого ядра как однородного шарового слоя.

Для твердого ядра Луны, рассматриваемого как сферическое однородное тело с радиусом $R_{s,c} = 240 \pm 10$ км, значения массы и полярного момента инерции рассчитываются по формулам

$$m_{s,c} = \frac{4}{3} \pi \delta_{s,c} R_{s,c}^3, \quad C_{s,c} = \frac{8}{15} \pi \delta_{s,c} R_{s,c}^5 \quad (1)$$

и по нашим оценкам составляют

$$m_{s,c} = (4.65 \pm 0.58) \times 10^{23} \text{ г}, \quad (2)$$

$$C_{s,c} = (1.07 \pm 0.23) \times 10^{38} \text{ г см}^2.$$

Аналогичным образом определяем массу и момент инерции жидкого ядра, также рассматриваемого как сферический однородный слой жидкости, по формулам:

$$m_{l,c} = \frac{4}{3} \pi \delta_{l,c} (R_{l,c}^3 - R_{s,c}^3) = (4.73 \pm 1.78) \times 10^{23} \text{ г}, \quad (3)$$

$$C_{l,c} = \frac{8}{15} \pi \delta_{l,c} (R_{l,c}^5 - R_{s,c}^5) = (2.67 \pm 0.81) \times 10^{38} \text{ г см}^2. \quad (4)$$

В результате получаем, что суммарная масса и полярный момент инерции всего ядра, включающего в себя жидкое ядро и твердое ядро, будут равны:

$$m_c = m_{s,c} + m_{l,c} = (9.38 \pm 1.61) \times 10^{23} \text{ кг}, \quad (5)$$

$$C_c = C_{s,c} + C_{l,c} = (3.74 \pm 1.04) \times 10^{38} \text{ г см}^2. \quad (6)$$

Важно отметить, что значение момента инерции жидкого ядра (4) составляет около 71.3% от момента инерции всего ядра (6) (вместе с твердым ядром). Это означает, что в динамике вращательного движения Луны превалирующую роль играет именно жидкое ядро. В определенной степени это оправдывает наш выбор двухслойной модели

Луны для первых исследований динамической роли жидкого ядра. Однако в последующих работах мы планируем рассмотреть особенности динамики трехслойной модели Луны, состоящей из мантии, жидкого ядра и твердого ядра. Таким образом, для рассматриваемой модели ядра его масса (5) определяется с относительной погрешностью в 17.2%, а полярный момент инерции (6) определяется с относительной погрешностью в 27.8%. Средняя плотность однородного жидкого ядра (сферического слоя) составляет 6.233 г/см^3 . При этом масса и полярный момент инерции ядра для двухслойной и трехслойной моделей Луны (Weber и др., 2011) совпадают.

Динамический параметр влияния жидкого ядра на вращение Луны. Для изучения эффектов в либрациях Луны, обусловленных жидким ядром, важную роль играет параметр L_c , равный отношению осевых полярных моментов ядра C_c и всей Луны C . Примем известное значение момента инерции Луны $C = 0.873486 \times 10^{42} \text{ г см}^2$ (Araki и др., 2009). В результате по найденному значению момента инерции ядра (6) получаем значение

$$L_c = C_c/C = (4.28 \pm 1.19) \times 10^{-4} \quad (7)$$

(с погрешностью в 27.8%).

Фактически данная оценка фундаментального параметра Луны L_c получена на основе данных сейсмических исследований Луны.

Параметр L_c определен здесь наиболее точно по сравнению с предыдущими оценками. Тем не менее погрешности в определении динамического параметра L_c все же довольно значительны. Поэтому в первых исследованиях эффектов во вращении Луны, обусловленных жидким ядром, мы ограничимся рассмотрением двухслойной модели.

Динамические сжатия ядра. Динамические эффекты жидкого ядра во вращательном движении Луны будем изучать на основе модели Пуанкаре для твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, на основе специальных форм уравнений движения в переменных Андуайе и Пуанкаре, введенных в предшествующих работах (Ferrandiz, Barkin, 2000; 2003). Эллипсоидальность жидкого ядра является главенствующим фактором для изучения рассматриваемых здесь эффектов свободной нутации Луны вследствие гидродинамического влияния жидкого ядра. Ее можно охарактеризовать полуосями эллипсоидальной полости, в которой расположено жидкое ядро, a_c , b_c и c_c . Осевые моменты инерции A_c , B_c , C_c и параметры инерции

Пуанкаре D_c , E_c , F_c определяются формулами (Poincare, 1910):

$$\begin{aligned} A_c &= \frac{1}{5} m_c (b_c^2 + c_c^2), \quad B_c = \frac{1}{5} m_c (a_c^2 + c_c^2), \\ C_c &= \frac{1}{5} m_c (a_c^2 + b_c^2), \\ D_c &= \frac{2}{5} m_c a_c b_c, \quad E_c = \frac{2}{5} m_c a_c c_c, \quad F_c = \frac{2}{5} m_c b_c c_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где m_c — масса жидкого ядра. Обозначим оси координат таким образом, что для моментов инерции и полуосей эллипсоидального ядра выполняются соотношения $C_c > B_c > A_c$, $a_c > b_c > c_c$, и введем в рассмотрение динамические сжатия эллипсоидального ядра:

$$\varepsilon_D = 1 - A_c/C_c \quad \text{и} \quad \mu_D = 1 - B_c/C_c. \quad (9)$$

Сейсмографические методы в настоящее время не позволяют выявить и оценить геометрические сжатия ядра и значения полуосей эллипсоидальной полости. Однако исследования физической либрации Луны на основе данных многолетних лазерных наблюдений позволяют сделать это.

Оценки динамических сжатий ядра, полученные на основе данных лазерных наблюдений. Динамические эффекты от ядра в физической либрации Луны зависят от относительного момента жидкого ядра и от его сжатия. Одна из первых оценок параметра $L_c = C_c/C = 6 \times 10^{-4}$ была получена для простой модели однородного железного ядра с радиусом около 340 км, а сжатие ядра (осесимметричной модели) было оценено как 3×10^{-4} . При этом было отмечено, что долгий период свободной нутации жидкого ядра должен составить около двух веков (Williams и др., 2001). Если динамические сжатия ядра (или сумма меридиональных сжатий) в реальности окажутся больше, то период будет меньше. И наоборот, если указанные сжатия будут меньше, то период будет иметь большее значение. В данной работе получены согласующиеся между собой оценки динамических сжатий ядра, в том числе на основе сравнения разрабатываемой аналитической теории и эмпирической теории, основанной на лазерных наблюдениях (Rambaux, Williams, 2011).

В недавних работах (Williams и др., 2011; 2012) были предприняты первые попытки определения динамических сжатий ядра по результатам динамического анализа вращения Луны на основе высокоточных лазерных наблюдений. В работе (Williams и др., 2011) была получена подобная оценка

для следующей комбинации введенных в нашей работе параметров ядра

$$L_c(\varepsilon_D + \mu_D)/2 = (2.3 \pm 0.8) \times 10^{-7} \quad (\text{погрешность } 35\%). \quad (10)$$

Ниже нами получена оценка для суммы динамических сжатий ядра Луны $\varepsilon_D + \mu_D$ в результате сравнения нашей аналитической теории физической либрации Луны с жидким ядром и эмпирической теории физической либрации, построенной на основе многолетних лазерных наблюдений в недавней работе (Rambaux, Williams, 2011). На основе этого значения ($\varepsilon_D + \mu_D = 7.244 \times 10^{-4}$, см. Определение периода...), полученного в результате анализа либрации Луны, из соотношения (10) находим оценку для параметра

$$L_c = (6.57 \pm 2.29) \times 10^{-4} \quad (\text{погрешность } 34.9\%). \quad (11)$$

В другой работе (Williams и др., 2012) приводится другое значение соотношения:

$$L_c(\varepsilon_D + \mu_D)/2 = (1.6 \pm 0.7) \times 10^{-7} \quad (\text{погрешность } 44\%). \quad (12)$$

В данной работе в результате исследования свободных либраций Луны, на основе известного соотношения между сжатиями и периодом Пуанкаре свободных колебаний ядра (29), для суммы динамических сжатий ядра получаем оценку $\varepsilon_D + \mu_D = 7.00 \times 10^{-4}$, которой соответствует значение параметра

$$L_c = (4.57 \pm 2.00) \times 10^{-4} \quad (\text{погрешность } 44\%). \quad (13)$$

Это значение согласуется с полученным выше (по сейсмографическим данным) значением этого параметра (7), но с несколько меньшей ошибкой.

СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ И МОДЫ СВОБОДНОЙ ЛИБРАЦИИ

Объем статьи не позволяет дать полное изложение работы по построению аналитической теории вращательного движения Луны с эллипсоидальным жидким ядром. Поэтому здесь мы сконцентрируем внимание на анализе свободных (резонансных) либраций Луны, вызванных гравитационным притяжением Земли и гидродинамическим влиянием жидкого ядра. Тем не менее предварительно укажем на общую структуру полученного нами решения задачи о физических либрациях Луны:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t) &= \mathbf{Z}_0 + \langle \mathbf{Z} \rangle + \tilde{\mathbf{Z}}(l_M, l_S, F, D, \dots) + \\ &+ \mathbf{Z}_{\text{res}}(P, Q, R, S, U_p, U_q, U_r, U_s, l_M, l_S, F, D, \dots, t). \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) использовано векторное обозначение для используемых в теории вращения Луны нескольких групп переменных. Среди них переменные Андуайе, описывающие вращательные движения мантии и ядра Луны (Ferrandiz, Barkin, 2000; Barkin и др., 2012):

$$\mathbf{Z} = (L, G, H, l, g, h, L_c, G_c, H_c, l_c, g_c, h_c). \quad (15)$$

Также используются классические переменные теории физической либрации Луны (Rambaux, Williams, 2011):

$$\mathbf{Z} = (P_1, P_2, \tau, \rho, I\sigma) \quad (16)$$

и некоторые другие динамические характеристики. В (16) τ , ρ и σ — либрации в долготе и наклоне, I — средний угол наклона оси вращения Луны относительно нормали к плоскости эклиптики. В (14) указаны также аргументы теории орбитального движения Луны: l_M, l_S, F, D , являющиеся линейными функциями времени с определенными частотами. Геометрический и динамический смысл всех указанных выше переменных хорошо известен (Ferrandiz, Barkin, 2000; Гусев, Петрова, 2008; Barkin и др., 2012).

