М. О. Корпусов, А. А. Панин

Лекции по линейному функциональному анализу

Том II. Функциональные пространства

Москва Вологда
«Инфра-Инженерия»
2025

УДК 517.988
ББК 22.162
К68

Рецензенты:
проф. *В. Ю. Попов*;
проф. *М. В. Фалалеев*;
проф. *С. А. Загребина*

Корпусов, М. О.

К68 Лекции по линейному функциональному анализу. Том II. Функциональные пространства / М. О. Корпусов, А. А. Панин. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 276 с. : ил.
ISBN 978-5-9729-2582-7

В курсе лекций изложены теория пространств Лебега, Гёльдера, С. Л. Соболева и пространств обобщённых функций, а также теоремы вложения пространств С. Л. Соболева.

Материал книги используется в курсе «Линейный и нелинейный функциональный анализ», который авторы читают на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет интерес для широкого круга студентов и аспирантов, специализирующихся в области функционального анализа.

УДК 517.988
ББК 22.162

ISBN 978-5-9729-2582-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

II. Пространства Лебега: дальнейшие результаты

III. Пространства основных и обобщённых функций и их приложения к дифференциальным уравнениям

IV. Пространства С. Л. Соболева

V. Абстрактное интегрирование

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ функционального анализа для студентов кафедры математики физического факультета МГУ. Во втором томе «Функциональные пространства» рассматриваются различные пространства функций, как представляющие интерес в силу внутренней логики действительного анализа, так и широко используемые в математической физике для формулировки и исследования обобщённых постановок краевых и начально-краевых задач. Изложение начинается с описания пространств функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций. Здесь же приводится теория интеграла Римана—Стилтьеса. Затем рассматриваются гёльдеровы функции. Далее рассматриваются пространства Лебега, причем в целях замкнутости изложения приводится доказательство теоремы Радона—Никодима, которая требуется для описания пространств, сопряжённых к лебеговским. Кроме того, рассмотрение сопряжённых пространств требует вернуться к понятию слабой сходимости. После этого мы переходим к пространствам, наиболее часто используемым в обобщённых постановках задач математической физики, а именно: пространствам $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ и пространствам Соболева. Для последних доказаны теоремы вложения Соболева и Реллиха—Кондрашова. В качестве дополнения приводится материал, позволяющий строить интеграл типа Лебега от банаховозначных функций (интеграл Бохнера), и рассмотрены свойства соответствующих пространств.

Книга состоит из основных лекций, в которых излагаются базовые сведения, и из семинаров-лекций, в которых помимо большого количества примеров, иллюстрирующих основные свойства объектов, введённых в лекциях, рассматриваются также тонкие вопросы общей теории. В практике нашего преподавания студенты устно защищают решения задач перед преподавателем. (Один из авторов оценил на себе полезность подобной системы, за что очень благодарен своим учителям, и прежде всего А. Шеню.) Основные лекции и лекции-семинары нумеруются независимо. Значительная часть примеров и задач взята из различных учебников и задачников. Мы постарались наиболее полно отразить их список в библиографии.

Мы глубоко признательны А. Г. Свешникову, А. Н. Боголюбову, Е. Е. Букжалёву, Н. Н. Нефёдову и А. Г. Яголе за полезное обсуждение книги, а также рецензентам: В. Ю. Попову, С. А. Загребиной и М. В. Фалалееву за ценные замечания, существенно улучшившие книгу. Отдельно хотим выразить благодарность студентам А. А. Белову и В. В. Цепелеву, указавшим нам на ряд опечаток и неточностей.

Тематическая лекция I

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ, АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРОСТРАНСТВА ГЁЛЬДЕРА

Лекция 1

ПРОСТРАНСТВО ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

§ 1. Определение пространства $BV[a,b]$ и его свойства

Пусть вещественная функция f определена на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ произвольное разбиение:

$$\mathrm{T} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

и сопоставим этому разбиению величину:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \tag{1.1}$$

называемую *вариацией функции f по разбиению* T. Возьмём supremum по всем таким разбиениям T отрезка $[a,b]$ и определим *полную вариацию функции f по отрезку* $[a,b]$:

$$\mathrm{V}_a^b(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{\mathrm{T}} \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f). \tag{1.2}$$

Пусть

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

тогда

$$\begin{aligned} &|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \\ &\quad = |\alpha_1 f_1(x_k) + \alpha_2 f_2(x_k) - \alpha_1 f_1(x_{k-1}) - \alpha_2 f_2(x_{k-1})| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \alpha_1 |f_1(x_k) - f_1(x_{k-1})| + \alpha_2 |f_2(x_k) - f_2(x_{k-1})|. \end{aligned}$$

Откуда сразу же получаем неравенство:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \alpha_1 \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f_1) + \alpha_2 \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f_2). \tag{1.3}$$

Определение 1. *Назовём пространством функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ множество тех вещественных функций, определённых на отрезке $[a,b]$, для которых конечна величина $\mathrm{V}_a^b(f)$ из (1.2).*

Обозначение. $BV[a,b]$.

В силу (1.3) можно видеть, что множество $BV[a,b]$ есть вещественное линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число.

ПРИМЕР 1. Монотонные функции. Пусть $f(x)$ — это монотонно неубывающая функция на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Аналогично для монотонно невозрастающих функций:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = f(a) - f(b).$$

Объединяя эти факты, для всех монотонных на отрезке $[a,b]$ функций получим равенство:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = |f(b) - f(a)|\,.$$

Естественно, и supremum по всем разбиениям T отрезка $[a,b]$ равен этой же величине:

$$\mathrm{V}_a^b(f) = |f(b) - f(a)|\,.$$

Отметим, что *функция ограниченной вариации является ограниченной функцией.*

□ Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leqslant \\ \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(a)| \leqslant V_a^b(f) + |f(a)| =: C,$$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant C,$$

поскольку $T_0 = \{a = x_0 < x = x_1 < x_2 = b\}$ — это разбиение отрезка $[a,b]$, причём

$$V_{T_0}(f) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant V_a^b(f). \quad \boxtimes$$

Замечание 1. Не всякая ограниченная функция является функцией ограниченной вариации.

□ Рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right), & \text{если} \quad x \in (0,1]; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

В качестве специального разбиения отрезка $[0,1]$ возьмём следующие точки:

$$T_n = \left\{ 0 = x_0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \right\}.$$

Заметим, что

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) - f\left(\frac{1}{2k\pm 1}\right) = \frac{1}{2k}\cos(\pi k) - \frac{1}{2k\pm 1}\cos\left(\pi k \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{V}_0^1(f) \geqslant \mathrm{V}_{T_n}(f) = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left| f\left(\frac{1}{2k-1}\right) - f\left(\frac{1}{2k}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{2k}\right) - f\left(\frac{1}{2k+1}\right) \right| \right\} + \\
&\qquad + \left\{ \left| f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0) \right| \right\} = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left| \frac{(-1)^k}{2k} \right| + \left| \frac{(-1)^k}{2k} \right| \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

Теперь мы докажем теорему об аддитивности величины $\mathrm{V}_a^b(f)$.
Теорема 1. *Пусть* $f \in BV[a,b]$ *и* $c \in (a,b)$ *— произвольная точка, тогда*

$$f \in BV[a,c] \cap BV[c,b], \tag{1.4}$$

причём имеет место равенство:

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

Доказательство.
Шаг 1. Итак, пусть $c \in (a,b)$. Пусть

$$\mathrm{T} := \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2,$$

где T_1 — произвольное разбиение отрезка $[a,c]$, а T_2 — произвольное разбиение отрезка $[c,b]$. Ясно, что T — разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда имеет место равенство:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f), \tag{1.5}$$

откуда вытекает неравенство:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f). \tag{1.6}$$

Следовательно, величины $\mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f)$ и $\mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f)$ ограничены в совокупности, откуда имеем (1.4). Взяв теперь supremum от обеих частей неравенства (1.6) по T_1 и T_2, получим

$$\mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f).$$

Шаг 2. Пусть теперь T — это произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. К сожалению, его сужения на $[a,c]$ и $[c,b]$ могут не быть разбиениями этих отрезков, поскольку точка $c \in (a,b)$ не обязана входить в разбиение T. Поэтому добавим к нашему разбиению T точку c. Получившееся разбиение обозначим через T'. Теперь сужения T' на отрезки $[a,c]$ и $[c,b]$ образуют разбиения T_1 и T_2 соответственно. Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно!), что добавление новой точки к разбиению T может лишь увеличить вариацию по разбиению. Поэтому справедлива следующая цепочка выражений:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \mathrm{V}_{\mathrm{T}'}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f),$$

и, взяв supremum от обеих частей этого неравенства по T, получим неравенство:

$$\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Произвольную функцию $f \in BV[a,b]$ всегда можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих функций:*

$$f = f_1 - f_2.$$

Доказательство.

Возьмём в качестве функции $f_1(x)$ функцию $f_1(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$, тогда из теоремы 1 получим, что функция $f_1(x)$ монотонно неубывающая.

$\square$ Действительно, пусть $x \geqslant y$ и $x, y \in [a,b]$. Справедлива цепочка выражений:

$$f_1(x) - f_1(y) = \mathrm{V}_a^x(f_1) - \mathrm{V}_a^y(f_1) = \mathrm{V}_y^x(f_1) \geqslant 0,$$

где мы воспользовались утверждением теоремы 1. $\boxtimes$

Определим теперь функцию $f_2(x)$ равенством:

$$f_2(x) := \mathrm{V}_a^x(f) - f(x).$$

Проверим монотонность функции $f_2(x)$.

$\square$ Из теоремы 1 имеем $\mathrm{V}_a^x - \mathrm{V}_a^y = \mathrm{V}_y^x$, а в силу определения полной вариации по отрезку верно неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{V}_y^x(f)$. Из этих двух соотношений получаем:

$$f_2(x) - f_2(y) = \mathrm{V}_a^x(f) - f(x) - \mathrm{V}_a^y(f) + f(y) = \\ = \mathrm{V}_y^x(f) - (f(x) - f(y)) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant y. \quad \boxtimes$$

Следствие доказано.

§ 2. Интеграл Римана—Стилтьеса

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mathrm{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при $i = 1, 2, ..., n$, а также функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^1$. Составим интегральную сумму:

$$\sigma = \sigma(g; f; \mathrm{T}) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left[g(x_i) - g(x_{i-1})\right]. \tag{2.1}$$

Введём параметр разбиения:

$$\lambda(\mathrm{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$$

Предположим, что существует предел интегральных сумм [1] (2.1) при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$, тогда полученный предел будем называть интегралом Римана—Стилтьеса и будем его обозначать следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x). \tag{2.2}$$

Из построения интеграла Римана—Стилтьеса вытекает (докажите самостоятельно!), что в случае, когда $f \in C[a, b]$ и $g \in C^{(1)}[a, b]$, соответствующий интеграл Римана—Стилтьеса существует и совпадает с интегралом Римана:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^b f(x) g'(x)\, dx.$$

Однако условие $g \in C^{(1)}[a, b]$ очень обременительно, и возникает вопрос о более слабом достаточном условии существования интеграла Римана—Стилтьеса. На этот вопрос отвечает следующая теорема:
Теорема 2. *Пусть $f \in C[a, b]$, $g \in BV[a, b]$. Тогда существует интеграл Римана—Стилтьеса*:

$$\mathrm{I} = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x),$$

[1] Мы не даём определения предела интегральных сумм, поскольку оно аналогично случаю интеграла Римана, известного из курса математического анализа.

причём

$$|\mathrm{I}| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\, \mathrm{V}_a^b(g). \tag{2.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. В силу следствия из теоремы 1 в качестве $g(x)$ можно взять монотонно неубывающую функцию.

□ Действительно, пусть $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Достаточно доказать существование следующих интегралов Римана—Стилтьеса:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg_1(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b f(x)\, dg_2(x),$$

и тогда мы докажем (см. задачу 5 для самостоятельного решения семинара-лекции 2) существование интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dg_1(x) - \int\limits_a^b f(x)\, dg_2(x). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$, и на каждом отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ рассмотрим минимум и максимум функции $f(x)$:

$$m_k := \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \quad M_k := \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Так что помимо интегральной суммы (2.1) составим нижнюю s и верхнюю S суммы типа Дарбу:

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]. \tag{2.4}$$

Отметим, что поскольку функция $g(x)$ монотонно не убывает, выполнены следующие неравенства для произвольного фиксированного разбиения T отрезка $[a, b]$:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Докажем, что при добавлении одной новой точки к разбиению T отрезка $[a, b]$ нижняя сумма s не убывает, а верхняя сумма S не возрастает.

□ Действительно, пусть $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — это новая точка, добавленная к разбиению T. Тогда

$$m_{1k} := \min_{x\in[x_{k-1},y_k]} f(x) \geqslant m_k, \quad m_{2k} := \min_{x\in[y_k,x_k]} f(x) \geqslant m_k. \tag{2.5}$$

При этом в нижней сумме до добавления точки y_k было слагаемое:

$$m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right],$$

а после добавления новой точки получились два слагаемых:

$$m_{1k} \left[g(x_k) - g(y_k)\right] + m_{2k} \left[g(y_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Причём в силу (2.5) имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} &m_{1k} \left[g(x_k) - g(y_k)\right] + m_{2k} \left[g(y_k) - g(x_{k-1})\right] \geqslant \\ &\qquad \geqslant m_k \left[g(x_k) - g(y_k)\right] + m_k \left[g(y_k) - g(x_{k-1})\right] = m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что верхняя сумма S не возрастает при добавлении новой точки разбиения. ⊠

Шаг 3. Теперь докажем, что для двух произвольных разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a, b]$ соответствующая разбиению T_1 нижняя сумма $s_1 := s_1(T_1)$ не больше соответствующей разбиению T_2 верхней суммы $S_2 := S_2(T_2)$:

$$s_1 \leqslant S_2.$$

□ Возьмём объединение этих разбиений $\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ и сопоставим полученному разбиению T_3 нижнюю сумму s_3 и верхнюю сумму S_3. В силу предыдущего имеет место неравенства:

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2. \tag{2.6}$$

Значит, всегда $s_1 \leqslant S_2$. ⊠

Шаг 4. В силу (2.6) существует точная верхняя грань всех нижних сумм $\{s(T)\}$:

$$\mathrm{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathrm{T}} s(\mathrm{T}).$$

З а м е ч а н и е 1. Альтернативно можно определить величину I как

$$\mathrm{I}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathrm{T}} S(\mathrm{T}).$$

По доказанным неравенствам (2.6) имеем:

$$s \leqslant \mathrm{I}_1 \leqslant S \quad \text{и} \quad s \leqslant \sigma \leqslant S \Rightarrow \mathrm{I}_1 - \sigma \leqslant S - s, \quad \sigma - \mathrm{I}_1 \leqslant S - s.$$

Стало быть,

$$|\sigma - \mathrm{I}_1| \leqslant S - s. \tag{2.7}$$

Шаг 5. Рассмотрим разность:

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Заметим, что поскольку $f \in C[a, b]$, то по теореме Кантора эта функция равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\lambda(\mathrm{T}) < \delta$ получим

$$M_k - m_k < \varepsilon$$

для всех $k = 1, 2, ..., n$. Тогда из (2.7) получим неравенство:

$$|\sigma - \mathrm{I}_1| \leqslant S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \varepsilon[g(b) - g(a)].$$

А это означает, что

$$\lim_{\lambda(\mathrm{T})\to 0} \sigma(\mathrm{T}) = \mathrm{I}_1 \Rightarrow \mathrm{I}_1 = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Шаг 6. Теперь заметим, что для произвольного разбиения T отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство:

$$|\sigma(g; f; \mathrm{T})| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\, \mathrm{V}_a^b(g). \tag{2.8}$$

Выбрав последовательность разбиений T_n с $\lambda(\mathrm{T}_n) \to 0$, предельным переходом в неравенстве (2.8) получим оценку (2.3).

Теорема доказана.

§ 3. Интегрирование по частям в интеграле Римана—Стилтьеса

Теорема 3. *Верно равенство*:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = -\int_a^b g(x)\,df(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a), \tag{3.1}$$

причём из существования любого из двух интегралов в этой формуле вытекает существование другого.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathrm{T} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ при $k = \overline{1, n}$. Рассмотрим следующую интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)f(\xi_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})f(\xi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)f(\xi_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)f(\xi_{k+1}) = g(b)f(\xi_n) - g(a)f(\xi_1) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] = g(b)f(b) - g(a)f(a) -$$

$$- \left\{ g(b)\,[f(b)-f(\xi_n)] + g(a)\,[f(\xi_1)-f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)] \right\}.$$

Слагаемое в фигурных скобках является интегральной суммой, соответствующей (при условии существования) интегралу Римана—Стилтьеса:

$$\int_a^b g(x)\,df(x).$$

Шаг 2. Теперь перейдем к пределу при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ в обеих частях полученного на шаге 1 равенства и получим, что из существования предела одной из интегральных сумм вытекает существование предела другой интегральной суммы:

$$\text{либо} \quad \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k)-g(x_{k-1})]\,,$$

$$\text{либо} \quad \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\,[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)] + g(b)\,[f(b)-f(\xi_n)] + g(a)\,[f(\xi_1)-f(a)]\,.$$

В итоге получим в пределе равенство (3.1).

Теорема доказана.

Замечание 2. В силу результата теоремы 2 из теоремы 3 вытекает, что если $f \in BV[a,b]$ и $g \in C[a,b]$, то существует интеграл Римана—Стилтьеса:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Приведём некоторые свойства интеграла Римана—Стилтьеса (см. задачу 5 для самостоятельного решения семинара-лекции 2).

(i) $\int\limits_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\,dg(x) = \alpha_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,dg(x) + \alpha_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,dg(x);$

(ii) $\int\limits_a^b f(x)\,d\,(\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)) = \alpha_1 \int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) + \alpha_2 \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x);$

(iii) $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^c f(x)\,dg(x) + \int\limits_c^b f(x)\,dg(x)$, $c \in (a,b)$,

причём равенства (i)—(ii) имеют место при условии существования всех интегралов в правой части, а в случае (iii) — при условии существования интеграла в левой части.

ПРИМЕР 2. Приведём пример функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых интегралы в правой части (iii) существуют, а интеграл в левой части не существует. Пусть функции f и g заданы на сегменте $[-1,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда существуют оба интеграла:

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dg(x) = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dg(x) = 0,$$

однако интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$$

не существует. Для того чтобы это доказать, возьмём произвольное разбиение T отрезка, но таким образом, чтобы точка 0 не попала в число точек разбиения. Рассмотрим соответствующую интегральную сумму

$$\sigma(g; f; \mathrm{T}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right],$$

и пусть $x_{i-1} < 0 < x_i$, тогда эта сумма равна $\sigma = f(\xi_i)$, а стало быть, равна либо 0, либо 1 в зависимости от того,

$$\xi_i < 0 \quad \text{или} \quad \xi_i > 0.$$

Поэтому предела при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ не существует.

§ 4. Линейные функционалы над $C[a,b]$

Рассмотрим некоторый линейный (по построению) функционал на банаховом пространстве $C[a,b]$, определённый следующим интегралом Римана—Стилтьеса:

$$\langle \Phi_g, f \rangle = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{при некотором} \quad g \in BV[a,b] \tag{4.1}$$

и для любой функции $f \in C[a,b]$.

Докажем, что $\Phi_g \in (C[a,b])^*$, т. е. является линейным и непрерывным в сильной топологии банахова пространства $C[a,b]$ функционалом.

□ Действительно, линейность этого функционала вытекает из свойства (i) интегралов Римана—Стилтьеса.

Докажем непрерывность. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ равномерно по $x \in [a,b]$, что равносильно:

$$\|f_n - f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда в силу теоремы 2 справедлива цепочка неравенств:

$$|\langle \Phi_g, f_n - f\rangle| = \left|\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\; dg(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \mathrm{V}_a^b(g) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым мы приходим к выводу о том, что линейная оболочка семейства

$$\left\{\Phi_g \middle| \; g \in BV[a,b]\right\}$$

образует линейное подпространство в банаховом пространстве всех линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве $C[a,b]$. Более того, справедлива следующая теорема Рисса (которую мы приводим без доказательства):

Т е о р е м а 4. *Каждый линейный и непрерывный функционал на банаховом относительно стандартной нормы пространстве $C[a,b]$ можно представить в виде следующего интеграла Римана—Стилтьеса*:

$$\langle \Phi_g, f\rangle = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x) \quad \textit{при} \quad g \in BV[a,b],\ \forall\, f \in C[a,b].$$

Семинар–Лекция 1

ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

§ 1. Факты, сообщённые на лекции 1 (напоминание)

Для удобства ссылок приведём некоторые основные факты.

Л1. Функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

Л2. Всякая монотонная на отрезке $[a;b]$ функция имеет на нём ограниченную вариацию, причём в этом случае

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|, \tag{1.1}$$

а всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух монотонных (например, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x) = V_a^x(f)$).

Л3. При $a < c < b$ имеет место вложение

$$BV[a;b] \subset BV[a;c] \cap BV[c;b]. \tag{1.2}$$

§ 2. Другие важные свойства

Свойство 1. Всякая функция ограниченной вариации ограничена. Действительно, для любого $x \in [a;b]$ имеем

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant V_a^b(f).$$

Свойство 2. («Слияние») В формуле (1.2) верно и обратное вложение, причём

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f). \tag{2.1}$$

Доказательство этого факта сходно с доказательством (1.2). В обоих случаях используется следующая ключевая идея: *добавление ещё одной точки к разбиению T отрезка $[a;b]$ может лишь увеличить сумму*

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Свойство 3. Если $f, g \in BV[a;b]$, то $f \cdot g \in BV[a;b]$, причём

$$V_a^b(fg) \leqslant \sup_{x\in[a;b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x\in[a;b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g).$$

□ Доказательство совсем несложно. Для произвольного разбиения T запишем:

$$\begin{aligned}
&|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\
&= |(f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)) + (f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1}))| \leqslant \\
&\leqslant |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)| + |f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\
&= |g(x_k)||f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})||g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \\
&\leqslant \sup|g||f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sup|f||g(x_k) - g(x_{k-1})|.
\end{aligned}$$

После суммирования по всем отрезкам разбиения и взятия точной верхней грани по всем разбиениям получаем требуемый результат. ⊠

§ 3. Некоторые примеры

ПРИМЕР 1. Требуется представить данную функцию в виде разности двух монотонно неубывающих.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \in (0;1), \\ 0, & x \in [0;1] \setminus \{a\}. \end{cases}$$

□ Очевидно, достаточно воспользоваться результатом Л2, для которого надо построить «вариацию с переменным верхним пределом» $f_1(x) = V_0^x(f)$. Это можно сделать пользуясь утверждением Л3 о разбиении с учётом (2.1) и (1.1). Тогда получим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;a), \\ 1, & x = a, \\ 2, & x \in (a;1], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;a), \\ 0, & x = a, \\ 2, & x \in (a;1], \end{cases} \qquad \boxtimes$$

ПРИМЕР 2. А как представить функцию $f(x)$ в виде разности строго возрастающих функций? Очевидно, достаточно положить $\widetilde{f}_1(x) = f_1(x) + x$, $\widetilde{f}_2(x) = f_2(x) + x$.

ПРИМЕР 3. Представить в виде разности монотонно неубывающих функций функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0;2\pi]$.

□ Снова используем аддитивное свойство вариации, в данном случае — применительно к отрезкам $[0;\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2};2\pi]$, и свойство (1.1) вариации монотонной функции — для отрезков вида $[a_i;x]$, где $a_i = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$. После этого легко видеть, что

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0;\frac{\pi}{2}], \\ 2 - \sin x, & x \in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}], \\ \sin x + 4, & x \in [\frac{\pi}{2};1], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;\frac{\pi}{2}], \\ 2 - 2\sin x, & x \in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}], \\ 4, & x \in [\frac{\pi}{2};1]. \end{cases} \quad \boxtimes$$

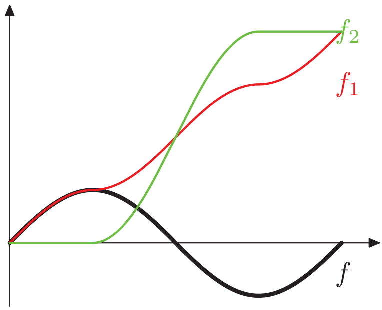

Рис. 1. К примеру 3.

ПРИМЕР 4. В лекции 1 было доказано, что $\forall f, g \in BV[a;b]$ верно неравенство $V_a^b(f+g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g)$. Может ли здесь достигаться равенство?

□ Конечно: рассмотрим постоянные функции. Может ли здесь иметь место строгое неравенство? А в случае непрерывных функций f и g? (См. задачи для самостоятельного решения.) ☒

§ 4. Некоторые критерии

ПРИМЕР 5. Мы знаем, что всякую функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих. Верно ли, что всякая разность двух монотонных функций имеют ограниченную вариацию?

□ Конечно, поскольку всякая монотонная функция имеет ограниченную вариацию, а функции ограниченной вариации образуют линейное пространство. ☒

ПРИМЕР 6. Мы знаем, что для монотонной функции f верно $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. Верно ли, что, обратно, из последнего равенства следует, что функция f монотонна?

□ Да. Докажем это. Пусть для определённости $f(b) - f(a) \geqslant 0$. Тогда имеем (для произвольных $a < x_1 < x_2 < b$)

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)| \leqslant |f(b) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \leqslant \\ \leqslant |f(b) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \leqslant V_a^b(f). \tag{4.1}$$

Поскольку равенство в неравенстве треугольника

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

достигается лишь в том случае, когда выражения под знаком модуля имеют один и тот же знак, то из (4.1) имеем, в частности, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. ☒

ПРИМЕР 7. Оценка. Очевидно, что если $f \in BV[a;b]$, то $\forall [x;y] \subseteq [a;b]$ выполняется $|f(y) - f(x)| \leqslant V_x^y(f) = f_1(y) - f_1(x)$. Обратно, существование такой неубывающей на $[a;b]$ функции $g(x)$, что $\forall [x;y] \subseteq [a;b]$ выполняется $|f(y) - f(x)| \leqslant g(y) - g(x)$, гарантирует, что $f \in BV[a;b]$.

$\square$ В самом деле, для любого разбиения T имеем

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - g(x_{k-1})) = g(b) - g(a) < +\infty,$$

поэтому $V_a^b(f) \equiv \sup_T V_T(f) < +\infty$. $\boxtimes$

ПРИМЕР 8. Замена переменной. Пусть $f(x)$ — функция, заданная на $[a;b]$, $\varphi(x)$ — 1) строго возрастающая 2) непрерывная функция на $[a;b]$, 3) причём $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Доказать, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда функция $g(x) \equiv f(\varphi(x))$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a;b]$, и при этом $V_a^b(f) = V_a^b(g)$.