Базовые уравнения вращательного движения с жидким эллипсоидальным ядром Луны записываются в канонической форме (в переменных Андуайе) и для них разрабатываются специальные методы построения условно-периодических решений гамильтоновых систем в условиях резонанса, исследуется их линейная окрестность, а в общем случае и нелинейная окрестность. Указанные методы исследования были разработаны первоначально для твердой модели Луны без жидкого ядра (Barkin, 1987; Баркин, 1989), а в данной работе они развиваются на более общую модель небесного тела с эллипсоидальным жидким ядром. При этом используется метод малого параметра, который вводится на основе предположения о малости динамических сжатий Луны, или на основе предположения о почти концентрическом распределении ее плотностей. Обобщения метода касаются в первую очередь изучения возмущенного движения полюсов осей вращения Луны и жидкого ядра.

При этом на первом этапе построения теории, как и в случае твердой Луны, изучаются основные закономерности в ее вращении. Показано, что результаты для твердой модели и для модели Луны с жидким ядром в части, касающейся либрации мантии Луны, полностью совпадают. Однако добавляются новые положения о характере невозмущенного движения ядра в условиях движения Луны по законам Кассини (Ferrandiz, Barkin, 2003).

Первые три слагаемых решения (14) описывают промежуточное условно-периодическое решение задачи

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}_0 + \langle \mathbf{Z} \rangle + \tilde{\mathbf{Z}}(l_M, l_S, F, D, \dots) \quad (17)$$

и они фактически не содержат начальных условий задачи. Здесь решение строится в первую очередь в переменных Андуайе по целым степеням малого параметра μ , который характеризует порядок малости динамических сжатий Луны, ее ядра и подвижность плоскости лунной орбиты.

В (17) $\mathbf{Z}_0$ — основное решение, описывающее вращательное движение по законам Кассини. Для его определения привлекались члены первого порядка малости относительно динамических сжатий, соответствующие второй гармонике силовой функции ньютоновского взаимодействия несферичной Луны и Земли. В результате получили динамическое обоснование все положения законов Кассини и формулируются более полные и точные положения, дополняющие их (Barkin, 1987; 2011). Основным результатом здесь является теоретическое определение постоянного угла Кассини $\rho = \rho_0$ — невозмущенного значения угла между нормалью к плоскости эклиптики и осью вращения Луны (в движении по Кассини). Значение ρ_0 определяется из тригонометрического уравнения (Баркин, 1987; Barkin и др., 2009):

$$B \cos 2\rho_0 + A \sin 2\rho_0 + Y \cos \rho_0 + U \sin \rho_0 = 0, \quad (18)$$

коэффициенты которого (и, естественно, значение самого угла ρ_0) зависят от основных параметров селенопотенциала C_{20} , C_{22} и параметров возмущенного орбитального движения Луны (в частности, от скорости прецессии лунной орбиты n_Q). Здесь мы опустим подробную запись и анализ уравнения (18). Но отметим, что это уравнение представляет собой необходимое условие существования условно-периодического решения (17), описывающего вынужденные либрации Луны.

На основе параметров современной модели гравитационного поля Луны, построенной в результате осуществления японской космической миссии Selena (Matsumoto и др., 2010), на основе уравнения (16) здесь было найдено значение $\rho_0 = 1^\circ 32' 37'' 9 = 5557'' 94$ (Barkin и др., 2012). Это теоретическое значение хорошо согласуется с родственным значением угла Кассини $\rho = 5553'' 60$, полученным в эмпирической теории на основе длительных рядов лазерных наблюдений Луны (Rambaux, Williams, 2011).

Движение Луны с жидким ядром по законам Кассини определяется из условий существования условно-периодического решения уравнений движения Луны (из уравнений первого приближения для канонических переменных Андуайе—Пуанкаре) (Barkin и др., 2012). В невозмущенном движении Луна вместе с жидким ядром совершает осевое твердотельное вращение с постоянной угловой скоростью n_F , представляющей частоту аргумента орбитального движения Луны F .

Более трудной задачей является проблема построения аналитических выражений для постоянных составляющих переменных $\langle \mathbf{Z} \rangle$ условно-периодического решения $\mathbf{Z}_p$ (17). Эти постоянные добавки к порождающим значениям переменных $\mathbf{Z}_0$, согласно развиваемому методу, определяются в результате анализа уравнений второго и высших приближений, которые последовательно решаются при построении условно-периодического решения, в котором $\tilde{\mathbf{Z}}(l_M, l_S, F, D, \dots)$ — его чисто условно-периодическая составляющая. Возмущения $\tilde{\mathbf{Z}}(l_M, l_S, F, D, \dots)$ представляются суммой тригонометрических слагаемых с аргументами, являющимися линейными комбинациями классических аргументов теории орбитального движения Луны. Этой важной части построения теории вращения Луны мы планируем посвятить отдельную статью с результатами определения и табулирования амплитуд, периодов и начальных фаз вынужденных физических либраций в переменных Андуайе, в классических переменных теории физической либрации Луны, а также для компонент угловой скорости вращения Луны.

В данной работе мы сконцентрируем внимание на четвертом слагаемом решения (14)

$$\mathbf{Z}_{\text{res}}(P, Q, R, S, U_p, U_q, U_r, U_s, l_M, l_S, F, D, \dots, t), \quad (19)$$

которое описывает свободные и резонансные либрации Луны. Здесь P, Q, R, S — постоянные амплитуды и U_p, U_q, U_r, U_s — аргументы свободных либраций Луны, являющиеся линейными функциями времени:

$$\begin{aligned} U_p &= n_p t + U_p^{(0)}, & U_q &= n_q t + U_q^{(0)}, & U_r &= n_r t + U_r^{(0)}, \\ U_s &= n_s t + U_s^{(0)}, \end{aligned} \quad (20)$$

с указанными постоянными частотами n_p, n_q, n_r и n_s . $U_p^{(0)}, U_q^{(0)}, U_r^{(0)}$ и $U_s^{(0)}$ — начальные значения аргументов — фазы аргументов (для эпохи 2000.0).

Таким образом, решение задачи о физической либрации Луны (14)–(20) (для рассматриваемой двухслойной модели Пуанкаре) содержит 8 начальных условий. Они представляют собой амплитуды и фазы свободных либраций в долготе ($P, U_p^{(0)}$), в наклоне ($R, U_r^{(0)}$), в движении полюсов ($Q, U_q^{(0)}$) и в свободной нутации ядра ($S, U_s^{(0)}$). Первые 6 начальных условий задачи о физической либрации Луны были определены на основе данных лазерной локации Луны, впервые в работе Calame (1976). Более точно указанные шесть начальных условий были определены в современных исследованиях (Rambaux, Williams, 2011). Несмотря на то, что в этой работе был получен из наблюдений ряд новых либраций с определенными периодами, но неизвестной природы, авторам не

удалось определить параметры четвертой моды свободной либрации ($S, U_s^{(0)}$). Таких не идентифицированных либраций теория (Rambaux, Williams, 2011) содержит около пятидесяти для пяти классических переменных $\mathbf{Z} = (P_1, P_2, \tau, \rho, I\sigma)$ (16). В данной работе мы впервые идентифицируем четвертую моду свободной либрации Луны в решении (14)–(20) и даем первые оценки ее периода, амплитуды и начальной фазы.

В силу резонансного характера движения Луны аналитическое решение уравнений в вариациях (19) $\mathbf{Z}_{\text{res}}(P, Q, R, S, U_p, U_q, U_r, U_s, l_M, l_S, F, D, \dots, t)$ ищется по целым и дробным степеням малого параметра (по степеням $\sqrt{\mu}$). Подобный метод решения уравнений в вариациях ранее был применен в теории вращения твердой несферичной Луны без жидкого ядра (Barkin, 1987), а позднее — при изучении вращения Луны с жидким ядром (Ferrandiz, Barkin, 2003; Barkin и др., 2012). Подробное описание аналитического решения (14)–(20) будет дано в последующих наших работах. А здесь мы сконцентрируем внимание на описании эффектов в свободном движении полюса оси вращения Луны, обусловленных ее эллипсоидальным жидким ядром.

СВОБОДНЫЕ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ

Свободные либрации Луны проявляются во всех переменных $\mathbf{z}$ кратко описанных выше, в частности в переменных Андуайе. Согласно нашему решению они представляют собой решение уравнений в вариациях, описывающих вращательное движение Луны в окрестности ее промежуточного условно-периодического решения. Укажем на структуру этого решения именно в канонических переменных Андуайе (Barkin и др., 2012):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= P \left(\mathbf{z}^{(p)} \cos U_p - \mathbf{z}^{(p)*} \sin U_p \right) + \\ &+ Q \left(\mathbf{z}^{(q)} \cos U_q - \mathbf{z}^{(q)*} \sin U_q \right) + \\ &+ R \left(\mathbf{z}^{(r)} \cos U_r - \mathbf{z}^{(r)*} \sin U_r \right) + \\ &+ S \left(\mathbf{z}^{(s)} \cos U_s - \mathbf{z}^{(s)*} \sin U_s \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{z} = (l, g, h, l_c; L, G, H, L_c)$ — вектор канонических переменных Андуайе, описывающих вращательное движение Луны. Основу аналитических исследований составляют специальные канонические уравнения вращательного движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, совершающей простое движение по Пуанкаре (Ferrandiz, Barkin, 2000). А также методы построения условно-периодических решений гамильтоновых систем, содержа-

ших малый параметр, и методы исследования его линейной и нелинейной окрестностей (Barkin, 1987; Barkin, Ferrandiz, 2003; Barkin и др., 2012).