$\square$ Заметим прежде всего, что область значений $R(\varphi)$ функции $\varphi(x)$ есть отрезок $[a;b]$: в силу монотонности и условия 3) имеем $R(\varphi) \subseteq [a;b]$, а в силу непрерывности $[a;b] \subseteq R(\varphi)$.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение T. Имеем

$$V_T(g) = \sum_{k=1}^{n} |f(\varphi(x_k)) - f(\varphi(x_{k-1}))|. \tag{4.2}$$

Заметим, что точки $(\varphi(x_k))$ образуют некоторое новое разбиение $\varphi(T)$ отрезка $[a;b]$. В самом деле: в силу условия 1) порядок следования точек не нарушается, в силу сказанного в предыдущем абзаце $\varphi(T) \subset [a;b]$, а в силу условия 3) граничные точки переходят в граничные. Поэтому равенство (4.2) можно продолжить:

$$V_T(g) = \sum_{k=1}^{n} |f(\varphi(x_k)) - f(\varphi(x_{k-1}))| = V_{\varphi(T)}(f) \leqslant V_a^b(f),$$

откуда следует, что $V_a^b(g) \leqslant V_a^b(f)$.

Теперь заметим, что в силу условий, наложенных на функцию φ, она имеет обратную, обладающую теми же свойствами. Поэтому мы можем провести аналогичные рассуждения и получить оценку $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(g)$, что и доказывает требуемые утверждения. $\boxtimes$

§ 5. Некоторые контрпримеры

ПРИМЕР 9. Если снять условие непрерывности, то предыдущее утверждение неверно.

□ Идея контрпримера: «обойти» место, где функция f «плохо себя ведёт». Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1), \\ \frac{1}{2-x} - 1, & x \in [1;2), \\ 1, & x \in [2;3], \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1), \\ \frac{1}{2}(x+3), & x \in [1;3], \end{cases}$$

тогда

$$f(\varphi(x)) \equiv 1, \quad x \in [0;3].$$

⊠

ПРИМЕР 10. $BV[a;b] \not\subset C[a;b]$.

□ Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1), \\ 2, & x \in [1;2]. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция имеет ограниченную вариацию (например, как монотонная). ⊠

ПРИМЕР 11. $C[a;b] \not\subset BV[a;b]$.

Например, рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

□ Непрерывность этой функции легко проверяется. Далее, имеем при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$V_0^1(f) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi(k+1/2)} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

если выбрать точки разбиения вида $\frac{1}{\pi n}$, $\frac{1}{\pi(n+1/2)}$. ⊠

Замечание 1. Можно построить примеры, показывающие, что пространство ограниченной вариации не содержит гёльдеровских пространств и не содержится в них.

§ 6. Дальнейшие свойства

ПРИМЕР 12. Очевидно, что всякая липшиц-непрерывная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. В частности, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\sup_{x\in(a;b)}|f'(x)| = C < +\infty$, то $f \in BV[a;b]$. (Доказательство очевидно.)

ПРИМЕР 13. Если $f \in BV[a;b]$, то и $|f| \in BV[a;b]$ и $V_a^b(|f|) \leqslant V_a^b(f)$.

$\square$ Доказательство: следует из легко проверяемого неравенства $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha - \beta|$, верного для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\boxtimes$

ПРИМЕР 14. Легко видеть, что неравенство здесь достигается. В самом деле, возьмём кусочно постоянную функцию, принимающую только значения ± 1, тогда её модуль будет константой.

ПРИМЕР 15. Легко видеть, что из условия $|f| \in BV[a;b]$ не следует, что $f \in BV[a;b]$. Положим, например,

$$f(x) = (-1)^k,\ x \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}; \frac{1}{2^k}\right], k = 0, 1, 2, \ldots, \quad f(0) = 0.$$

ПРИМЕР 16. Если $|f| \in BV[a;b]$ и $f \in C[a;b]$, то $f \in BV[a;b]$ и $V_a^b(|f|) = V_a^b(f)$.

$\square$ Идея доказательства будет понятна, если заметить, что величина

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

не меняется при переходе от функции к её модулю и обратно, если в каждой слагаемом либо $f(x_k)$ и $f(x_{k-1})$ имеют одинаковый знак, либо хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

Рассмотрим некоторое произвольное фиксированное разбиение T отрезка $[a;b]$. Для тех k, для которых $f(x_k)f(x_{k-1}) < 0$, т. е. значения функции в соседних точках разбиения имеют разные знаки, в силу непрерывности функции $f(x)$ найдутся точки $\xi_k \in (x_{k-1}; x_k)$, для которых $f(\xi_k) = 0$. Добавив эти точки к разбиению T, получим разбиение T', обладающее следующими свойствами:
1) $V_{T'}(f) \geqslant V_T(f)$ (см. начало лекции),
2) в соседних точках разбиения T' функция $f(x)$ принимает значения одного знака или нулевые. Тогда для

$$V_{T'}(f) = \sum_{l=1}^{m} |f(y_l) - f(y_{l-1})|$$

получим

$$V_{T'}(f) = \sum_{l=1}^{m} |f(y_l) - f(y_{l-1})| = \sum_{l=1}^{m} ||f(y_l)| - |f(y_{l-1})||,$$

откуда $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(|f|)$. Тем самым, $f \in BV[a;b]$, а тогда из ранее полученного результата (см. пр. 13) получаем требуемое равенство. ☒

§ 7. Пример на исследование функции

ПРИМЕР 17. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$. Исследовать в зависимости от параметров α и β, принадлежит ли функция f пространству $BV[0;1]$.

□ Начнём рассмотрение со случая $\beta = 0$. Очевидно, при $\alpha < 0$ $f \notin BV[0;1]$ (как неограниченная функция, см. свойство 1), а при $\alpha \geqslant 0$ $f \in BV[0;1]$ (как монотонная на отрезке функция).

Теперь перейдём к случаю $\beta > 0$. Пользуясь примером 8, сделаем «замену переменной»: введём функцию $\varphi(x) = x^{\frac{1}{\beta}}$ и заметим, что $f \in BV[0;1]$ тогда и только тогда, когда $g \in BV[0;1]$, где

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{\beta}} \sin x, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

поскольку $g(x) = f(\varphi(x))$, а $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям, наложенным в примере 8.

Положим $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. Если $\gamma < -1$, то функция (7.2) неограничена на $[0;1]$ и поэтому $g \notin BV[a;b]$, а следовательно, и $f \notin BV[a;b]$. Далее, при $\gamma = -1$ получаем функцию

$$g_{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ограниченную на $[0;1]$ и монотонную на $(0;1]$ и поэтому имеющую ограниченную вариацию. Поскольку $g(x) = g_{-1}(x)x^{\gamma+1}$, то при $\gamma \geqslant -1$ имеем $g \in BV[0;1]$ (как произведение двух функций ограниченной вариации, см. свойство 3), а поэтому и $f \in BV[0;1]$. Собирая воедино все случаи, имеем: $f \in BV[a;b]$ тогда и только когда, когда (в данной области изменения параметров) $\alpha + \beta \geqslant 0$. ☒

§ 8. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти $V_0^{50}(e^x)$, $V_1^2(\ln x)$, $V_0^{4\pi}(\cos x)$.

Задача 2. 1) Привести пример двух функций f, g ограниченной вариации, для которых выполняется строгое неравенство $V_a^b(f+g) < V_a^b(f) + V_a^b(g)$.
2) То же, причём функции должны быть непрерывными.

З а д а ч а 3. Пусть $g \in BV[a;b]$, $g(x) \neq 0$ на $[a;b]$. 1) Можно ли утверждать, что $\frac{1}{g} \in BV[a;b]$? 2) Каким требованием нужно заменить условие «$g(x) \neq 0$ на $[a;b]$», чтобы утверждение стало верным?

З а д а ч а 4. Сформулировать и доказать теорему об условиях, достаточных для $\frac{f}{g} \in BV[a;b]$.

З а д а ч а 5. Будет ли функция $g(f(x))$ иметь ограниченную вариацию на $[0;1]$, если f имеет ограниченную вариацию на этом отрезке и $g(t)$ непрерывна на всей числовой оси?

З а д а ч а 6. Доказать, что если $f \in BV[a;b]$ и $f_1(x) \equiv V_a^x(f)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то то же можно сказать о функции $f(x)$.

З а д а ч а 7*. Доказать, что если $f \in BV[a;b]$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то то же можно сказать о функции $f_1(x) \equiv V_a^x(f)$.

З а д а ч а 8. Вывести из предыдущей задачи, что всякая функция $f \in BV[a;b] \cap C[a;b]$ представима в виде разности монотонно неубывающих непрерывных функций.

З а д а ч а 9*. Доказать, что монотонная функция, определённая на отрезке, может иметь только разрывы первого рода и не более чем в счётном количестве.

З а д а ч а 10. Вывести отсюда аналогичный результат для функций ограниченной вариации.

З а д а ч а 11. Пусть $\{x_k\}$ — счётная система точек на отрезке $[a;b]$ ($x_k \neq x_j$ при $k \neq j$). Пусть $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ — такие числа, что

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|) < +\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{(x_k;b]}(x) + \sum_k b_k \chi_{[x_k;b]}(x), \tag{8.1}$$

называемую *функцией скачков*.
1) Доказать, что ряды в (8.1) сходятся абсолютно.
2) Доказать, что функция (8.1) может быть представлена в виде разности монотонных функций.
3) Доказать, что она имеет конечную вариацию.
4*) Доказать, что она непрерывна во всех точках, кроме точек x_k.
5*) Пусть $f \in BV[a;b]$, $\{x_k\}$ —множество точек разрыва функции $f(x)$ (почему оно не более чем счётно?). Положим

$$s_f(x) = \begin{cases} \sum_{k: x_k < x} (f(x_k+0) - f(x_k-0)) + (f(x) - f(x-0)), & x \in (a;b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Доказать, что это корректно определённая функция скачков (В частности, требуется указать, почему односторонние пределы в точках разрыва существуют).

6*) Доказать, что для $f \in BV[a;b]$ и соответствующей функции $s_f(x)$ верно $g \equiv f - s_f \in BV[a;b] \cap C[a;b]$. (Таким образом, мы научились раскладывать всякую функцию ограниченной вариации в сумму непрерывной функции ограниченной вариации и функции скачков.)

Семинар–Лекция 2

ИНТЕГРАЛ РИМАНА—СТИЛТЬЕСА

§ 1. Свойства

Утверждение 1. *Пусть* $f_n \in C[a;b]$, $g \in BV[a;b]$, $f_n \rightrightarrows f$ *на* $[a;b]$. *Тогда* $f \in C[a;b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f_n(x)dg(x) \to \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

□ Действительно, $f \in C[a;b]$ как равномерный предел непрерывных функций; в силу оценки

$$\left|\int\limits_a^b F(x)dg(x)\right| \leqslant \|F\|_{C[a;b]} V_a^b(g) \tag{1.1}$$

и свойств линейности интеграла Лебега—Стилтьеса имеем

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dg(x) - \int\limits_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))dg(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f_n - f\|_{\mathbb{C}[a;b]} V_a^b(g) \to 0. \quad \boxtimes$$

Утверждение 2. *Пусть* $f \in C[a;b]$, $g_n \in BV[a;b]$,

$$V_a^b(g_n - g) \to 0.$$

Тогда $g \in BV[a;b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)dg_n(x) \to \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

□ Заметим: $V_a^b(g) \leqslant V_a^b(g_n) + V_a^b(g - g_n)$. Далее, подобно предыдущему, в силу (1.1) и свойств линейности интеграла верно

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dg_n(x) - \int\limits_a^b f(x)dg(x)\right| =$$
$$= \left|\int\limits_a^b f(x)d(g_n(x) - g(x))\right| \leqslant \|f\|_{\mathbb{C}[a;b]} V_a^b(g_n - g) \to 0. \quad \boxtimes$$

Утверждение 3. *Если $g(x) \equiv C$ на $[a;b]$, то интеграл Римана—Стилтьеса*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) \tag{1.2}$$

существует абсолютно для любой функции $f(x)$.

Этот тривиальный случай, естественно, не интересен. При $g(x) \not\equiv C$ ситуация становится более похожей на интеграл Римана.

Функция Дирихле. Покажем, например, что для $g(x)$, отличной от константы, и $f(x) = D(x)$ (функция Дирихле) интеграл (1.2) при $a \neq b$ не существует.

□ Идея доказательства заключается в следующем. Для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ мы предъявим два таких разбиения с отмеченными точками, что соответствующие интегральные суммы будут различаться не менее чем на некоторое фиксированное число:

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \; \exists T_i \equiv (x_0^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}; \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}),$$

$$\lambda(T_i) < \delta, \; i = 1; 2, \;\; |S_{T_1} - S_{T_2}| \geqslant \varepsilon.$$

Шаг 1. Поскольку $g(x) \not\equiv C$, то существуют $\overline{x} < \overline{\overline{x}} \in [a;b]$ такие, что $g(\overline{x}) \neq g(\overline{\overline{x}})$. Положим $\varepsilon = |g(\overline{x}) - g(\overline{\overline{x}})|$. Выберем при всяком $\delta > 0$ разбиения T_1 и T_2 с $\lambda(T) < \delta$ состоящими из одних и тех же точек $(x_k^{(i)})_{k=0}^n$, среди которых будут точки $x_l = \overline{x}$ и $x_m = \overline{\overline{x}}$ (если в некотором разбиении их нет, можно добавить), а отмеченные точки $(\xi_k^{(i)})_{k=1}^n$ возьмём руководствуясь следующими правилами:
1) $\xi_k^{(1)} = \xi_k^{(2)}$ при $[x_{k-1}; x_k] \not\subset [\overline{x}; \overline{\overline{x}}]$;
2) $\xi_k^{(1)} \in \mathbb{Q}$, $\xi_k^{(2)} \notin \mathbb{Q}$ при $[x_{k-1}; x_k] \subset [\overline{x}; \overline{\overline{x}}]$.

Шаг 2. Тогда будем иметь:

$$|S_{T_1} - S_{T_2}| = \left|\sum_{k=l+1}^{m} 1 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=l+1}^{m} 0 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1}))\right| =$$

$$= |g(\overline{\overline{x}}) - g(\overline{x})| = \varepsilon,$$

что и требовалось. ☒

ПРИМЕР 1. Легко построить функции f, g, не являющиеся ограниченными на $[-1; 1]$, такие, что интеграл Римана—Стилтьеса (1.2) существует. Положим, например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0] \cup \{1\}, \\ \frac{x}{1-x}, & x \in (0; 1), \end{cases} \qquad g(x) = f(-x).$$

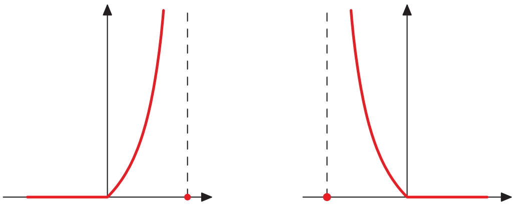

Рис. 2. к примеру 4: функции $f(x)$ и $g(x)$.

Утверждение 4. *Пусть существует интеграл Римана—Стилтьеса* (1.2), *причём функция g разрывна в точке $c \in [a; b]$. Тогда функция f непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

Пункт 1. Предположим противное: пусть $f(x)$ разрывна в точке c. Докажем, что в этом случае (подобно рассмотренному выше случаю функции Дирихле) для сколько угодно малого параметра разбиения найдутся интегральные суммы, отличающиеся не менее чем на константу.

Пункт 2. Рассмотрим сначала случай $c \in (a; b)$. Как будет ясно из дальнейших рассуждений, рассмотрение случая граничной точки отрезка даже проще.

Пункт 3. Итак, по нашему предположению неверно по крайней мере одно из равенств в каждой строке:

$$\begin{aligned} g(c-0) &= g(c), \quad g(c+0) = g(c), \\ f(c-0) &= f(c), \quad f(c+0) = f(c) \end{aligned} \tag{1.3}$$

(невыполнение любого из равенств подразумевает или отсутствие предельного значения, или его отличие от значения соответствующей функции в точке). Могут представиться два случая:

1) среди неверных равенств в (1.3) найдутся два в одном столбце;

2) таковых не найдётся, т. е. неверных равенств всего два и они расположены «по диагонали».

Пункт 4. Рассмотрим первый случай. Пусть для определённости не выполняются равенства правого столбца. Это означает:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \ \forall \delta_1 > 0 \ \exists x(\delta_1) \in (c; c+\delta_1) \ \ |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1, \tag{1.4}$$

$$\exists \varepsilon_2 > 0\ \forall \delta_2 > 0\ \exists x(\delta_2) \in (c; c+\delta_2)\ \ |f(x(\delta_2)) - f(c)| \geqslant \varepsilon_2. \qquad (1.5)$$

Пункт 5. Пусть дано некоторое $\rho > 0$. Выберем сначала точку $\overline{\overline{x}}$ так, чтобы имели место неравенства

$$c < \overline{\overline{x}} < c + \rho, \quad |g(\overline{\overline{x}}) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1. \qquad (1.6)$$

Это возможно в силу (1.4): можно положить $\overline{\overline{x}} = x(\delta_1 = \rho)$. Теперь построим такое разбиение T отрезка $[a; b]$ с параметром разбиения $\lambda(T) < < \rho$, в которое войдут точки c и $\overline{\overline{x}}$, причём они будут соседними (это возможно, поскольку $\overline{\overline{x}} - c < \rho$).

Пункт 6. Пусть в полученном разбиении точки c, $\overline{\overline{x}}$ имеют номера соответственно $l-1$, l. Выберем на отрезках $[x_{i-1}; x_i]$ точки ξ_i, $i = = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots n$. Выберем теперь, пользуясь (1.5), $\xi^{(2)}$ из условий

$$1)\ c < \xi^{(2)} < \overline{\overline{x}}, \quad 2)\ |f(\xi^{(2)}) - f(c)| \geqslant \varepsilon_2 \qquad (1.7)$$

(для этого надо положить в (1.5) $\delta_2 = \overline{\overline{x}} - c$ и взять $\xi^{(2)} = x(\delta_2)$).

Пункт 7. Пусть теперь интегральные суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ определяются одним и тем же разбиением T и следующим выбором точек: $\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(2)} = \xi_i$, $i \neq l$, и $\xi_l^{(1)} = c \in [c; \overline{\overline{x}}] \equiv [x_{l-1}; x_l]$, $\xi_l^{(2)} = \xi^{(2)}$. Тогда получим

$$\left| S^{(1)} - S^{(2)} \right| = |(f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l) - g(x_{l-1}))| \geqslant \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (1.6), (3.4). Поскольку возможность такого построения показана для всякого $\rho > 0$ и при этом константы ε_1, ε_2 от ρ не зависят, для первого случая рассуждение завершено.

Пункт 8. Во втором случае ситуация осложняется тем, что односторонняя непрерывность не позволяет нам одновременно оценить снизу $|g(x) - g(c)|$ и $|f(x) - f(c)|$ ни в одной из полуокрестностей точки c. Однако это мешающее обстоятельство можно обратить в пользу, если из одной полуокрестности «немного шагнуть» в другую: мы приобретём разрыв одной из функций, не сильно ухудшив уже найденную оценку снизу для другой. Проведём теперь это рассуждение более подробно.

Пункт 9. Пусть, для определённости,

$$g(c-0) = g(c), \quad g(c+0) \neq g(c),$$
$$f(c-0) \neq f(c), \quad f(c+0) = f(c).$$

(Напоминаем, что в данном случае знак $\neq$ может обозначать не только неравенство, но и отсутствие предела.) Здесь существенно, что равенство $f(c+0) = f(c)$ влечёт неравенство $f(c-0) \neq f(c)$ (иначе функция $f(x)$ была бы непрерывной в точке c), а последнее — равенство $g(c-0) = g(c)$ (иначе бы ситуация была бы аналогична рассмотренной выше).

Пункт 10. Тогда:

$$\exists\varepsilon_1>0\quad\forall\delta_1>0\quad\exists x(\delta_1)\in(c;c+\delta_1)\quad|g(x(\delta_1))-g(c)|\geqslant\varepsilon_1,\tag{1.8}$$
$$\forall\varepsilon_2>0\quad\exists\delta_2>0\quad\forall x\in(c;c+\delta_2)\quad|f(x)-f(c)|<\varepsilon_2,$$
$$\forall\varepsilon_3>0\quad\exists\delta_3>0\quad\forall x\in(c-\delta_3;c)\quad|g(x)-g(c)|<\varepsilon_3,\tag{1.9}$$
$$\exists\varepsilon_4>0\quad\forall\delta_4>0\quad\exists x(\delta_4)\in(c-\delta_4;c)\quad|f(x(\delta_4))-f(c)|\geqslant\varepsilon_4,\tag{1.10}$$

Пункт 11. Пусть задано $\rho>0$. Выберем теперь:

$$\begin{gathered}\overline{\overline{x}}\text{ из условий }\overline{\overline{x}}\in\left(c;c+\frac{\rho}{2}\right),\ |g(\overline{\overline{x}})-g(c)|\geqslant\varepsilon_1,\\ \overline{x}\text{ из условий }\overline{x}\in\left(c-\frac{\rho}{2};c\right),\ |g(\overline{x})-g(c)|<\frac{\varepsilon_1}{2},\\ \xi^{(2)}\text{ из условий }\xi^{(2)}\in(\overline{x};c)\,,\ |f(\xi^{(2)})-f(c)|\geqslant\varepsilon_4,\end{gathered}\tag{1.11}$$

что возможно соответственно в силу (1.8), (1.9), (1.10).

Пункт 12. Теперь дополним систему $(\overline{x};\overline{\overline{x}})$ (отметим, что $\overline{\overline{x}}-\overline{x}<\rho$) до разбиения T отрезка $[a;b]$ с $\lambda(T)<\rho$ так, чтобы между $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$ не оказалось новых точек. Предположим, $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$ получили соответственно номера $l-1$ и l. Выберем теперь ξ_i, $i\neq l$, произвольным образом и $\xi_l^{(1)}=c$, $\xi_l^{(2)}=\xi^{(2)}$. Пусть $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ — соответствующие интегральные суммы. Поскольку в силу (1.11)

$$|g(\overline{\overline{x}})-g(\overline{x})|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{2},\quad |f(\xi_l^{(1)})-f(\xi_l^{(2)})|\geqslant\varepsilon_4,$$

получаем

$$\left|S^{(1)}-S^{(2)}\right|=|(f(\xi_l^{(1)})-f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l)-g(x_{l-1}))|\geqslant\frac{\varepsilon_1\varepsilon_4}{2},$$

что в силу произвольности $\rho>0$ и независимости от ρ констант ε_1, ε_3 завершает рассуждение для второго случая.

Пункт 13. Легко видеть, что при совпадении точки c с одним из концов отрезка мы всегда будем иметь первый случай.

Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Пусть $a<c<b$, $g(x)=\chi_{[c;b]}(x)$. Тогда интеграл Римана—Стилтьеса* (1.2) *существует в том и только том случае, когда $f(x)$ непрерывна в точке c, и в случае интегрируемости*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x)=f(c).$$

Доказательство.

Пункт 1. Заметим, что необходимость доказана ранее (утверждение 4). Докажем достаточность. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1})) =$$
$$= f(\xi_l)(g(x_l)-g(x_{l-1})) = f(\xi_l), \quad \text{где} \quad x_{l-1} < c \leqslant x_l.$$

Пункт 2. При $\lambda(T)\to 0$ имеем $\xi_l \to c$, что в случае непрерывности функции $f(x)$ в точке c гарантирует $f(\xi_l)\to f(c)$. Это и доказывает как существование рассматриваемого интеграла, так и равенство $\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)$.

Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке c и интеграл* (1.2) *существует. Тогда при $c\in(a;b)$ интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,d\widetilde{g}(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x\neq c,\\ A\neq g(c), & x = c,\end{cases} \tag{1.12}$$

также существует и равен интегралу (1.2).

Доказательство.

Принцип доказательства состоит в том, чтобы убедиться, что разница между соответствующими интегральными суммами стремится к нулю при стремлении к нулю параметра разбиения. Идея же основана на наблюдении, что чем менее меняется функция f, тем слабее интеграл «замечает» конкретные значения функции g. Так,

$$\text{при } f(x)\equiv C = \text{const} \quad \text{имеем} \int_a^b f(x)\,dg(x) = C(g(b)-g(a)). \tag{1.13}$$

Приступим собственно к доказательству.

Пункт 1. Рассмотрим некоторое разбиение T отрезка $[a;b]$. Если $c\notin T$, то интегральная сумма вовсе не поменялась. В противном случае ($x_l = c$) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\widetilde{g}(x_k)-\widetilde{g}(x_{k-1})) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big((g(x_k)-\widetilde{g}(x_k)) - (g(x_{k-1})-\widetilde{g}(x_{k-1}))\big) =$$
$$= (g(x_l)-\widetilde{g}(x_l))(f(\xi_l)-f(\xi_{l+1})). \tag{1.14}$$

Пункт 2. В силу определения непрерывности функции f в точке c

$$\forall\gamma>0\ \exists\delta(\gamma)>0\ \forall\xi\in(c-\delta(\gamma);c+\delta(\gamma))\ \ |f(\xi)-f(c)|<\gamma. \tag{1.15}$$

Пункт 3. Пусть дано произвольное $\varepsilon>0$. Выберем

$$\rho = \delta\left(\gamma = \frac{\varepsilon}{2|g(c)-\widetilde{g}(c)|}\right).$$

Пусть разбиение T удовлетворяет условию $\lambda(T) < \rho$. Тогда

$$|\xi_l - c| < \rho, \quad |\xi_{l+1} - c| < \rho,$$

в силу чего из (1.15) моментально получим, что

$$|f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})| < \frac{\varepsilon}{|g(c) - \widetilde{g}(c)|},$$

откуда в силу (1.11) следует, что интегральные суммы для параметра разбиения меньше выбранного ρ различаются меньше чем на ε.

Пункт 4. Тем самым, интегральные суммы интеграла (1.12) тоже имеют предел и он равен интегралу (1.2).

Утверждение доказано.

Замечание 1. Условие несовпадения точки c с концами отрезка существенно, что очевидно уже из (1.13).

Следствие 1. *Если функция f непрерывна в точке $c \in (a; b)$, а функция g равна нулю всюду на $[a; b]$, кроме точки $c \in (a; b)$, то $\int_a^b f\, dg = 0$.*

Следствие 2. *То же верно для любого конечного числа точек, если f непрерывна в каждой из них (или, скажем, на всём отрезке).*

Чтобы получить дальнейшие следствия утверждения 6, нам потребуется теорема Хелли, которую мы приведём здесь без доказательства.