В решении (21) P, Q, R, S — амплитуды свободных либраций. Аргументы U_p, U_q, U_r и U_s определяются формулами (20), где $U_p^{(0)}, U_q^{(0)}, U_r^{(0)}, U_s^{(0)}$ — начальные значения аргументов свободных либраций. Частоты свободных либраций Луны p, q, r и s определяются в результате решения соответствующего характеристического уравнения. Они являются чисто мнимыми:

$$p = \pm ip_0, \quad q = \pm iq_0, \quad r = \pm ir_0, \quad s = \pm is_0, \quad (22)$$

где p_0, q_0, r_0 и s_0 — вещественные частоты свободных колебаний, которым соответствуют периоды колебаний

$$T_p = \frac{2\pi}{p_0}, \quad T_q = \frac{2\pi}{q_0}, \quad T_r = \frac{2\pi}{r_0}, \quad T_s = \frac{2\pi}{s_0}. \quad (23)$$

Указанные частоты и соответствующие им периоды поддаются точному аналитическому описанию и для их оценок не требуются данные наблюдений либраций Луны, но требуются точные значения параметров динамического строения, ее гравитационного поля и характеристик эллипсоидального ядра. И напротив, значения амплитуд свободных либраций P, Q, R, S и их начальные фазы $U_p^{(0)}, U_q^{(0)}, U_r^{(0)}, U_s^{(0)}$ могут быть определены только на основе данных наблюдений за вращательным движением Луны. До настоящего времени из указанных четырех мод по данным лазерных наблюдений были определены только три первые. Самое первое определение амплитуд и фаз свободных либраций Луны по светолокационным измерениям дальностей до светотрагателей, установленных на поверхности Луны, было выполнено в работе Calame (1976). Современное высокоточное определение амплитуд и фаз трех мод свободных либраций Луны было выполнено в недавней работе (Rambaux, Williams, 2011). Авторы использовали длительные ряды лазерных наблюдений Луны (за период около 40 лет).

В данной работе мы опустим подробный вывод формул для частот и периодов свободных либраций Луны (всех четырех мод) и формул для решения уравнений в вариациях в переменных Андуайе, а приведем окончательные результаты с целью их последующего анализа и перехода к вариациям классических переменных теории физической либрации Луны $\mathbf{Z} = (P_1, P_2, \tau, \rho, I\sigma)$ (16). Наиболее актуальным вопросом здесь является вопрос об определении четвертой моды свободной либрации Луны, вызванной жидким ядром.

Основные резонансные эффекты во вращательном движении Луны и их интерпретация. В данной работе мы изучаем основные резонансные эффекты во вращательном движении Луны в

окрестности ее условно-периодического промежуточного движения (17). Луна обладает ядром с небольшими размерами. В силу этой особенности общее характеристическое уравнение уравнений в вариациях в первом приближении расщепляется на два уравнения. Первое уравнение определяет три моды свободной либрации в долготе, наклоне и в свободных колебаниях полюса с частотами p_0, q_0, r_0 . Это уравнение нами изучалось при построении теории физической либрации модели твердой Луны. В частности были оценены три периода свободной либрации Луны, соответствующие указанным частотам (Barkin, 1987; Barkin и др., 2012). Второе характеристическое уравнение позволяет определить четвертую моду свободных колебаний полюса Луны с частотой s_0 , обусловленную жидким эллипсоидальным ядром Луны. В случае малого ядра для этой частоты нами было получено аналитическое выражение в терминах основных параметров рассматриваемой модели Луны:

$$s_0 = n_F \sqrt{\Delta_1 \Delta_3} \left(ACE_c^2 - 2BE_c F_c D_c + \frac{B^2}{AC} F_c^2 D_c^2 \right), \quad (24)$$

$$\Delta_1 = A_c A - F_c^2, \quad \Delta_3 = C_c C - D_c^2.$$

Сохраняя в выражениях (24) лишь члены первой степени малости относительно динамических сжатий ядра (9), для частоты (24) получаем упрощенное выражение

$$s_0 = n_F + n_F (\varepsilon_D + \mu_D)/2. \quad (25)$$

Соответствующие частотам p_0, q_0, r_0 и (25) периоды (23) определяются следующими формулами:

$$T_p = \frac{n_F}{n_0} \frac{T_F}{\sqrt{f_0^{(g,g)}}}, \quad (26)$$

$$T_q = \frac{n_F^2}{n_0^2} \frac{T_F}{\sqrt{f_0^{(0,0)} f_0^{(1,1)}}}, \quad (27)$$

$$T_r = \frac{n_F^2}{n_0^2} \frac{T_F \sqrt{f_0^{(g,g)}}}{\sqrt{f_0^{(H,H)} \left[f_0^{(g,g)} f_0^{(h,h)} - (f_0^{(g,h)})^2 \right]}}, \quad (28)$$

$$T_s = T_F - T_F \frac{2}{\varepsilon_D + \mu_D}. \quad (29)$$

В формулах (26)–(29) T_F драконический период лунного орбитального движения $T_F = 2\pi/n_F = 27.21222$ сут. Здесь частота $n_0 = \sqrt{fm_\oplus/a^3}$ (f — гравитационная постоянная, $m_\oplus$ — масса Земли, a — средняя большая полуось лунной орбиты, принятая равной $a = 383397772.5$ м). Численные значения указанных частот составляют:

$$n_F = 17395266.10''/\text{год}, \quad (30)$$

$$n_0 = 17243514.58''/\text{год}.$$

Таблица 1. Четыре моды свободной либрации твердой Луны

Амплитуды, угл.с	Аргументы	Периоды, сут	Фазы, угл. град	Моды
$P = 1''735$	$U_p(t) = pt + U_p^{(0)}$	1057.13	$U_p^{(0)} = 207.01^\circ$	Свободная либрация в долготе с периодом 2.99 г.
$Q = 3''3072$	$U_q(t) = qt + U_q^{(0)}$	27257.27	$U_q^{(0)} = 161.60^\circ$	Свободные колебания полюса с периодом 74.3 г.
$R = 1''1881$	$U_r(t) = rt + U_r^{(0)}$	8822.88	$U_r^{(0)} = 160.81^\circ$	Свободные колебания вектора кинетического момента в пространстве с периодом 24.3 г.
$S = 0''0160$	$U_s(t) = st + U_s^{(0)}$	27.312	$U_s^{(0)} = 39^\circ$	Квазисуточное колебание Луны с периодом 27.312 сут

Для принятых значений динамических сжатий Луны по формуле (29) получаем следующее теоретическое значение периода свободных либраций, обусловленных влиянием жидкого ядра $T_s = 27.1976$ сут. Безразмерные коэффициенты $f_0^{(l,l)}, f_0^{(L,L)}, \dots, f_0^{(g,g)}$ в формулах (26)–(28) представляют собой нормированные значения соответствующих вторых частных производных от усредненного возмущающего гамильтониана задачи $\langle F_l \rangle$. Они определяются довольно громоздкими формулами и были впервые вычислены в работе (Barkin, 1987) для модели гравитационного поля того времени (Гусев, Петрова, 2008). В данной работе для указанных коэффициентов были получены численные значения:

$$\begin{aligned} f_0^{(l,l)} &= 2506.765 \times 10^{-6}, & f_0^{(g,g)} &= 672.2999 \times 10^{-6}, \\ f_0^{(H,H)} &= -4.331321, & f_0^{(L,L)} &= 410.4448 \times 10^{-6} \\ f_0^{(g,h)} &= 673.1132 \times 10^{-6}, & f_0^{(h,h)} &= 671.6517 \times 10^{-6}, \\ f_0^{(\theta,\theta)} &= 410.4448 \times 10^{-6}, \end{aligned} \quad (31)$$

но уже для современной модели гравитационного поля Луны, построенной авторами работы (Matsumoto и др., 2010).

Теперь по формулам (26)–(31) для принятых значений параметров рассматриваемой модели находим значения четырех периодов свободных либраций Луны с жидким эллипсоидальным ядром. Они приведены в табл. 3 в сравнении со значениями соответствующих периодов из эмпирической теории либрации Луны (Rambaux, Williams, 2011).

Для определения амплитуд P, Q, R, S и их начальных фаз $U_p^{(0)}, U_q^{(0)}, U_r^{(0)}, U_s^{(0)}$ свободных либраций воспользуемся эмпирической теорией физической либрации Луны (Rambaux, Williams, 2011). Для этого отождествим обозначения основных

аргументов свободных либраций из этой работы U, V и W с нашими обозначениями:

$$U_p = U + \pi/2, \quad U_q = W - \pi/2, \quad U_r = V + \pi/2. \quad (32)$$

Аналогичные соотношения получаем для начальных фаз этих аргументов:

$$U_p^{(0)} = U_0 + \pi/2, \quad U_q^{(0)} = W_0 - \pi/2, \quad U_r^{(0)} = V_0 + \pi/2.$$

В данной работе мы определили начальные значения всех фаз $U_p^{(0)}, U_q^{(0)}, U_r^{(0)}, U_s^{(0)}$. Они приведены в табл. 1. А также определили значения четырех амплитуд основных свободных либраций (см. ниже), частоты (и периоды) свободных колебаний.

Для удобства сравнения свободных либраций (амплитуд, фаз и периодов) в аналитической и эмпирической теориях в нашем решении в переменных Андуайе свободные либрации запишем в виде (21), используя для резонансных аргументов их выражения (32) через аргументы U, V и W , используемые в теории, основанной на лазерных данных наблюдений.

В результате решения уравнений в вариациях с помощью метода малого параметра мы построили приближенное решение задачи о свободных либрациях в переменных Андуайе. Отметим, что в рассматриваемой постановке задачи вращательному движению модели ядра Луны сопоставлено простое движение идеальной жидкости по Пуанкаре (Ламб, 1947). При этом задача о физической либрации Луны была сведена к решению системы канонических уравнений 8-го порядка.