Теорема 1. *Пусть $f \in C[a, b]$ и последовательность функций $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к функции $g(x)$ в каждой точке отрезка $[a, b]$, причём полные вариации функций $g_n(x)$ ограничены в совокупности:*

$$V_a^b(g_n) \leqslant K < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x).$$

Следствие 3. *Если $f \in C[a; b]$, $g \in BV[a; b]$ и g отлична от нуля лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу $(a; b)$, то $\int_a^b f\, dg = 0$. Это вытекает из теоремы Хелли и предыдущего следствия (поскольку «приближения» к функции g, имеющие конечное число разрывов, имеют вариации, ограниченные в совокупности числом $V_a^b(g)$ — см. задачу 7).*

Следствие 4. *Если $f \in C[a; b]$, $g_1, g_2 \in BV[a; b]$ и эти функции различны лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу $(a; b)$, то $\int_a^b f\, dg_1 = \int_a^b f\, dg_2$.*

Но это означает, что наивная попытка описать $(C[a; b])^*$ как $BV[a; b]$ (используя теорему Рисса) наталкивается на трудности: функция g оказывается не единственной (даже если потребовать $g(a) =$

$= 0$), и различные «представители» совсем не равноправны в том смысле, что они могут иметь различную полную вариацию.

ПРИМЕР 2. Вычислить

$$\int\limits_0^\pi \sin x \, dg(x),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 2, & x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \pi\right\}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right). \end{cases}$$

□ Воспользуемся полученными выше свойствами интеграла Римана—Стилтьеса.

1. В силу утверждения 6 можно переопределить функцию $g(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ её левым пределом $\frac{\pi}{2}$. Далее, в точке $x = \pi$ её тоже можно переопределить левым пределом $\frac{\pi}{2}$, поскольку $f(x)$ непрерывна (слева) в точке π и $f(\pi) = 0$ (см. задачу 3; отметим, что результат п. 7 здесь неприменим!).

2. Обозначим полученную после двух переопределений функцию через $\widetilde{g}(x)$. Имеем теперь

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\pi \sin x \, dg(x) = \int\limits_0^\pi \sin x \, d\widetilde{g}(x) &= \int\limits_0^\pi \sin x \, d\left(x - \frac{\pi}{2}\chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\right) = \\
&= \int\limits_0^\pi \sin x \, d(x) - \frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x \, d\left(\chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\right) = \\
&= \int\limits_0^\pi \sin x \, dx - \frac{\pi}{2}\left(\sin\pi \cdot 1 - \sin\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x) \, d\sin x\right) = \\
&= 2 + \frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x) \cos x \, dx = 2 + \frac{\pi}{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 - \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

где при переходе к третьей строке мы воспользовались сведением к интегралу Римана для непрерывно дифференцируемой функции $g(x) = x$ (см. лекцию 1) и интегрированием по частям, а при переходе к четвёртой — той же теоремой для $g(x) = \sin x$, а затем воспользовались возможностью изменить в одной точке подынтегральную функцию в интеграле Римана. ⊠

П Р И М Е Р 3. Найти (какую-либо) функцию $g \in BV[-1;1]$, для которой при любой $f \in C[-1;1]$ верно равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x) = f(0). \tag{1.16}$$

□ В силу утверждения 5 можно взять, например, $g(x) = \chi_{[0;1]}(x)$. Отметим, что при этом $V_{-1}^{1}(g) = 1$, но функцию $g(x)$ можно переопределить в любой точке интервала $(a;b)$ — при этом равенство (1.10) не нарушится (см. утверждение 6), а её вариация изменится. ☒

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

З а д а ч а 1. Вычислить интегралы Римана—Стилтьеса:
1) $\int_{-\pi}^{\pi}(x+2)\,d\,(e^x\,\mathrm{sgn}(\sin x))$;
2) $\int_{0}^{\pi}(x-1)d(\cos x\,\mathrm{sgn}\,x)$.

З а д а ч а 2. Подробно обосновать существование интеграла (1.2) в примере 1.

З а д а ч а 3. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции $g(x)$ в граничной точке отрезка, которым мы воспользовались при решении примера 2.

З а д а ч а 4. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции $f(x)$ в точке непрерывности функции $g(x)$. Нужно ли при этом требовать, чтобы c не была граничной точкой?

З а д а ч а 5. Доказать свойства (i), (ii), (iii) интеграла Римана—Стилтьеса, сформулированные в лекции 1 (см. с. 18).

З а д а ч а 6*. Показать, что условие равномерной ограниченности вариаций в теореме Хелли существенно.

З а д а ч а 7*. Доказать, что если $g(x)$ отлична от нуля лишь в счётном числе точек $\{y_s\}_{s=1}^{\infty} \subset (a;b)$, а

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{y_s\}_{s=n+1}^{\infty}, \\ g(x) & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

то $V_a^b(g_n) \leqslant V_a^b(g)$.

Л е к ц и я 2

ПРОСТРАНСТВА AC И ГЁЛЬДЕРА

§ 1. Определение пространства абсолютно непрерывных функций

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что функция f абсолютно непрерывна* (*обозначение:* $f \in AC[a,b]$), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любой системы непересекающихся интервалов* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ *из отрезка* $[a,b]$ *таких, что*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k - a_k) < \delta, \text{ [1]}$$

вытекает неравенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Заметим, что *множество $AC[a,b]$ является линейным пространством*.

□ Действительно, возьмём произвольные функции $f_1, f_2 \in AC[a,b]$ и произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$. Тогда для функции $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ верно неравенство:

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \alpha_1 |f_1(b_k) - f_1(a_k)| + \alpha_2 |f_2(b_k) - f_2(a_k)|,$$

откуда сразу же получаем неравенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \alpha_1 \sum_{k=1}^{+\infty}|f_1(b_k) - f_1(a_k)| + \alpha_2 \sum_{k=1}^{+\infty}|f_2(b_k) - f_2(a_k)|.$$

Из этого неравенства и вытекает, что $AC[a,b]$ — линейное пространство. ☒

---

[1]) Этот ряд сходится, поскольку $0 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N}(b_k - a_k) \leqslant b - a$.

Можно дать эквивалентное определение множества абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f \in AC[a, b]$, *если найдётся функция* $g \in L^1(a, b)$ *и такая постоянная* $c \in \mathbb{R}^1$, *что имеет место представление*:

$$f(x) = c + \int_a^x g(y)\, dy. \tag{1.1}$$

Вопрос. Первый вопрос, который возникает: как связаны пространства $AC[a, b]$ и $BV[a, b]$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Имеет место вложение* $AC[a, b] \subset BV[a, b]$.

Доказательство.

Пусть T — это произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда в силу определения 2 абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(y)|\, dy \leqslant \int_a^b |g(y)|\, dy < +\infty.$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная *теорема Лебега о дифференцировании* абсолютно непрерывной функции:

Теорема 2. *Классическая производная* f' *функции* $f \in AC[a, b]$ *существует почти всюду на отрезке* $[a, b]$, *причём* $f' \in L^1(a, b)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведём в несколько шагов. Для удобства мы будем использовать следующее обозначение:

$$\int\limits_{|x, x+h|} g(y)\, dy = \begin{cases} \int_x^{x+h} g(y)\, dy, & \text{если} \quad h > 0; \\ \int_{x+h}^{x} g(y)\, dy, & \text{если} \quad h < 0. \end{cases}$$

Шаг 1. В силу определения 2 имеет место следующее равенство:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{|h|} \int\limits_{|x, x+h|} g(y)\, dy, \quad x \in (a, b), \quad x + h \in (a, b). \tag{1.2}$$

Если мы докажем, что для почти всех $x \in (a, b)$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{|h|}\int\limits_{|x,x+h|} g(y)\,dy - g(x)\right| = 0, \tag{1.3}$$

то мы получим, что почти всюду существует классическая производная $f' = g \in L^1(a, b)$.

Шаг 2. Отметим, что в частном случае, когда $g \in C[a, b]$, предельное свойство (1.3) имеет место для всех $x \in (a, b)$. Действительно,

$$\left|\frac{1}{|h|}\int\limits_{|x,x+h|} g(y)\,dy - g(x)\right| = \left|\frac{1}{|h|}\int\limits_{|x,x+h|} [g(y) - g(x)]\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|}\int\limits_{|x,x+h|} |g(y) - g(x)|\,dy =: I(x, h). \tag{1.4}$$

Поскольку $g \in C[a, b]$, то для всякого фиксированного $x \in (a, b)$ верно

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon(x, h) \to +0 \quad \text{при} \quad |y - x| \leqslant |h| \to +0.$$

Поэтому для $I(h)$ имеет место оценка:

$$I(x, h) \leqslant \varepsilon(x, h)\frac{1}{|h|}\int\limits_{|x,x+h|} dy = \varepsilon(x, h) \to +0 \quad \text{при} \quad |h| \to +0.$$

Шаг 3. Имеет место (см. [12]) плотное вложение

$$C[a, b] \overset{ds}{\subset} L^1(a, b)$$

по норме

$$\|g\|_1 \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b |g(x)|\,dx$$

банахова пространства $L^1(a, b)$. Следовательно, существует такая последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C[a, b]$, что

$$\|g(x) - \varphi_n(x)\|_1 < \frac{1}{n^4} \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Пусть

$$\psi_n(x) := |g(x) - \varphi_n(x)|\,, \quad \Psi_n(x) := \int\limits_a^x |g(y) - \varphi_n(y)|\,dy \tag{1.6}$$

при $n \in \mathbb{N}$. Целесообразность рассмотрения функций $\psi_n(x)$ и $\Psi_n(x)$ вызвана следующим соображением. Справедливо равенство:

$$\frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} g(y)\,dy - g(x) =$$
$$= \frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} (g(y) - \varphi_n(y))\,dy + \varphi_n(x) - g(x) +$$
$$+ \frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} (\varphi_n(y) - \varphi_n(x))\,dy. \quad (1.7)$$

Из равенства (1.7) вытекает следующее неравенство:

$$\left| \frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} g(y)\,dy - g(x) \right| \leqslant \left| \frac{\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)}{h} \right| + \psi_n(x) +$$
$$+ \left| \frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} (\varphi_n(y) - \varphi_n(x))\,dy \right|. \quad (1.8)$$

Отметим, что, как нами было доказано на шаге 2, последнее слагаемое в неравенстве (1.8) для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ может быть сделано сколь угодно малым при достаточно малом $|h| < \delta$. Наша задача заключается в исследовании первых двух слагаемых в (1.8).

Шаг 4. Рассмотрим следующие множества точек интервала (a, b):

$$A_n \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \in (a,b) :\ \limsup_{h \to 0} \left| \frac{\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)}{h} \right| > \frac{1}{n^2} \right\}, \quad (1.9)$$

$$B_n \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \in (a,b) :\ \psi_n(x) > \frac{1}{n^2} \right\}. \quad (1.10)$$

Напомним теорему о неравенстве Чебышёва.

Неравенство Чебышёва. *Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ — суммируемая на A функция, $c > 0$ — произвольное положительное число. Тогда*

$$\mu\{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_A \varphi(x)\,d\mu.$$

Из неравенства Чебышёва и неравенства (1.5) сразу же вытекает цепочка неравенств:

$$\mu(B_n) \leqslant \frac{1}{1/n^2} \int\limits_a^b \psi_n(y)\,dy < \frac{1}{1/n^2} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^2}. \quad (1.11)$$

К сожалению, аналогичного рода оценка для меры $\mu(A_n)$ множества A_n может быть получена только довольно трудоёмким способом [1]. Эта оценка имеет следующий вид:

$$\mu(A_n) \leqslant \frac{4}{n^2}. \tag{1.12}$$

Введём множество:

$$Q \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_i \cup B_i)\,. \tag{1.13}$$

Для каждого $k > 1$ получим цепочку неравенств:

$$\mu(Q) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty}(A_i \cup B_i)\right) \leqslant \sum_{i=k}^{\infty}(\mu(A_i) + \mu(B_i)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \frac{5}{i^2} \leqslant \frac{5}{k-1} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{1.14}$$

Следовательно, $\mu(Q) = 0$.

Шаг 5. Пусть теперь $x \in E$, где

$$E \overset{\text{def}}{=} (a, b)\backslash Q. \tag{1.15}$$

Отметим, что

$$x \notin Q \Rightarrow x \notin \bigcup_{i=k}^{\infty}(A_i \cup B_i)$$

для некоторого $k = k(x) \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$x \notin A_n \cup B_n \quad \text{для всех} \quad n \geqslant k(x). \tag{1.16}$$

Таким образом, в силу определения множеств A_n и B_n приходим к выводу, что одновременно имеют место неравенства

$$\psi_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \limsup_{h\to 0}\left|\frac{\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)}{h}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}. \tag{1.17}$$

Теперь мы можем получить искомый результат в терминах «ε–δ».

Пусть $x \in E$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$ и такое $k = k(x) \in \mathbb{N}$, что для всякого фиксированного

$$n > \max\left(k(x), \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad \text{и} \quad |h| < \delta$$

[1] Для интересующегося читателя мы привели доказательство этого факта в конце первой дополнительной лекции. Смотри неравенство (1.3) первой дополнительной лекции.