В данной работе в начале решение уравнений в вариациях было получено в переменных Андуайе $\mathbf{z} = (l, g, h, l_c; L, G, H, L_c)$ и затем было преобразовано к известным классическим переменным $\mathbf{Z} = (P, P_2, \tau, \rho, I\sigma)$ (Rambaux, Williams, 2011). Также использовались угловые переменные Андуайе θ и ρ , для которых $L = G \cos \theta, H = G \cos \rho$ и аналогичные переменные для движения жидкого ядра: θ_c и

Таблица 2. Свободные и резонансные либрации Луны. Амплитуды, периоды и тригонометрические аргументы вариаций соответствующих классических переменных

N	Переменные	Теория аналитическая	Теория эмпирическая	Тригонометриче- ские сомножители	Периоды, сут
1	δP_1	$-3''3060$	$-3''306$	$\sin W$	27257.273
2	δP_1	$-0''0320$	$-0''032$	$\sin(V - F)$	27.296
3	δP_1	$0''0250$	$0''025$	$\sin(U - F)$	27.932
4	δP_1	$0''0222$	—	$\sin(U + F)$	26.529
5	δP_1	$-0''00004$	—	$\sin(V + F)$	27.129
6	δP_1	$-0''001$	$0''000$	$\cos \Theta$	27.312
7	δP_1	$-0''016$	$-0''016$	$\sin \Theta$	27.312
8	δP_2	$8''1830$	$8''183$	$\cos W$	27257.273
9	δP_2	$0''0320$	$0''032$	$\cos(V - F)$	27.296
10	δP_2	$-0''0250$	$-0''025$	$\cos(U - F)$	27.932
11	δP_2	$0''0222$	$0''022$	$\cos(U + F)$	26.529
12	δP_2	$-0''00004$	—	$\cos(V + F)$	27.129
13	δP_2	$-0''016$	$-0''016$	$\cos \Theta$	27.312
14	δP_2	$0''001$	$0''002$	$\sin \Theta$	27.312
15	$\delta \tau_K$	$1''7570$	$1''735$	$\sin U$	1056.210
16	$\delta \tau_K$	$0''0774$	$0''077$	$\sin(W + F)$	27.185
17	$\delta \tau_K$	$-0''0328$	$-0''032$	$\sin(W - F)$	27.239
18	$\delta \tau_K$	$-0''0014$	—	$\sin V$	8822.883
19	$\delta \tau_K$	$-0''001$	—	$\cos \Xi$	7449.890
20	$\delta \rho_K$	$5''7402$	$5''753$	$\cos(W + F)$	27.185
21	$\delta \rho_K$	$2''4330$	$2''437$	$\cos(W - F)$	27.239
22	$\delta \rho_K$	$0''0320$	$0''029$	$\cos V$	8822.883
23	$\delta \rho_K$	$-0''0026$	$-0''003$	$\cos U$	1056.210
24	$\delta \rho_K$	$-0''007$	$-0''013$	$\cos \Xi$	7449.890
25	$\delta \rho_K$	$0''049$	$0''052$	$\sin \Xi$	7449.89
26	$I\delta\sigma_K$	$5''7402$	$5''758$	$\sin(W + F)$	27.185
27	$I\delta\sigma_K$	$-2''4330$	$-2''443$	$\sin(W - F)$	27.239
28	$I\delta\sigma_K$	$-0''0320$	$0''033$	$\sin V$	8822.883
29	$I\delta\sigma_K$	$-0''049$	$-0''045$	$\cos \Xi$	7449.890
30	$I\delta\sigma_K$	$-0''007$	$-0''002$	$\sin \Xi$	7449.890

ρ_c , для которых $L_c = G_c \cos \theta_c$. Довольно емкие выкладки для указанных построений мы опустим для краткости изложения и приведем окончательные результаты по изучению свободных либраций Луны, включая определение начальных

условий задачи на основе их сравнения с эмпирической теорией (Rambaux, Williams, 2011), построенной на основе лазерных наблюдений. Так, для вариаций $\delta z = (\delta l, \delta g, \delta h, \delta \omega, \delta \theta, \delta p, \delta l_c, \delta \theta_c)$ решение уравнений в вариациях в окрестности дви-

жения по законам Кассини было представлено в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned} \delta\omega/n_F &= \Lambda \cos U, & \delta g &= E \sin U + \Gamma \sin V, \\ \delta\theta &= T \cos W - T_s \sin U_s, & \delta l &= -L \sin W + Q_s \cos U_s, \\ \delta\rho &= -M \cos U + N \cos V, & \delta h &= H \sin V, \\ \delta\theta_c &= -T_s^{(c)} \sin U_s, & \delta l_c &= Q_s^{(c)} \cos U_s, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\delta\omega = \delta G/B$ – вариация модуля угловой скорости. В (33) использованы новые обозначения для амплитуд свободных либраций, описанных в переменных Андуайе:

$$\Lambda, T, T_s, M, N; L, Q_s, H, E, \Gamma; Q_s^{(c)} T_s^{(c)}. \quad (34)$$

Для амплитуд (34) были получены аналитические выражения в зависимости от параметров модели Луны и ее возмущенного орбитального движения. Эти амплитуды пропорциональны амплитудам свободных либраций Луны: P, Q, R и S всех четырех рассматриваемых мод либрации. Чтобы осуществить сравнение нашей теории с эмпирической теорией (Rambaux, Williams, 2011) (с целью определения начальных условий задачи), необходимо преобразовать решение в переменных Андуайе (33), (34) к классическим переменным теории физической либрации Луны (16).

Свободные либрации в классических переменных теории вращения Луны. Если решение задачи построено в переменных Андуайе, то аналогичные выражения можно получить в классических переменных теории физической либрации и для компонент угловой скорости. Действительно, между классическими переменными теории физической либрации и переменными Андуайе существуют простые геометрические соотношения, которые непосредственно вытекают из выражений направляющих косинусов главных осей инерции Луны в основной эклиптической системе координат (Barkin, 1987).

На первом этапе в нашей теории использовались переменные Андуайе и затем решение уравнений в вариациях было построено в классических переменных (16). В линейном приближении эти геометрические соотношения в частности позволяют выразить вариации классических переменных $Z = (P_1, P_2, \tau, \rho, I\sigma)$ через соответствующие вариации переменных Андуайе $\delta l, \delta\theta, \delta g, \delta h$ и $\delta\rho$ (в окрестности движения Луны по Кассини) (Barkin, 1987):

$$\begin{aligned} \delta P_1^K &= -\sin \rho \cos F \delta g - \cos \rho \delta l - \cos \rho \sin F \delta \rho, \\ \delta P_2^K &= \sin \rho \sin F \delta g - \cos \rho \delta \theta - \cos \rho \cos F \delta \rho, \\ \delta \tau_K &= \delta g + \delta h + \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} (\sin F \delta \theta - \cos F \delta l), \\ \delta \rho_K &= \delta \rho + \sin F \delta l + \cos F \delta \theta, \\ I \delta \sigma_K &= -\cos F \delta l + \sin F \delta \theta + \sin \rho \delta h. \end{aligned} \quad (35)$$

Таблица 3. Необъясненные либрации с наибольшими амплитудами (в классических переменных теории физической либрации Луны)

Перем.	Статус	Период, сут	C, угл. с	S, угл. с
$I\sigma_K$	+Un	7481.531	-0.045	-0.002
ρ_K	+Un	7468.388	-0.013	0.052
P_1^K	+Un	27.312	0.000	-0.016
P_2^K	+Un	27.312	-0.016	0.002

Здесь классическим переменным также приписан индекс K (или $_K$). Подставляя решение для свободных либраций в переменных Андуайе (33), (34) в формулы (35), получим вариации для 5-ти классических переменных:

$$\begin{aligned} \delta P_1^K &= Q \cos \rho \sin W + Q_s \cos \rho \cos U_s + \\ &+ \frac{1}{2} (M \cos \rho - P \sin \rho) \sin(U + F) - \\ &- \frac{1}{2} (M \cos \rho + P \sin \rho) \sin(U - F) + \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma \sin \rho - N \cos \rho) \sin(V + F) + \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma \sin \rho + N \cos \rho) \sin(F - V), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \delta P_2^K &= -T \cos \rho \cos W - T_s \cos \rho \sin U_s + \\ &+ \frac{1}{2} (M \cos \rho - P \sin \rho) \cos(U + F) + \\ &+ \frac{1}{2} (M \cos \rho + P \sin \rho) \cos(U - F) + \\ &+ \frac{1}{2} (\Gamma \sin \rho - N \cos \rho) \cos(V + F) - \\ &- \frac{1}{2} (\Gamma \sin \rho + N \cos \rho) \cos(V - F), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \tau_K &= P \sin U + (R - \Gamma) \sin V + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} [(T + Q) \sin(F + W) + (Q - T) \sin(W - F)] \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} [(T_s - Q_s) \cos(U_s + F) - (T_s + Q_s) \cos(U_s - F)], \\ \delta \rho_K &= -M \cos U + N \cos V + \\ &+ \frac{1}{2} (T - Q) \cos(W - F) + \frac{1}{2} (T + Q) \cos(W + F) - \\ &- \frac{1}{2} (T_s - Q_s) \sin(U_s + F) - \frac{1}{2} (T_s + Q_s) \sin(U_s - F), \end{aligned}$$

Таблица 4. Основные либрации Луны, обусловленные жидким эллипсоидальным ядром. Сравнение аналитической и эмпирической теорий свободной либрации Луны

Переменные Метод	Θ	Период, сут	Ампл. $\cos \Theta$, угл. сек	Ампл. $\sin \Theta$, угл. сек
P_1 наблюдения	Un	27.312	0.000	−0.016
P_1 теория	$F + \Omega + \Pi$	27.312	−0.001	−0.016
P_2 наблюдения	Un	27.312	−0.016	0.002
P_2 теория	$F + \Omega + \Pi$	27.312	−0.016	0.001
ρ наблюдения	Un	7468.39	−0.013	0.052
ρ теория	$\Omega + \Pi$	7449.89	−0.007	0.049
$I\sigma$ наблюдения	Un	7481.53	−0.045	−0.002
$I\sigma$ теория	$\Omega + \Pi$	7449.89	−0.049	−0.007
τ наблюдения	Un	—	—	—
τ теория	$\Omega + \Pi$	7449.89	−0.001	—

$$I\delta\sigma_k = \sin \rho R \sin V + \\ + \frac{1}{2}(T + Q)\sin(W + F) + \frac{1}{2}(-T + Q)\sin(W - F) \\ + \frac{1}{2}(T_s - Q_s)\cos(U_s + F) - \frac{1}{2}(T_s + Q_s)\cos(U_s - F).$$

Напомним, что постоянные значения амплитуд свободных либраций Луны (всех четырех мод колебаний) P , Q , R и S , входят сомножителями в выражения амплитуд свободных либраций в формулах (36). Аргументы U , V , W и U_s — резонансные аргументы свободной либрации Луны. Для первых трех из них мы примем те же обозначения, что и в эмпирической теории (Rambaux, Williams, 2011) (см. формулы в табл. 3).