выполнены следующие неравенства:

$$\psi_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \left|\frac{\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)}{h}\right| \leqslant \frac{2}{n^2}, \tag{1.18}$$

$$\left|\frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} (\varphi_n(y) - \varphi_n(x))\, dy\right| < \varepsilon. \tag{1.19}$$

Из неравенств (1.18), (1.19) и (1.8) с учётом неравенства $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ вытекает искомая оценка:

$$\left|\frac{1}{|h|} \int\limits_{|x,x+h|} g(y)\, dy - g(x)\right| \leqslant \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \varepsilon < 4\varepsilon. \tag{1.20}$$

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему об интегрировании по частям.

Теорема 3. *Для любых функций $f_1, f_2 \in AC[a,b]$ справедлива формула интегрирования по частям*:

$$\int\limits_a^b f_1(x) f_2'(x)\, dx = f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a) - \int\limits_a^b f_1'(x) f_2(x)\, dx. \tag{1.21}$$

Доказательство.

Шаг 1. В теореме 2 мы доказали, что функция $f \in AC[a,b]$ почти всюду имеет классическую производную $f' \in L^1(a,b)$.

Шаг 2. Докажем, что произведение двух абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций является абсолютно непрерывной на отрезке $[a,b]$ функцией.

☐ Действительно, в силу теоремы 1 имеем $f_1, f_2 \in AC[a,b] \subset \subset BV[a,b]$. Кроме того, $BV[a,b] \subset B[a,b]$ [1]. Введём обозначения:

$$c_1 := \sup_{x\in[a,b]} |f_1(x)|, \quad c_2 := \sup_{x\in[a,b]} |f_2(x)|.$$

Тогда согласно определению абсолютно непрерывных функций для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k) < \delta,$$

[1] Символом $B[a,b]$ мы обозначили линейное пространство ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций.

если интервалы системы $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ попарно не пересекаются, вытекают неравенства:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2c_2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2c_1}.$$

Теперь заметим, что имеет место цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k)f_2(b_k) - f_1(a_k)f_2(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)|\,|f_2(b_k)| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)|\,|f_1(a_k)| \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| +$$
$$+ c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Стало быть, имеем $(f_1 f_2)' \in L^1(a, b)$ и в силу определения 2, в котором нужно положить $g(x) = (f_1(x)f_2(x))'$, получим равенство:

$$f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a) = \int_a^b (f_1(x)f_2(x))'\,dx.$$

Для окончания доказательства достаточно заметить, что почти всюду имеет место равенство:

$$(f_1(x)f_2(x))' = f_1(x)f_2'(x) + f_1'(x)f_2(x).$$

Теорема доказана.

Теперь введём на линейном пространстве $AC[a, b]$ норму

$$\|u\|_{ac} \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{L^1} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^1} \tag{1.22}$$

(тот факт, что это действительно норма, рекомендуется проверить самостоятельно!).

Приведём без доказательства основное утверждение этого параграфа.

Теорема 4. *Линейное пространство $AC[a, b]$ является банаховым относительно нормы* (1.22).

§ 2. Определение пространства Гёльдера $C^{k+\delta}(\Omega)$

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^N$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$$

— мультииндекс с целыми неотрицательными координатами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$$

— длина мультииндекса,

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N} \tag{2.1}$$

— композиция операторов частных производных, соответствующая мультииндексу

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N), \quad x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega, \quad \delta \in (0, 1].$$

Отметим, что число $|\alpha|$ будет порядком производной (2.1).

Определение 3. *Посредством $C^k(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций* [1], *имеющих все частные производные $\partial^\alpha f$ до порядка $|\alpha| \leqslant k$, которые непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Справедлива следующая:

Теорема 5. *Линейное пространство $C^k(\overline{\Omega})$ является банаховым относительно нормы*

$$\|f\|_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{2.2}$$

Определение 4. *Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\delta \in (0, 1]$, если конечна следующая полунорма*:

$$[f]_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x, y \in \overline{\Omega},\, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\delta}. \tag{2.3}$$

Дадим определение пространства $C^{k+\delta}(\overline{\Omega})$.

Определение 5. *Определим пространство $C^{k+\delta}(\overline{\Omega})$ как подпространство пространства $C^k(\overline{\Omega})$, состоящее из таких функций f, что $\partial^\alpha f$ удовлетворяет условию Гёльдера* (2.3) *для всех мультииндексов α длины k: $|\alpha| = k$.*

---

[1] Здесь и далее мы используем слово «пространство», когда определяемое множество является линейным пространством функций со стандартными операциями сложения и умножения на число.

Теперь введём норму на линейном пространстве $C^{k+\delta}(\overline{\Omega})$ (проверьте линейность этого пространства!):

$$\|f\|_{k,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=k} [\partial^\alpha f]_\delta\,. \tag{2.4}$$

Теорема 6. *Линейное пространство $C^{k+\delta}(\overline{\Omega})$ является банаховым относительно нормы* (2.4).

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\{f_n\} \subset C^{k+\delta}(\overline{\Omega})$ — фундаментальная последовательность относительно нормы (2.4). Поскольку в (2.4) содержится слагаемое, совпадающее с (2.2), то последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна также относительно нормы (2.2). А поскольку пространство $C^k(\overline{\Omega})$ банахово, имеем:

$$\partial^\alpha f_n(x) \rightrightarrows \partial^\alpha f(x) \quad \text{равномерно по} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для всех мультииндексов α длины $|\alpha| \leqslant k$.

Шаг 2. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m \geqslant n_0$ имеет место неравенство:

$$[\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m]_\delta \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех мультииндексов} \quad |\alpha| = k. \tag{2.5}$$

Отсюда вытекает неравенство:

$$\bigl|\bigl(\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f_m(x)\bigr) - \bigl(\partial^\alpha f_n(y) - \partial^\alpha f_m(y)\bigr)\bigr| \leqslant \\ \leqslant |x-y|^\delta [\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m]_\delta \leqslant \varepsilon |x-y|^\delta.$$

Перейдём в получившемся неравенстве к поточечному пределу при $m \to +\infty$ и получим неравенство:

$$|[\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)] - [\partial^\alpha f_n(y) - \partial^\alpha f(y)]| \leqslant \varepsilon |x-y|^\delta,$$

из которого сразу же получим

$$[\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f]_\delta \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, во-первых, в силу неравенства треугольника вытекает неравенство:

$$[\partial^\alpha f]_\delta \leqslant [\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f]_\delta + [\partial^\alpha f_n]_\delta,$$

которое означает, что $f(x) \in C^{k+\delta}(\overline{\Omega})$, а во-вторых, мы получаем, что

$$f_n \to f \quad \text{сильно в} \quad C^{k+\delta}(\overline{\Omega}).$$

Теорема доказана.

Лемма 1. *Справедливо следующее неравенство* (*называемое интерполяционным*):

$$[f]_\delta \leqslant [f]_{\delta_1}^{1-\nu}[f]_{\delta_2}^{\nu}, \tag{2.6}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$

Доказательство.

Справедливо следующее соотношение:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta} = \frac{|f(x)-f(y)|^{1-\nu}}{|x-y|^{(1-\nu)\delta_1}}\frac{|f(x)-f(y)|^{\nu}}{|x-y|^{\nu\delta_2}} \leqslant [f]_{\delta_1}^{1-\nu}[f]_{\delta_2}^{\nu},$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Взяв supremum по $x, y \in \Omega$ от обеих частей указанного соотношения, получим требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема вложения.

Теорема 7. *Имеет место непрерывное вложение банаховых пространств*:

$$C^{k,\delta_1}(\overline{\Omega}) \cap C^{k,\delta_2}(\overline{\Omega}) \subset C^{k+\delta}(\overline{\Omega}), \tag{2.7}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Доказательство.

Утверждение теоремы вытекает из следующей цепочки несложных рассуждений с учётом определения нормы в пересечении банаховых пространств: $\|f\|_{X\cap Y} = \|f\|_X + \|f\|_Y$. Пусть

$$f \in C^{k,\delta_1}(\overline{\Omega}) \cap C^{k,\delta_2}(\overline{\Omega}),$$

тогда, во-первых, $f \in C^k(\overline{\Omega})$, а во-вторых, для каждого мультииндекса α длины $|\alpha| = k$ имеем:

$$[\partial^\alpha f]_{\delta_1} \leqslant c_1 < +\infty, \quad [\partial^\alpha f]_{\delta_2} \leqslant c_2 < +\infty,$$

поэтому в силу интерполяционного неравенства (2.6) получаем

$$[\partial^\alpha f]_{\delta} \leqslant c_3 < +\infty.$$

Отсюда приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 3. Параболические пространства Гёльдера

Пусть D — это область пространства $\mathbb{R}^{N+1}$. Точки этого пространства будем записывать как $z = (x, t)$, где $t \in \mathbb{R}^1$ и $x \in \mathbb{R}^N$. Введём параболическое расстояние между различными точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ по формуле

$$\rho(z_1, z_2) \overset{\text{def}}{=} |t_1 - t_2|^{1/2} + |x_1 - x_2|. \,^{1)}$$

Дадим следующее определение.

Определение 6. *Назовём параболическим пространством Гёльдера множество всех функций, для которых конечна следующая величина*:

$$[f]_{\delta/2,\delta} \overset{\text{def}}{=} \sup_{z_1, z_2 \in \overline{D},\, z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)} \tag{3.1}$$

при некотором $\delta \in (0, 1]$.

Определение 7. *Посредством* $C^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$ *мы обозначаем класс непрерывных на* D *функций, которые один раз непрерывно дифференцируемы по* t *и по* x_i *и два раза непрерывно дифференцируемы по* x_i, x_j *в области* D *для всех* $i, j = \overline{1, N}$, *причем все производные допускают непрерывное продолжение вплоть до замыкания* $\overline{D}$.

Введём на линейном пространстве $C^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$ норму по формуле

$$\|f\|_{2,1} \overset{\text{def}}{=} \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f_t(x,t)| + \\ + \sum_{i=1}^{N} \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f_{x_i}(x,t)| + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f_{x_i x_j}(x,t)|. \tag{3.2}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Линейное пространство* $C^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ *является банаховым относительно нормы* (3.2).

На практике необходимость введения параболических пространств Гёльдера обусловлена рассмотрением линейных и квазилинейных параболических уравнений. В связи с этим необходимо рассматривать следующий класс функций — $C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$. Дадим определение.

Определение 8. *Линейное пространство* $C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ *определяется как линейное подпространство линейного пространства* $C^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$ *таких функций* f, *что соответствующие частные производные* f_t *и* $f_{x_i x_j}$ *принадлежат параболическому классу Гёльдера с соответствующим* $\delta \in (0, 1]$ *для всех* $i, j = \overline{1, N}$.

[1]) Проверьте самостоятельно, что это действительно расстояние!

Теперь введём на линейном пространстве $C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ норму следующим образом:

$$|f|_{2+\delta,1+\delta/2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f_t(x,t)| + \\ + \sum_{i=1}^{N} \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f_{x_i}(x,t)| + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \sup_{(x,t)\in\overline{D}} |f_{x_ix_j}(x,t)| + \\ + [f_t]_{\delta,\delta/2} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left[f_{x_ix_j}\right]_{\delta,\delta/2}. \quad (3.3)$$

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 9. *Линейное пространство* $C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ *является банаховым относительно нормы* (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Пусть $\{f_n\} \in C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ — фундаментальная последовательность относительно нормы (3.3). Тогда она является фундаментальной последовательностью банахова пространства $C^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$ относительно нормы (3.2). Значит, она сходится сильно в $C^{(2,1)}_{x,t}(\overline{D})$. В частности, имеем:

$$f_{nt}(x,t) \rightrightarrows f_t(x,t) \quad \text{равномерно по} \quad (x,t)\in\overline{D},$$
$$f_{nx_ix_i}(x,t) \rightrightarrows f_{x_ix_i}(x,t) \quad \text{равномерно по} \quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Шаг 2. Поскольку f_{nt} и $f_{nx_ix_i}$ принадлежат параболическому пространству Гёльдера, то в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant n_0$ имеют место оценки:

$$[f_{nt} - f_{mt}]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon, \quad (3.4)$$

$$[f_{nx_ix_i} - f_{mx_ix_i}]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon. \quad (3.5)$$

Стало быть, верны неравенства:

$$|[f_{nt}(z_1) - f_{mt}(z_1)] - [f_{nt}(z_2) - f_{mt}(z_2)]| \leqslant \\ \leqslant \rho^\delta(z_1,z_2)\,[f_{nt} - f_{mt}]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon\rho^\delta(z_1,z_2), \quad (3.6)$$

$$|[f_{nx_ix_i}(z_1) - f_{mx_ix_i}(z_1)] - [f_{nx_ix_i}(z_2) - f_{mx_ix_i}(z_2)]| \leqslant \\ \leqslant \rho^\delta(z_1,z_2)\,[f_{nx_ix_i} - f_{mx_ix_i}]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon\rho^\delta(z_1,z_2). \quad (3.7)$$

Теперь перейдём к поточечным пределам в неравенствах (3.6) и (3.7) при $m \to +\infty$. Затем разделим обе части получившихся предельных неравенств на

$$\rho^\delta(z_1,z_2)$$

и перейдём к supremum от обеих частей неравенств по всем $z_1, z_2 \in D$ и $z_1 \neq z_2$.

Шаг 3. В результате получим неравенства:

$$[f_{nt} - f_t]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon,$$
$$[f_{nx_ix_i} - f_{x_ix_i}]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon.$$

Из них, во-первых, в силу неравенства треугольника получим:

$$[f_t]_{\delta,\delta/2} \leqslant [f_{nt} - f_t]_{\delta,\delta/2} + [f_{nt}]_{\delta,\delta/2}\,,$$

$$[f_{x_ix_i}]_{\delta,\delta/2} \leqslant [f_{nx_ix_i} - f_{x_ix_i}]_{\delta,\delta/2} + [f_{nx_ix_i}]_{\delta,\delta/2}\,,$$

откуда вытекает, что предельная функция $f(t,x)$ принадлежит пространству $C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$. А во-вторых, получим, что

$$f_n \to f \quad \text{сильно в} \quad C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D}).$$

Теорема доказана.

Лемма 2. *Справедливо следующее неравенство*:

$$[f]_{\delta,\delta/2} \leqslant [f]^{1-\nu}_{\delta_1,\delta_1/2}[f]^{\nu}_{\delta_2,\delta_2/2}, \tag{3.8}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$

Доказательство.

Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\rho^{\delta}(z_1,z_2)} = \\ = \frac{|f(z_1) - f(z_2)|^{1-\nu}}{\rho^{(1-\nu)\delta_1}(z_1,z_2)} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|^{\nu}}{\rho^{\nu\delta_2}(z_1,z_2)} \leqslant M[f]^{1-\nu}_{\delta_1,\delta_1/2}[f]^{\nu}_{\delta_2,\delta_2/2},$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Взяв supremum по $z_1, z_2 \in D$ от обеих частей указанного соотношения получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема об интерполяции, которая доказывается аналогично теореме 7.

Теорема 10. *Имеет место следующее непрерывное вложение*:

$$C^{2+\delta_1,1+\delta_1/2,}(\overline{D}) \cap C^{2+\delta_2,1+\delta_2/2,}(\overline{D}) \subset C^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D}), \tag{3.9}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$

Семинар–Лекция 3

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определения и свойства

Напомним определение, данное на лекции.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой счётной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ из отрезка $[a;b]$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

В технических целях удобнее использовать несколько другое определение абсолютной непрерывности, а именно

Определение $1'$. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ из отрезка $[a;b]$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta_1, \tag{1.2}$$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Докажем *эквивалентность этих двух определений.*

Доказательство.

1) О 1 $\Rightarrow$ О 1$'$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1(\varepsilon) = \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда если $\mathcal{I} \equiv \{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная конечная система непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta_1(\varepsilon)$, то множество $(a; b) \setminus \sqcup_{k=1}^{n}(a_k; b_k)$ заведомо содержит некоторый интервал, а следовательно, систему $\mathcal{I}$ можно достроить до счётной системы непересекающихся интервалов с суммой длин меньше $\delta(\varepsilon)$, вложенных в отрезок $[a; b]$. Для достроенной системы будет верно (1.1), а значит, для исходной — и подавно верно (1.3).

2) О 1$'$ $\Rightarrow$ О 1. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\frac{\varepsilon}{2})$. Тогда если $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная счётная система непересекающихся интервалов с суммой длин, меньшей $\delta(\varepsilon)$, то для любой её конечной подсистемы (которая, конечно, тоже будет непересекающейся) будет верно неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда в силу свойств рядов с положительными членами получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

что и требовалось.

Утверждение доказано.

ПРИМЕР 1. Пусть $g \in L^1(a; b)$, тогда функция

$$f(x) = c + \int_a^x g(y)\, dy$$

является абсолютно непрерывной в смысле определения 1.

□ Действительно, если $g \in L^1(a; b)$, то функция $|g(x)|$ интегрируема на $[a; b]$ по Лебегу. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого измеримого множества $A \subset [a; b]$ из $\mu(A) < \delta(\varepsilon)$ следует

$$\int_A |g(y)|\, dy < \varepsilon.$$

Но тогда если $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — система непересекающихся интервалов из отрезка $[a; b]$ с суммарной длиной меньше $\delta(\varepsilon)$, то получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_a^{b_k} g(y)\, dy - \int_a^{a_k} g(y)\, dy \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{a_k}^{b_k} g(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} |g(y)|\, dy = \int\limits_{\sqcup_{k=1}^{\infty}(a_k; b_k)} |g(y)|\, dy < \varepsilon,$$

поскольку в силу счётной аддитивности меры Лебега $\mu\left(\sqcup_{k=1}^{\infty}(a_k; b_k)\right) < < \delta(\varepsilon)$. ☒

Заметим, что тем самым мы доказали, что из определения 2 (см. лекцию 2) следует определение 1.

П Р И М Е Р 2. Всякая абсолютно непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция непрерывна на нём.

Очевидно: положив в (1.2), (1.3) $n = 1$, получим определение равномерной непрерывности на отрезке $[a; b]$.

П Р И М Е Р 3. Если $f \in AC[a, b]$, то $|f| \in AC[a, b]$.

□ Как следует из оценки $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha - \beta|$, применённой к значениям функции $f(x)$ на концах каждого интервала, функция $|f(x)|$ будет удовлетворять определению 1 с тем же самым $\delta(\varepsilon)$, которое подходит для $f(x)$. (Ср. пример 13 семинара-лекции 1.) ☒

Очевидно, обратное в общем случае неверно: достаточно взять любую разрывную на отрезке $[a; b]$ функцию, принимающую на нём значения -1 и 1. Тогда её модуль будет константой (абсолютно непрерывная функция), а сама она не будет абсолютно непрерывной (см. пример 2).

П Р И М Е Р 4. Пусть $f \in C[a; b]$, $|f| \in AC[a; b]$. Тогда $f \in AC[a; b]$.

□ Идея доказательства сходна с использованной в примере 16 семинара-лекции 1. Воспользуемся определением $1'$.

1. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1(\varepsilon)$ из определения $1'$ для функции $|f|$ и докажем, что функция f будет удовлетворять определению $1'$ с тем же $\delta_1(\varepsilon)$.

2. Пусть $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ — произвольная система непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[a; b]$, с суммарной длиной меньше $\delta_1(\varepsilon)$. Пусть для этой системы

$$K = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid f(a_k) f(b_k) < 0\}.$$

3. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ для всех $k \in K$ существуют $\xi_k \in (a_k; b_k)$ такие, что $f(\xi_k) = 0$. Разбив интервалы $(a_k; b_k)$, $k \in K$, точками ξ_k на интервалы $(a_k; \xi_k)$, $(\xi_k; b_k)$, получим новую конечную систему непересекающихся интервалов с прежней суммой длин. Таким образом, эта новая система будет удовлетворять условию (1.2), поэтому будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1,\, k \notin K}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k \in K} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1,\, k \notin K}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k \in K} \big(|f(b_k) - f(\xi_k)| + |f(\xi_k) - f(a_k)|\big) =$$

$$= \sum_{k=1,\, k \notin K}^{n} \big||f(b_k)| - |f(a_k)|\big| +$$

$$+\sum_{k\in K}\Big(\big||f(b_k)|-|f(\xi_k)|\big|+\big||f(\xi_k)|-|f(a_k)|\big|\Big)<\varepsilon.$$

4. Поскольку были выбраны произвольное $\varepsilon>0$ и произвольная система интервалов с суммой длин, меньшей $\delta_1(\varepsilon)$, то утверждение доказано. ⊠

П Р И М Е Р 5. В лекции 2 из определения 2 было выведено, что всякая абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. В качестве упражнения на понятие вариации дадим непосредственное доказательство с опорой на определение $1'$ (заметим, что его эквивалентность определению 1 уже доказана).

□

1. Положим $\varepsilon=1$. Выберем (в смысле определения $1'$) $\delta=\delta_1(\varepsilon)$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на конечное число N отрезков $[y_{l-1};y_l]$ длины меньше δ.

2. Заметим, что любое разбиение $y_{l-1}=a_0^{(l)}<a_1^{(l)}<\ldots<a_{n_l}^{(l)}=$ $=y_l$ отрезка $[y_{l-1};y_l]$ на отрезки автоматически порождает семейство *непересекающихся* интервалов $\{(a^l_{(k-1)};a_k^{(l)})\}_{k=1}^{n_l}$ *суммарной длины меньше* δ. Поэтому благодаря выбору δ в силу определения $1'$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n_l}\left|f(a_k^{(l)})-f(a_{k-1}^{(l)})\right|<\varepsilon=1,$$

откуда $V_{y_{l-1}}^{y_l}(f)\leqslant 1$, и в силу аддитивности полной вариации $V_a^b(f)=$ $=\sum_{l=1}^N V_{y_{l-1}}^{y_l}(f)\leqslant N\varepsilon=N$. ⊠

З а м е ч а н и е 1. Важно, что из одной только непрерывности (даже равномерной) абсолютная непрерывность не следует, как показывает пример функции $f(x)=x\sin(1/x)$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$, непрерывной (и поэтому равномерно непрерывной в силу теоремы Кантора) на отрезке $[0;1]$. Указанная функция даже не является функцией ограниченной вариацией (см. пример 11 семинара-лекции 1), а следовательно, не может быть абсолютно непрерывной.

П Р И М Е Р 6. В лекции 2 и в предыдущем примере было доказано, что $AC[a,b]\subset BV[a;b]$. Покажем теперь, что $BV[a;b]\cap C[a;b]\not\subset$ $\subset AC[a,b]$. Это будет центральной частью данной лекции.

□ Для доказательства построим так называемую лестницу Кантора (иногда она также называется просто функцией Кантора). Нам потребуется развить идею, использованную при построении множества Кантора (см. лекцию 5 части 1 тома 1 настоящего курса).

1. Прежде всего опишем построение функции $\overline{f}(x)$, на основе которой мы затем построим функцию Кантора $f(x)$. Рассмотрим отрезок $[0;1]$ и положим $\overline{f}(0)=0$, $\overline{f}(1)=1$.

2. Разобьём имеющийся отрезок на 3 равных отрезка точками $\frac13$, $\frac23$. Положим

$$\overline{f}\left(\frac13\right)=\overline{f}\left(\frac23\right):=\frac12\left(\overline{f}(0)+\overline{f}(1)\right)=\frac12.$$

Выбросим из отрезка $[0;1]$ интервал $I_1^{(1)} \equiv \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, после чего у нас останется 2 отрезка

$$\left[0;\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3};1\right].$$

3. Разобьём каждый из оставшихся отрезков $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3};1\right]$ на 3 равных отрезка соответственно точками $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ и $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$. Положим

$$\overline{f}\left(\frac{1}{9}\right) = \overline{f}\left(\frac{2}{9}\right) := \frac{1}{2}\left(\overline{f}(0) + \overline{f}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{4},$$
$$\overline{f}\left(\frac{7}{9}\right) = \overline{f}\left(\frac{8}{9}\right) := \frac{1}{2}\left(\overline{f}\left(\frac{2}{3}\right) + \overline{f}(1)\right) = \frac{3}{4}.$$

4. Снова выбросим из оставшихся отрезков средние трети $I_2^{(1)}$ и $I_2^{(2)}$, после чего у нас останется 4 отрезка

$$\left[0;\frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9};1\right].$$

5. Итак, перед каждым k-м шагом у нас будет иметься 2^{k-1} отрезков длины $\frac{1}{3^{k-1}}$. Координаты их начал будут иметь троичную запись вида

$$0{,}c_1c_2\ldots c_{k-1}, \tag{1.4}$$

где каждое из чисел c_i, $i=\overline{1,k-1}$, равно 0 или 2. При этом значения функции на левом и правом концах l-го по счёту слева отрезка ($l = 1,\ldots 2^{k-1}$) будут равны соответственно

$$\frac{l-1}{2^{k-1}}, \frac{l}{2^{k-1}}. \tag{1.5}$$

6. На k-м шаге для каждого имеющегося l-го отрезка мы выбираем точки $x_{kl}^{(1)}$, $x_{kl}^{(2)}$, делящие этот отрезок на 3 равные части, и полагаем

$$f\left(x_{kl}^{(1)}\right) = f\left(x_{kl}^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{l-1}{2^{k-1}} + \frac{l}{2^{k-1}}\right) = \frac{2l-1}{2^k}. \tag{1.6}$$

После этого выбрасываем из каждого l-го отрезка интервалы $I_k^{(l)}$, ограниченные точками $x_{kl}^{(1)}$, $x_{kl}^{(2)}$.

7. В результате l-й отрезок длины $\frac{1}{3^{k-1}}$ «породил» $(2l-1)$-й и $2l$-й отрезки длины $\frac{1}{3^k}$. При этом значения функции $\overline{f}$ на концах $(2l-1)$-го отрезка будут равны $\frac{l-1}{2^{k-1}} \equiv \frac{2l-2}{2^k}$ и $\frac{2l-1}{2^k}$, а на концах $2l$-го — $\frac{2l-1}{2^k}$ и $\frac{l}{2^{k-1}} \equiv \frac{2l}{2^k}$ соответственно, что сводится к формуле (1.5), если заменить в ней l на $2l-1$ и $2l$ соответственно и k на $k+1$. Таким образом, наша индуктивная процедура действительно корректно описана.