Постоянные амплитуды и начальные фазы аргументов мы определим из сравнения полученного аналитического решения задачи о свободных либрациях Луны (36) и таблиц либраций (свободных и в тех же переменных) для эмпирической теории (Rambaux, Williams, 2011). В результате реализации этой процедуры определяем амплитуды и начальные фазы первых трех мод свободной либрации Луны (в долготе, в наклоне и в колебаниях полюса). Эти значения даются в табл. 3 (в секундах дуги): $P = 1''7570$, $Q = 3''3072$, $R = 1''1881$.

С учетом представлений (24)–(30) по формулам (23) в частности получаем соответствующие значения частот (1 ед. = град/сут):

$$p_0 = \frac{360^\circ}{1056.13}, \quad q_0 = \frac{360^\circ}{27257.27}, \quad r_0 = \frac{360^\circ}{8822.88}. \quad (37)$$

Таким образом, на данном этапе мы определили основные свободные либрации Луны, которые фигурируют в вариациях классических переменных. За начальный момент времени здесь принимается юлианская дата $t_0 = 2451545.0$, как и в работе (Rambaux, Williams, 2011).

Если слагаемые свободных либраций Луны для первых трех мод довольно четко усматриваются в эмпирической теории, то с идентификацией четвертой моды свободной либрации Луны, обусловленной влиянием жидкого ядра, дело обстоит значительно сложнее (см. п. 6).

В результате сравнения амплитуд либраций в решении (36) с их значениями, полученными в эмпирической теории, во-первых, вычисляем значения постоянных сомножителей

$$\Lambda = 0''04516, \quad T = 8''1732, \quad M = 0''00263646, \quad (38) \\ N = 0''03195, \quad \Gamma = 1''1895$$

и, соответственно, находим начальные значения — амплитуды свободной либрации первых трех мод (они приведены в табл. 1). По значениям (38) и формулам (36) находим амплитуды 24 свободных либраций для первых трех мод. Они приведены в седующей табл. 2 в сравнении с аналогичными амплитудами теории (Rambaux, Williams, 2011). Таблица 2 демонстрирует хорошее согласие разрабатываемой здесь аналитической теории (Barkin, 1987; Barkin и др., 2012) и эмпирической теории, построенной по лазерным наблюдениям (Rambaux, Williams, 2011). Здесь же приведены свободные либрации Луны, обусловленные жидким ядром Луны, которые далее изучаются подробнее.

В таблице 2 мы использовали вспомогательные аргументы

$$\Xi = (n_\Omega + n_\Pi)t, \quad \Sigma = (n_F + n_\Omega + n_\Pi)t. \quad (39)$$

Эти аргументы используются для описания свободных либраций Луны, обусловленных влиянием эллипсоидального жидкого ядра (в табл. 2 эти либрации указываются в строках с номерами 6, 7; 13, 14; 19; 24, 25; 29, 30).

В данной таблице приведены значения амплитуд и периодов для 30 свободных вариаций основ-

ных переменных теории либрации Луны в соответствии с формулами построенного решения (36) в сравнении с аналогичными характеристиками эмпирической теории ФЛЛ (Rambaux, Williams, 2011). Здесь же приведены амплитуды и периоды свободных либраций для проекций угловой скорости вращения Луны на ее главные оси инерции. Наше решение задачи о свободных либрациях Луны наряду с классическими членами содержит несколько дополнительных членов, которые, как показывают численные оценки, приведенные в табл. 3 и в 4, вполне значительны и должны учитываться при обработке светолокационных наблюдений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЙ МОДЫ СВОБОДНОЙ НУТАЦИИ ОТ ЯДРА

В табл. 3 приведены периоды и амплитуды мод свободной либрации, которые были определены. В модель DE421 интеграции включено жидкое ядро со сплюсненной или уплощенной границей ядро—мантия. Это добавляет четвертую моду возможного свободного режима, которую можно назвать ретроградной прецессией полюса в пространстве, обычно называемой свободной нутацией ядра по аналогии с вращением Земли. Этот режим будет в основном влиять на жидкое ядро, но также будет небольшая реакция на либрации мантии.

По теории DE421 уплощение на границе ядро—мантия вызывает пространственное колебание Луны с периодом около 197 лет. Период свободной нутации ядра зависит от орбитального периода и уплощения ядра. Выраженный в сутках, этот период оценивается по формуле (Rambaux, Williams, 2011):

$$P_{FCN} \sim 27.3 \frac{2}{f_c},$$

где f_c есть уплощение по модели DE421, равное 3.8×10^{-4} . В выражениях классических переменных в теории либрации Луны ρ_K и $I\sigma_K$ интегрирование по теории DE421 должно показать, что период прогрессивного движения составляет около 7500 дней. Либрационный член с периодом 7367 дней был отождествлен с вынужденной либрацией, предсказанной Экхартом (Rambaux, Williams, 2011).

Два тригонометрических члена свободной нутации ядра с периодом в 7481 дней для переменной $I\sigma_K$ и с периодом 7468 дней для переменной ρ_K с амплитудами $0''.045$ и $0''.054$ соответственно являются кандидатами. Эквивалентными членами в

переменных P_1 и P_2 являются члены с периодами 27.312 дней и с амплитудой 16 мсд.

Таким образом, амплитуды в двух представлениях являются отличными друг от друга.

Авторы работы (Rambaux, Williams, 2011) показали в результате тщательного анализа, что члены кандидаты на роль свободных либраций от ядра с периодами 7481 и 7468 дней сильно (0.95) коррелируют с упомянутым выше вариациями с периодом в 7367 дней. Так, период биений между этими периодами составляет около 1000 лет, что соответствует промежутку времени, охватываемому эфемеридой. При этом отмечается, что амплитуды членов кандидатов на роль членов свободной нутации в переменных $I\sigma$ и ρ , по-видимому, значительно завышены из-за сильной корреляции, а амплитуды подобных членов в других двух переменных P_1 и P_2 смотрятся более реалистичными. Эти численные результаты применимы к теории DE421, но реальные значения уплощения, амплитуды и периода свободной либрации Луны, по мнению авторов, являются весьма неопределенными. Авторам не удалось полностью идентифицировать свободные либрации Луны, обусловленные влиянием жидкого ядра, их период, фазу, а также структуру аргументов свободных либраций. Поэтому здесь мы продолжаем исследование эффектов жидкого ядра Луны в ее свободных либрациях.

Определение четвертой моды свободных либраций Луны, обусловленных ее жидким ядром. В данной работе фактически было получено приближенное решение задачи о свободных колебаниях полюса вектора угловой скорости вращения Луны и полюса угловой скорости вращения жидкого ядра (системы координат Пуанкаре, в которой задается простое движение жидкости) по отношению к главным осям инерции. Решение было получено в вариациях канонических переменных Андуайе L , L_c и l , l_c (Ferrandiz, Barkin, 2000; Barkin и др., 2012). Здесь L , L_c являются проекциями вектора кинетического момента Луны $\mathbf{G}$ и вектора кинетического момента относительного движения частиц жидкости $\mathbf{G}_c$ на полярную ось инерции Луны $C\zeta$: $L = G \cos \theta$, $L_c = G_c \cos \theta_c$. Соответственно, G и G_c являются модулями указанных векторов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_c$, θ и θ_c — углы, образованные векторами $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_c$ с полярной осью инерции Луны $C\zeta$.

Четвертая мода свободной либрации Луны, вызванная гидродинамическим влиянием жидкого ядра, в указанных канонических переменных

Андуайе определяется простыми формулами. Они следуют из (17):

$$\delta \mathbf{z} = S \left(\mathbf{z}^{(s)} \cos U_s - \mathbf{z}^{(s)*} \sin U_s \right), \quad (40)$$

где частота s выражается через комбинацию моментов инерции всей Луны и ее ядра (24) или по упрощенной формуле (25) через динамические сжатия жидкого ядра ε_D , μ_D (Barkin и др., 2012):

$$U_s = s_0 t + U_s^{(0)}, \quad s_0 = n_F + n_F (\varepsilon_D + \mu_D) / 2, \\ T_s = \frac{2\pi}{s_0} = T_F - \frac{2T_F}{\varepsilon_D + \mu_D}. \quad (41)$$

Частота n_F , которая равна частоте соответствующего аргумента теории орбитального движения Луны F , равна невозмущенному значению угловой скорости вращения Луны (одно из положений законов Кассини). Этой частоте соответствует драконический период лунного орбитального движения $T_F = 2\pi/n_F = 27.21222$ сут. Частоте свободной либрации s_0 соответствует свободное колебание полюса Луны с квазисуточным (лунным) периодом $T_s = 27.19759$ сут. Этот период не намного короче указанного выше драконического периода.

Для частоты s_0 будем также использовать представление

$$s_0 = n_F + n_\Pi, \quad n_\Pi = n_F (\varepsilon_D + \mu_D) / 2, \\ T_\Pi = \frac{2T_F}{\varepsilon_D + \mu_D}. \quad (42)$$

где частота n_Π есть весьма малая частота Пуанкаре, определяющая долгопериодическую либрацию полюса оси вращения Луны из-за влияния жидкого ядра с периодом T_Π .

Теперь мы запишем решение (40), (41) для вариаций переменных $\delta L(\delta\theta)$, $\delta L_c(\delta\theta_c)$, δl , δl_c , введенных выше переменных, определяющих колебания полюса Луны и ее жидкого ядра. Это решение было построено в соответствии с методом малого параметра (Barkin, 1987) и описывает основные динамические эффекты во вращении Луны, обусловленные жидким ядром (Barkin и др., 2012):

$$\delta L / B n_F = -S L_0^{(s)*} \sin U_s, \quad \delta l = S l_0^{(s)} \cos U_s, \quad (43)$$

$$\delta L_c / B n_F = -S L_{c;0}^{(s)*} \sin U_s, \quad \delta l_c = S l_{c;0}^{(s)} \cos U_s. \quad (44)$$

Поскольку справедливы дифференциальные соотношения: $\delta L = -G\delta\theta$, $\delta L_c = -G_c\delta\theta_c$, то формулы

решения уравнений в вариациях (43), (44) можно дополнить:

$$\delta\theta = S L_0^{(s)*} \sin U_s, \quad \delta l = S l_0^{(s)} \cos U_s, \quad (45)$$

$$\delta\theta_c = \frac{E_c}{B} S L_{c;0}^{(s)*} \sin U_s, \quad \delta l_c = S l_{c;0}^{(s)} \cos U_s. \quad (46)$$

Коэффициенты $L_0^{(s)*}$, $l_0^{(s)}$, $L_{c;0}^{(s)*}$ и $l_{c;0}^{(s)}$ в (45), (46) выражаются в терминах значений вторых частных производных гамильтониана задачи о вращении двухслойной Луны, вычисленных при невозмущенных значениях переменных, соответствующих движению по законам Кассини,

$$L_0^* = \frac{1}{s_0} \frac{\Delta_L}{\Delta}, \quad L_{c;0}^* = -\frac{1}{s_c} \frac{\Delta_{L_c}}{\Delta}, \quad l_{c;0} = -\frac{\Delta_{l_c}}{\Delta} \quad (l_0 = 1), \quad (47)$$

где использованы вспомогательные обозначения

$$\Delta = n_F^2 \left(\frac{B_c^2}{A_c C_c} - \frac{B_c B}{A C} \right) - s_0^2, \quad \Delta_L = -B n_F^2 \frac{B A_c}{A^2} s_0^2, \\ \Delta_{L_c} = -B n_F^2 \frac{B_c}{A} s_0^2, \quad \Delta_{l_c} = \frac{B}{A} n_F^2 \left(\frac{A_c B}{A C_c} - \frac{B_c}{C_c} \right). \quad (48)$$

Для принятой в нашей работе модели динамического строения Луны и ее ядра имеем следующие значения моментов инерции (Matsumoto и др., 2010; Barkin и др., 2012):

$$B = 0.393480000 m r_0^2, \quad B_c = E_c = 0.0001841759 m r_0^2, \\ C = 0.393321295 m r_0^2, \quad C_c = D_c = 0.0001841094 m r_0^2, \quad (49) \\ A = 0.393231806 m r_0^2, \quad A_c = F_c = 0.0001840444 m r_0^2.$$

В (49) m и r_0 — масса и средний радиус Луны. По значениям указанных параметров задачи (49) находим численные значения коэффициентов (47), (48):

$$L_0^* = -1.000011885, \quad L_{c;0}^* = 1.000095416, \quad (50) \\ l_{c;0} = -2133.74246 \quad (l_0 = 1).$$

И, соответственно, решение (45), (46) можно представить в виде:

$$\delta\theta = -1.000011885 S \sin U_s, \quad \delta l = S \cos U_s, \\ \delta\theta_c = 0.000468303 S \sin U_s, \quad (51) \\ \delta l_c = -2133.74246 S \cos U_s.$$

Подчеркнем, что невозмущенные значения переменных Андуайе соответствуют вращению Луны по законам Кассини. В наших обозначениях осей инерции Луны (в данной работе) моменты инерции Луны и ее ядра удовлетворяют неравенствам $B > C > A$ и $B_c > C_c > A_c$. Здесь введена в рассмотрение новая угловая переменная Π по формуле $U_s = F + \Pi$. Для начальных значений переменных F_0 , Π_0 и их частот имеем выражения:

$$U_s^{(0)} = F_0 + \Pi_0, \quad s_0 = n_F + n_\Pi, \quad U_s = s_0 t + F_0 + \Pi_0. \quad (52)$$

Жидкое ядро вызывает свободные либрации, которые проявляются во всех классических переменных. Чтобы их выявить, следует воспользоваться равенствами (35) и формулами нашего решения в переменных Андуайе (33). Для рассматриваемых вариаций они запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\delta\theta &= SL_0^{(s)*} \sin U_s, \quad \delta l = Sl_0^{(s)} \cos U_s, \\ \delta P_1^K &= -\cos \rho \delta l, \quad \delta P_2^K = -\cos \rho \delta \theta, \\ \delta \rho_K &= \sin F \delta l + \cos F \delta \theta, \\ I \delta \sigma_K &= -\cos F \delta l + \sin F \delta \theta, \\ \delta \tau_K &= \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} (\delta \theta \sin F - \delta l \cos F) = \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} (I \delta \sigma_K).\end{aligned}\quad (53)$$

В эти равенства следует подставить свободные вариации переменных Андуайе, обусловленные жидким ядром (45). В результате для вариаций классических переменных задачи (53) получаем следующие свободные либрации, обусловленные эллипсоидальным ядром:

$$\begin{aligned}\delta P_1^K &= -\cos \rho Sl_0^{(s)} \cos U_s, \\ \delta P_2^K &= -\cos \rho SL_0^{(s)*} \sin U_s, \\ \delta \rho_K &= \frac{1}{2} S \left[\left(L_0^{(s)*} + l_0^{(s)} \right) \sin (U_s + F) + \right. \\ &\quad \left. + \left(L_0^{(s)*} - l_0^{(s)} \right) \sin (U_s - F) \right], \\ I \delta \sigma_K &= \frac{1}{2} S \left[- \left(L_0^{(s)*} + l_0^{(s)} \right) \cos (U_s + F) + \right. \\ &\quad \left. + \left(L_0^{(s)*} - l_0^{(s)} \right) \cos (U_s - F) \right], \\ \delta \tau_K &= \frac{1}{2} S \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} \left[- \left(L_0^{(s)*} + l_0^{(s)} \right) \cos (U_s + F) + \right. \\ &\quad \left. + \left(L_0^{(s)*} - l_0^{(s)} \right) \cos (U_s - F) \right].\end{aligned}\quad (54)$$

Подставляя численные значения параметров $L_0^* = -1.000011885$, $l_0 = 1$, вариации (54) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta P_1^K &= 0.999636588 S \cos U_s, \\ \delta P_2^K &= 0.999648469 S \sin U_s \\ \delta \tau_K &= -0.013481139 S \cos (U_s - F) + \\ &\quad + 0.798712306 \times 10^{-7} S \cos (U_s + F), \\ \delta \rho_K &= 1.0000059427 S \sin (U_s - F) + \\ &\quad + 0.0000059427 S \sin (U_s + F), \\ I \delta \sigma_K &= -1.0000059427 S \cos (U_s - F) + \\ &\quad + 0.0000059427 S \cos (U_s + F).\end{aligned}\quad (55)$$

Решение задачи о свободных либрациях Луны, вызванных гидродинамическим влиянием жидкого ядра, здесь получено в системе координат, связанной с Луной и с эллипсоидальной поло-

стью ядра (в системе главных центральных осей инерции Луны). Для сравнения этого аналитического решения с эмпирической теорией (Rambaux, Williams, 2011) запишем его по отношению к основной эклиптической основной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Для этого следует фундаментальный аргумент U_s в формулах (53)–(55) заменить на аргумент $U_s + \Omega$, учитывающий прецессию плоскости лунной орбиты со средней угловой скоростью $n_\Omega < 0$ и с соответствующим периодом T_Ω .

Пренебрегая в формулах (55) малыми слагаемыми порядка 10^{-4} – 10^{-5} , решение (53) запишем в следующем виде: $U_s = F + \Pi$

$$\begin{aligned}\delta P_1^K &= S \cos (F + \Omega + \Pi), \quad \delta P_2^K = S \sin (F + \Omega + \Pi), \\ \delta \rho_K &= S \sin (\Omega + \Pi), \quad I \delta \sigma_K = -S \cos (\Omega + \Pi), \\ \delta \tau &= -0.01348 S \cos (\Omega + \Pi).\end{aligned}\quad (56)$$

Следующей задачей является поиск возможных свободных либраций, обусловленных жидким эллипсоидальным ядром, в таблицах эмпирической теории либрации Луны (Rambaux, Williams, 2011) и их отождествление с построенными возмущениями (31)–(33).

Определение периода, амплитуды и фазы четвертой моды свободной либрации Луны, вызванной жидким ядром. Таблицы эмпирической теории для классических переменных теории физической либрации Луны содержат большое количество членов с определенными амплитудами и периодами, но природа которых неопределенна (остается неизвестной). Для 5-ти классических переменных в работе Rambaux, Williams (2011) их насчитывается около 50. В табл. 3 нашей статьи перечисляются те из них, которые характеризуются наибольшими значениями амплитуды. Обозначение статуса вариаций Un в табл. 3 и 4 означает, что аргументы для соответствующих либраций классических переменных являются неизвестными. Гидродинамическое влияние жидкого ядра на физическую либрацию Луны является одним из основных факторов для истолкования необъясненных членов теории (со статусом Un). Поэтому они должны быть проанализированы в первую очередь с точки зрения рассматриваемой двухслойной модели для свободных либраций с наибольшими амплитудами из табл. 3, 4.

Таблицы 3, 4 в первых столбцах содержат обозначения классических переменных для анализа свободной либрации Луны. Все либрации здесь имеют неизвестное происхождение (статус). Тем не менее периоды и амплитуды этих либраций удалось определить на основе длительных рядов лазерных наблюдений (Rambaux, Williams, 2011). Значения периодов либраций даются в сутках и амплитуды либраций в секундах дуги. Наша цель — определить период и определить амплитуду и на-

Таблица 5. Определение начальной фазы Π_0 и амплитуды S четвертой моды свободной либрации Луны, обусловленной влиянием жидкого эллипсоидального ядра

$S \cos(\Omega_0 + \Pi_0) = -0''052$	$S \sin(\Omega_0 + \Pi_0) = 0''013$	$\Pi_0 = -139^\circ$	$S = 0''054$
$S \cos(\Omega_0 + \Pi_0) = 0''045$	$S \sin(\Omega_0 + \Pi_0) = -0''002$	$\Pi_0 = -128^\circ$	$S = 0''047$
$S \cos(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) = 0''000$	$S \sin(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) = 0''016$	$\Pi_0 = -132^\circ$	$S = 0''016$
$S \cos(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) = -0''001$	$S \sin(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) = 0''016$	$\Pi_0 = -128^\circ$	$S = 0''016$

начальную фазу четвертой моды свободной либрации Луны S и $U_s^{(0)} = F_0 + \Pi_0$ или Π_0 . Во-первых, отметим, что период свободной нутации в движении полюса Луны из-за влияния жидкого ядра в эмпирической теории (Rambaux, Williams, 2011) определен в эклиптической системе координат $CXYZ$, связанной с равноденствием даты. Сравним наши аналитические выражения (56) и эмпирические значения амплитуд и периодов либраций Луны, по нашему предположению обусловленных жидким ядром (табл. 2).

В результате для периода Пуанкаре $T_{\Pi} = 2\pi/n_{\Pi}$ мы получаем значения:

$$T_{\Pi} = 74470.00 \text{ сут}$$

(по возмущениям для переменной $\delta\rho_K$).

$$T_{\Pi} = 75797.75 \text{ сут}$$

(по возмущениям для переменной $I\delta\sigma_K$).

$$T_{\Pi} = 75133.87 \text{ сут (их среднее значение)}.$$

И теперь по формуле для периода Пуанкаре колебаний полюса Луны (16) определяем значение суммы динамических меридиональных сжатий жидкого ядра: $\varepsilon_D + \mu_D = 7.244 \times 10^{-4}$. В первом разделе была получена близкая оценка этого параметра: $\varepsilon_D + \mu_D = 7.00 \times 10^{-4}$.

По нашей аналитической теории вращения Луны ее физические либрации интерпретируются в кассиниевой системе координат $Sxyz$, которая вращается по отношению к эклиптической системе координат $CXYZ$ в соответствии с законами Кассини. Оси CZ и Cz указанных систем координат совпадают, но ось CX направлена к точке равноденствия даты, а ось Sx направлена вдоль средней линии узлов лунной орбиты на плоскости эклиптики. Это означает, что ось координат Sx (и Sy) вращается в плоскости эклиптики с угловой скоростью $n_{\Omega} < 0$ в основной системе координат, т.е. по часовой стрелке, если смотреть с конца оси Cz (вследствие регрессивного смещения среднего узла лунной орбиты на плоскости эклиптики). Угловая скорость этого движения равна $n_{\Omega} = -69629''1123$, период этого движения составляет 6798.526 сут (Rambaux, Williams, 2011).

Это означает, что в системе координат $CXYZ$ период свободной либрации, обусловленной жидким ядром, будет соответствовать частоте $s_0 - n_{\Omega}$, т.е. равен $T_s = 2\pi/(s_0 - n_{\Omega})$. Соответствующий аргумент свободной либрации (четвертой моды) может быть представлен как $U_s = F + \Pi$, где $\Pi = -F + U_s$ или $\Pi = n_{\Pi}t + \Pi_0$ ($\Pi_0 = -F_0 + U_s^{(0)}$ — начальная фаза введенной переменной). Если частота s_0 определяет квазисуточное (лунное колебание с периодом, близким к значению драконического периода в 27.21222 сут), то частота $n_{\Pi} = s_0 - n_F$ определяет долгопериодическую либрацию с периодом около 206 лет. На основе анализа не идентифицированных либраций Луны с периодами из табл. 3, 4 приходим к выводу, что наблюдаемым возмущениям переменных P_1 и P_2 соответствует частота $s_0 - n_{\Omega}$ и соответствующий период $T_s = 2\pi/(s_0 - n_{\Omega})$.

Воспользуемся обозначениями дополнительных аргументов (39) и вариации двух классических переменных $\delta\rho_K$ и $\sin\rho\delta\sigma_K$ из решения (56) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta\rho_K &= -S \cos(\Omega_0 + \Pi_0) \sin \Xi - \\ &\quad - S \sin(\Omega_0 + \Pi_0) \cos \Xi, \\ \sin\rho\delta\sigma_K &= S \sin(\Omega_0 + \Pi_0) \sin \Xi - \\ &\quad - S \cos(\Omega_0 + \Pi_0) \cos \Xi. \end{aligned} \quad (57)$$

В (57) было использовано представление $\Omega + \Pi = \Xi + \Omega_0 + \Pi_0$, $\Xi = (n_{\Omega} + n_{\Pi})t$. Ω_0 и Π_0 являются начальными значениями соответствующих аргументов для начальной эпохи 2000.0. С другой стороны, для рассматриваемых вариаций по данным лазерных наблюдений у нас имеются аналогичные представления (табл. 3, 4):

$$\begin{aligned} \delta\rho_K &= 0''052 \sin \omega_p t - 0''013 \cos \omega_p t, \\ \sin\rho\delta\sigma_K &= -0''002 \sin \omega_{\sigma} t - 0''045 \cos \omega_{\sigma} t, \quad (58) \\ \omega_p &\approx \omega_{\sigma}. \end{aligned}$$

Для частот ω_p и ω_{σ} соответствующие периоды (в соответствии с данными табл. 3, 4) имеют сравнительно близкие значения, равные 7481.5 и

7468.4 сут. Среднее значение этих периодов 7475.0 сут мы идентифицируем с периодом свободной либрации $T_{\Omega+\Pi} = 2\pi/(n_{\Omega} + n_{\Pi})$, обусловленной влиянием эллипсоидального жидкого ядра. Полагая, что малые расхождения в значениях указанных периодов эмпирической теории (7481.5 и 7468.4 сут) вызваны погрешностями в вычислениях, принимаем наблюдаемое значение периода,

$$T_{\Omega+\Pi} = 2\pi/(n_{\Omega} + n_{\Pi}) \approx 2\pi/\omega_p \approx 2\pi/\omega_{\sigma} \approx 7475.0 \text{ сут.} \quad (59)$$

В результате сравнения возмущений (57) и (58) получим систему из четырех уравнений (см. табл. 5). Из теории орбитального движения Луны мы имеем начальное значение аргумента $\Omega_0 = 125^\circ 045$ (для начальной эпохи 2000.0) (Simon и др., 1994; Kudryavtsev, 2007).

Рассмотрим теперь вариации двух других классических переменных теории физической либрации Луны P_1^K и P_2^K из решения (56), которые здесь представим в виде:

$$\begin{aligned} \delta P_1^K &= S \cos(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) \cos \Sigma - \\ &\quad - S \sin(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) \sin \Sigma, \\ \delta P_2^K &= -S \sin(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) \cos \Sigma - \\ &\quad - S \cos(F_0 + \Omega_0 + \Pi_0) \sin \Sigma, \end{aligned} \quad (60)$$

где $\Sigma = (n_F + n_{\Omega} + n_{\Pi})t$. С другой стороны, для рассматриваемых вариаций по данным эмпирической теории, основанной на лазерных наблюдениях дальностей до светотражателей на Луне, у нас имеются аналогичные представления (Rambaux, Williams, 2011) (табл. 3):

$$\begin{aligned} \delta P_1^K &= 0''000 \cos \omega_{P_1} t - 0''016 \sin \omega_{P_1} t, \\ \delta P_2^K &= -0''016 \cos \omega_{P_2} t + 0''001 \sin \omega_{P_2} t. \end{aligned} \quad (61)$$

Для вариаций переменных с большими периодами в 74470.00 и 75797.75 сут (из табл. 4) мы получаем среднее значение периода 75133.87 сут. Для частот ω_{P_1} и ω_{P_2} в (61) соответствующие периоды (в соответствии с данными табл. 4) имеют одинаковые значения, равные 27.312 сут. Полагая, что малые расхождения в значениях частот ω_{P_1} и ω_{P_2} и соответствующих периодов вызваны погрешностями в вычислениях, сразу получаем оценку квазислучайного периода Пуанкаре для свободной либрации Луны

$$T_{F+\Omega+\Pi} = \frac{2\pi}{n_F + n_{\Omega} + n_{\Pi}} \approx \frac{2\pi}{\omega_{P_1}} \approx \frac{2\pi}{\omega_{P_2}} \approx 27.312 \text{ сут.} \quad (62)$$

Принимая, в соответствии с табл. 3, значения $\omega_{P_1} = \omega_{P_2} = n_F + n_{\Omega} + n_{\Pi}$, мы получим дополнительно к четырем рассмотренным выше уравнениям

еще четыре уравнения для определения амплитуды и фазы четвертой моды свободной либрации Луны (табл. 5).

Тем не менее амплитуда этой либрации оказывается меньшей по величине по сравнению с теоретическим значением (см. табл. 4). Это означает, что указанные характеристики либрации Луны могут зависеть от других возможных факторов и должны быть изучены более детально и полно в будущем, в том числе с использованием новых методов и подходов, например, основанных на астрометрическом методе наблюдений с поверхности Луны в японском проекте ILOM (Hanada и др., 2004). Теоретические исследования вынужденных и свободных либраций Луны в будущем должны быть выполнены на основе более совершенных моделей внутреннего строения Луны с жидким и твердым ядром (с учетом их эксцентричного положения, гравитационного взаимодействия, колебаний их центров масс и т.п. факторов (Barkin, 2011)).

Для определения начальной фазы Π_0 (для эпохи 2000.0 JD) и амплитуды S свободной либрации Луны мы имеем систему из восьми уравнений с двумя неизвестными (см. первые два столбца табл. 5), в которых мы должны принять следующие начальные значения для известных аргументов теории орбитального движения Луны: $F_0 = 93^\circ 27$, $\Omega_0 = 125^\circ 045$ (Kudryavtsev, 2007). В табл. 5 для каждой строки значений амплитуд вариаций определены соответствующие значения начальной фазы Π_0 и амплитуды S (они представлены в третьем и четвертом столбцах таблицы). Значения фазы Π_0 даются в градусах, а амплитуды четвертой моды S — в секундах дуги.

Хорошо видно, что начальное значение фазы четвертой моды свободной либрации Луны определяется на основе данных лазерных наблюдений довольно уверенно (значения в области $\Pi_0 = -128^\circ \dots -139^\circ$). Амплитуда этой свободной либрации Луны определяется менее уверенно (с некоторым разбросом значений $S = 0''02-0''05$). Таким образом, все 8 уравнений из табл. 5 приблизительно удовлетворяются для начальной фазы свободной нутации жидкого ядра $\Pi_0 = -128^\circ \dots -139^\circ$ и для значений амплитуды $S = 0''02-0''05$. Оптимальные значения этих параметров, определенные методом наименьших квадратов, составляют $S = 0''0395$ и $\Pi_0 = -134^\circ$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разрабатывается аналитическая теория вынужденных и свободных либраций двухслойной модели Луны (с жидким эллипсоидальным ядром). Основные резонансные либрации Луны определены в переменных Андуайе и в классиче-

ских переменных теории физической либрации в хорошем согласии с современной эмпирической теорией, построенной на основе данных измерений светолокационных дальностей примерно за последние 40 лет (Rambaux, Williams, 2011). Впервые определены амплитуда и начальная фаза и период четвертой моды свободных либраций (табл. 1), обусловленной жидким ядром. При этом получили объяснение и интерпретацию ранее не идентифицированные члены эмпирической теории.

Период свободной либрации Луны с жидким эллипсоидальным ядром был оценен нами в 75 133.87 сут или, соответственно, в 205.7 лет. Этот период согласно формуле для периода (29) соответствует сумме динамических меридиональных сжатий Луны в $\varepsilon_D + \mu_D = 7.244 \times 10^{-4}$. В предположении о подобии динамических сжатий всей Луны и ее ядра были получены следующие оценки: $\varepsilon_D = 4.419 \times 10^{-4}$, $\mu_D = 2.825 \times 10^{-4}$. Восемь свободных либраций в классических переменных теории вращения Луны ρ , $I\sigma$ и P_1 , P_2 из общего списка не идентифицированных либраций Луны, выявленных в результате анализа лазерных наблюдений (Rambaux, Williams, 2011), в нашей работе получили объяснение и механическую интерпретацию (табл. 4). Дополнительно в работе была выявлена малая свободная либрация в долготе τ , также обусловленная влиянием жидкого эллипсоидального ядра, с периодом в 7449.89 сут и с небольшой амплитудой около $0''001$ (табл. 4).

В будущем мы планируем выполнить более широкие исследования динамических эффектов во вращении Луны из-за ее жидкого ядра и твердого ядра, включая исследования на основе динамики гравитационно-взаимодействующих оболочек небесных тел (Баркин, 2002; Barkin, 2011; Barkin и др., 2012). Актуальность этих исследований связана с возрастающей точностью лазерных наблюдений Луны и с разработкой и осуществлением проектов по изучению вращения Луны непосредственно с поверхности Луны, в частности в японском проекте ILOM (Hanada и др., 2004). Результаты данной работы также свидетельствуют, что указанные характеристики либрации Луны зависят от других возможных факторов и должны быть изучены более детально и более точно в будущем, в том числе с использованием новых методов и подходов (например, астрометрическим методом наблюдений с поверхности Луны в японском проекте ILOM (Hanada и др., 2004)). Теоретические исследования вынужденных и свободных либраций Луны в будущем будут выполнены на основе более совершенных моделей внутреннего строения Луны с жидким и твердым ядром (с учетом их эксцентричного положения, гравитационного взаимодействия, колебаний их центров масс и т.п. факторов (Barkin, 2011)).

Авторы статьи признательны и благодарят коллегу из Парижской обсерватории (Франция) Н. Рамбауса за активное обсуждение и постоянные консультации по данной работе, за работу над английским текстом статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Баркин Ю.В. Динамика системы несферичных небесных тел и теория вращения Луны. Диссертация на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. М.: ГАИШ МГУ, 1989. 412 с.
- Баркин Ю.В. Объяснение эндогенной активности планет и спутников и ее цикличности // Изв. секции наук о Земле Российской академии естественных наук. М.: ВИНТИ, 2002. Вып. 9. С. 45–97.
- Гусев А.В., Петрова Н.К. Вращение, физическая либрация и внутренняя структура Луны. Казань: Изд-во КФУ, 2008. 206 с.
- Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- Araki et al. Lunar global shape and polar topography derived from Kaguya-LALT Laser Altimetry // Science. 2009. V. 323. № 5916. P. 897–900. doi: 10.1126/science.1164146
- Barkin Yu.V. An analytical theory of the lunar rotational motion // Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets / Ed. Holota P. // Proc. Int. Symp. (Prague, Czechoslovakia, 15–20 September, 1986). Monograph Series of UGTK, Prague. 1987. P. 657–677.
- Barkin Yu.V., Kudryavtsev S.M., Barkin M.Yu. Perturbations of the first order of the Moon rotation // Proc. Int. Conf. "Astronomy and World Heritage: across Time and Continents" (Kazan, 19–24 August). KSU, 2009. P. 161–164.
- Barkin Yu.V. Modern problems of selenodynamics // Astron. and Astrophys. Trans. 2011. V. 27. Iss. 1. P. 101–104. www.aaptr.com/upload/AAPTR/pdf/101_104_Barkin_V2.pdf
- Barkin Yu.V., Hanada H., Matsumoto K., Noda H., Petrova N., Sasaki S. The effects of the physical librations of the Moon, caused by a liquid core and their possible detection from the long-term laser observations and in the Japanese lunar project ILOM // The 3rd Moscow Solar System Symp. (SM-S3) (8–12 October, 2012, Moscow, Russia). Book of abstracts. Abstract 3MS³-MN-10. P. 18–19. Presentation file: http://ms2012.cosmos.ru/3ms3-mn-10_h_hanada_2012_iki_Moon_librations_121005.pdf
- Calame O. Free librations of the Moon determined by an analysis of laser range measurements // The Moon. 1976. V. 15. P. 343–352.
- Ferrandiz J.M., Barkin Yu.V. Model of the Earth with the eccentric and the moveable liquid core // Motion of Celestial Bodies, Astrometry and Astronomical Reference Frames / Eds. Soffel M., Capitaine N. / Journees 1999&IX. Lohrmann-Kolloquium Proceedings (Dresden, September 13–15, 1999). Dresden, Germany, 2000. P. 192.
- Ferrandiz J.M., Barkin Yu.V. New approach to development of Moon rotation theory // Proc. Int. Conf. "Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: from milliarcseconds to microarcseconds" / Eds. Finkel-

- stein A., Capitaine N. / Journees 2003 (September 22–25, 2003, St. Petersburg, Russia). IPA RAS. 2003. P. 199–200.
- Hanada H., Heki K., Araki H., Matumoto K., Noda H., Kawano N., Tsubokawa T., Tsuruta S., Tazawa S., Asari K., Kono Y., Yano T., Gouda N., Iwata T., Yokoyama T., Kanamori H., Funazaki K., Miyazaki T. Application of a PZT telescope to In situ Lunar orientation Measurements (ILOM) // Proc. Int. Ass. Geod. 2004. Springer. P. 163–168.
- Kudryavtsev S.M. Long-term harmonic development of lunar ephemeris // Astron. and Astrophys. 2007. V. 471. P. 1069–1075. doi: 10.1051/0004-6361:20077568
- Matsumoto K., Goossens S., Ishihara Y., Liu Q., Kikuchi K., Iwata T., Namiki N., Noda H., Hanada H., Kawano N., Lemoine F.G., Rowlands D.D. An improved lunar gravity field model from SELENE and historical tracking data: revealing the far side gravity features // J. Geophys. Res. 2010. doi: 10.1029/2009JE003499
- Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bull. Astron. 1910. V. 27. P. 321–356.
- Rambaux N., Williams J.G. The Moon's physical librations and determination of their free modes // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2011. V. 109. Iss. 1. P. 85–100. doi: 10.1007/s10569-010-9314-2
- Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Franco G., Laskar J. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and planets // Astron. and Astrophys. 1994. V. 282. P. 663–683.
- Weber R.C., Lin Pei-Ying, Garnero E.J., Williams Q., Lognonné P. Seismic detection of the lunar core // Science. 2011. V. 331. P. 309–312. doi: 10.1126/science.1199375
- Williams J.G., Boggs D.H., Yoder C.F., Ratcliff J.T., Dickey J.O. Lunar rotational dissipation in solid body and molten core // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. P. 27933–27968.
- Williams J.G., Boggs D.H., Turyshev S.G. LLR Analysis – JPL Model and Data Analysis LLR Workshop. Harvard, Boston, MA. December 9–10, 2010.
- Williams J.G., Boggs D.H., Ratcliff J.T. Lunar moment of inertia and Love number // 42nd Lunar and Planet. Sci. Conf. 2011. <http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2011/pdf/2610.pdf>
- Williams J.G., Boggs D.H., Ratcliff J.T. Lunar moment of inertia, Love number and core // 43rd Lunar and Planet. Sci. Conf. 2012. <http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2012/pdf/2230.pdf>