8. После бесконечного числа таких шагов мы получим функцию $\overline{f}$, определённую на множестве J границ всех выброшенных интервалов. Функция $\overline{f}$ монотонна на J. В самом деле, легко проследить по индукции, что на каждом конечном шаге «недостроенная» функция монотонна на том множестве, на котором она уже определена. Теперь заметим, что, каковы бы ни были точки $c, d \in J$, мы дойдём до них в построении функции $\overline{f}$ за конечное число шагов l, m соответственно. Тогда требуемое утверждение следует из монотонности «недостроенной» функции $\overline{f}$ на шаге с номером $\max(l, m)$: значения функции в этих при дальнейшем построении не изменятся.

9. Положим теперь

$$f(x) = \sup_{y \in J,\, y \leqslant x} \overline{f}(y). \tag{1.7}$$

Заметим:
1) $f(0) = 0$, поскольку условию $y \leqslant 1$ удовлетворяет лишь одна точка множества J — точка 0 — и $\overline{f}(0) = 0$.
2) $f(x) = \overline{f}(x)$ при всех $x \in J$, что следует из (1.7) и монотонности функции $\overline{f}$ на множестве J; отсюда же следует, что $0 \leqslant \overline{f}(x) \leqslant 1$ при всех $x \in J$.
3) $f(1) = 1$, поскольку условию $y \leqslant 1$ удовлетворяют все точки множества J, включая 1, $\overline{f}(1) = 1$ и $\overline{f}(y) \leqslant 1$ при $y \in J$.
4) Функция $f(x)$ — монотонно неубывающая, что непосредственно следует из её определения (1.7).
5) Множество значений функции f всюду плотно заполняет отрезок $[0; 1]$. Действительно, в это множество входит всё множество значений функции $\overline{f}$, а оно содержит все двоично-рациональные числа отрезка $[0; 1]$ (двоично-рациональные числа – это числа вида $\frac{l}{2^m}$, $l \in \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, $l \in \mathbb{Z}$).

10. В силу монотонности функции $f(x)$ из 4) следует её непрерывность на $[0; 1]$ (см. задачу 4).

(Заметим ещё, что функция $f(x)$ постоянна на любом из интервалов $I_k^{(l)}$, а поэтому дифференцируема в каждой точке любого из них и имеет там нулевую производную. Это наблюдение нам потребуется в дальнейшем.)

11. Итак, функция Кантора монотонна на отрезке $[0; 1]$ (а следовательно, имеет ограниченную вариацию!) и непрерывна на нём. Докажем, что эта функция не является абсолютно непрерывной на $[0; 1]$.

12. Для этого докажем, что при любом $\delta > 0$ на отрезке $[a; b]$ найдётся конечная система непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^n$ с суммой длин меньше δ, для которой $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| = 1$.

13. Рассмотрим множество $P_0 = [0; 1] \setminus \cup_{k \in \mathbb{N}} \cup_{l=\overline{1,2^{k-1}}} I_k^{(l)}$, т. е. множество, оставшееся от отрезка $[0; 1]$ после описанной индуктивной процедуры (напомним, что мы не только строили функцию, но и выбрасывали подмножества отрезка). Как известно из прошлого семестра,

это множество (называемое *замкнутым множеством Кантора*) имеет меру нуль. Следовательно, при любом $\delta > 0$ оно может быть покрыто конечной или счётной системой интервалов суммарной длины меньше δ. Построим такую систему для выбранного выше δ. Поскольку P_0 замкнуто и ограничено, а следовательно, компактно, то из полученного покрытия, если оно состоит из счётного семейства интервалов, можно выбрать конечное подпокрытие (см. семинар-лекцию 12 тома 1 настоящего курса). Пусть это конечное подпокрытие есть

$$\{(\alpha_i; \beta_i)\}_{i=1}^{m}, \quad \cup_{i=1}^{m}(\alpha_i; \beta_i) \supset P_0.$$

Однако интервалы этого покрытия могут пересекаться. Наша ближайшая задача — построить систему непересекающихся отрезков, покрывающую P_0.

14. Рассмотрим замкнутое множество

$$\cup_{i=1}^{m}[\alpha_i; \beta_i] \supset \cup_{i=1}^{m}(\alpha_i; \beta_i) \supset P_0. \tag{1.8}$$

15. Пусть

$$\{c_i\}_{i=1}^{p} = \{a_i\}_{i=1}^{m} \cup \{b_i\}_{i=1}^{m}, \quad p \leqslant 2m,$$

есть набор упорядоченных по возрастанию начал и концов интервалов покрытия (1.8). Рассмотрим отрезки $[c_k; c_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, p-1$. Очевидно, что

$$\cup_{k=1}^{p-1}[c_k; c_{k+1}] \supset \cup_{i=1}^{m}[\alpha_i; \beta_i], \tag{1.9}$$

и что каждый из отрезков (1.9) либо содержится в (1.8) целиком, либо не входит (кроме граничных точек) (тем самым не пересекаясь с открытым покрытием). При этом отрезки (1.9) имеют непересекающиеся внутренности и сумма длин тех из них, что содержатся в (1.8), не превосходит меры множества (1.8), а поэтому меньше δ. Оставив из (1.9) лишь те отрезки, которые содержится в (1.8), переобозначим их $(a_k; b_k)$, $k = \overline{1, n}$. Тогда $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^{n}$ — конечное семейство непересекающихся интервалов, содержащихся в отрезке $[0; 1]$ и такое, что

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta. \tag{1.10}$$

16. С другой стороны, множество

$$Q = \cup_{k=1}^{n}[a_k; b_k]$$

покрывает множество P_0. Иными словами, все точки из $[0; 1] \setminus Q$ суть точки выброшенных интервалов.

17. Достроим теперь множество Q конечным числом отрезков длины меньше δ до разбиения отрезка $[0;1]$. Обозначим добавленные при этом отрезки через $\{c_l;d_l\}_{l=1}^t$. Тогда

$$1 = f(1) - f(0) = \sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k)) + \sum_{l=1}^{t}(f(c_l) - f(d_l)). \tag{1.11}$$

С другой стороны, каждый из добавленных отрезков в силу сказанного в предыдущем абзаце лежит целиком в одном из выброшенных интервалов, а следовательно, функция f на нём постоянна. Следовательно, из (1.11) получаем:

$$1 = f(1) - f(0) = \sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Поскольку верно (1.10), требуемая система интервалов построена.

18. Итак, функция Кантора $f(x)$ обладает следующими свойствами:
1) $f \in BV[0;1] \cap C[0;1]$;
2) $f \notin AC[0;1]$;
3) $f'(x) = 0$ почти всюду на $[0;1]$.

⊠

Определение 2. *Непрерывную функцию с ограниченной вариацией, имеющую почти всюду равную нулю производную, называют сингулярной функцией.*

Приведённое выше рассуждение показывает, что сингулярная функция, отличная от константы, не может быть абсолютно непрерывной.

Приведём ещё некоторые важные факты из теории функций действительной переменной (п. 6—8). Их доказательство (если оно не приведено здесь) можно найти в [12, гл. VI].

ПРИМЕР 7. Любая монотонная функция на отрезке дифференцируема почти всюду на этом отрезке. (В силу доказанного ранее, в том числе на предыдущих лекциях, отсюда сразу вытекает аналогичное утверждение для функций ограниченной вариации, а следовательно, и абсолютно непрерывных.)

Считая это известным, докажем, что если $f(x)$ — неубывающая на отрезке $[a;b]$ функция, то $f' \in L^1(a;b)$ и верно неравенство

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a). \tag{1.12}$$

(Подразумевается, что $f'(x)$ доопределена произвольным образом в тех точках, где эта производная не существует.) Так, для функции Кантора левая часть равенства равна нулю, а правая — единице.

□ Для доказательства продолжим функцию $f(x)$ значением $f(b)$ при $x > b$ и положим при всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a;b]$

$$F_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$

Очевидно, что $F_n(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a;b]$ (в силу монотонного неубывания функции f) и $F_n(x) \to f'(x)$ почти всюду (во всех точках дифференцируемости $f(x)$). Заметив, что $F_n(x)$ интегрируемы (даже по Риману как разности монотонных функций), имеем

$$\int\limits_a^b F_n(x)\,dx = n\left(\int\limits_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right)dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right) =$$
$$= n\left(-\int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx + \int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\right) \leqslant f(b) - f(a),$$

поскольку $f(x) \geqslant f(a)$ при $x > a$ и $f(x) = f(b)$ при $x > b$.

Следовательно, по лемме Фату, применённой к функциям $F_n(x)$, интеграл Лебега $\int_a^b f'(x)dx$ существует и его значение также оценивается сверху числом $f(b) - f(a)$, что и доказывает (1.12).

Заметим теперь, что в силу (1.12) с учётом монотонности $f(x)$ имеем

$$\int\limits_a^b |f'(x)|\,dx \equiv \int\limits_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a),$$

т. е. $f' \in L^1(a;b)$.

Легко видеть, что в силу линейности пространства $L^1(a;b)$ то же (принадлежность $L^1(a;b)$) верно для производной всякой функции ограниченной вариации. ⊠

ПРИМЕР 8. Как мы видели, в общем случае равенство

$$f(x) = \int\limits_a^x f'(y)\,dy + f(a), \quad x \in [a;b], \tag{1.13}$$

неверно. Более того, можно утверждать, что (1.13) верно в том и только случае, когда $f \in AC[a,b]$.

Легко доказать, что условие (1.13) достаточно. Действительно, оно предполагает, что интеграл имеет (конечное) значение, а тогда $f' \in L^1(a;b)$, далее см. п. 1. Существенно сложнее доказать, что всякая абсолютно непрерывная функция почти всюду имеет производную (см. предыдущий пункт) и что эта производная позволяет восстановить функцию по формуле (1.13).

ПРИМЕР 9. Верно и в каком-то смысле обратное утверждение: если $g \in L^1(a;b)$, то почти всюду на $[a;b]$:
1) функция переменной x $\int_a^x g(y)\,dy$ дифференцируема и
2) при почти всех $x \in [a;b]$ верно равенство $\frac{d}{dx}\int_a^x g(y)\,dy = g(x)$.

ПРИМЕР 10. В задачах для самостоятельного решения к семинару-лекции 1 требовалось показать, что всякая функция ограниченной вариации $f(x)$ раскладывается в сумму непрерывной функции ограниченной вариации $g(x)$ и функции скачков $s(x)$. Теперь мы можем установить дальнейший результат.

Именно, *всякая непрерывная функция ограниченной вариации $g(x)$ раскладывается в сумму абсолютно непрерывной функции $\psi(x)$ и сингулярной функции $\chi(x)$.*

□

1. Действительно, положим (см. пример 7)

$$\psi(x) = f(a) + \int_a^x g'(y)\,dy, \quad \chi(x) = g(x) - \psi(x).$$

2. Тогда легко видеть, что $\psi \in AC[a,b]$ (пример 8), $\chi \in C[a;b] \cap \cap BV[a;b]$ и (пример 9)

$$\chi'(x) = g'(x) - \psi'(x) = g'(x) - \frac{d}{dx}\int_a^x g'(y)\,dy = g'(x) - g'(x) = 0 \quad \text{п. в.}$$

3. Таким образом, *любую функцию ограниченной вариации можно представить в виде суммы непрерывной функции ограниченной вариации, функции скачков и сингулярной функции*:

$$f(x) = \psi(x) + s(x) + \chi(x), \tag{1.14}$$

причём это разложение можно сделать единственным, если, например, наложить условия $\chi(a) = s(a) = 0$. Важно, что *при интегрировании производной восстанавливается лишь абсолютно непрерывная компонента*, тогда как функция скачков и сингулярная (чьи производные равны нулю почти всюду) «бесследно исчезают»:

$$\int_a^x f'(y)\,dy + f(a) = \int_a^x (\psi'(y) + s'(y) + \chi'(y))\,dy + f(a) = \psi(x). \quad \boxtimes$$

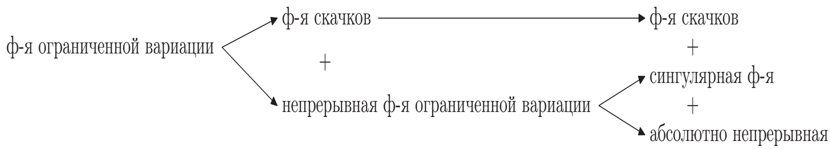

Рис. 3. Схема к примеру 10: разложение функции ограниченной вариации в сумму функции скачков, сингулярной функции и абсолютно непрерывной функции.

ПРИМЕР 11. Отметим ещё, что если $f \in AC[a, b]$, то $f_1 \equiv \equiv V_a^x(f) \in AC[a, b]$.

□ Действительно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ в смысле определения $1'$. Получим тогда для любой конечной системы непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}_{k=1}^n$

$$\sum_{k=1}^n |f_1(b_k) - f_1(a_k)| = \sum_{k=1}^n V_{a_k}^{b_k}(f) = \sum_{k=1}^n \sup_{T_k} \sum_{l_k=1}^{n_k} |f(b_{l_k}) - f(a_{l_k})| =$$
$$= \sup_{\{T_k\}} \sum_{k=1}^n \sum_{l_k=1}^{n_k} |f(b_{l_k}) - f(a_{l_k})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

поскольку $\cup_{k=1}^n \{(a_{l_k}; b_{l_k})\}_{l_k=1}^{n_k}$ также есть система непересекающихся интервалов суммарной длиной меньше $\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, а следовательно, каждая сумма, стоящая под знаком sup, меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. ☒

ПРИМЕР 12. Отсюда непосредственно следует, что всякая абсолютная непрерывная функция может быть представлена в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.

ПРИМЕР 13. Покажем, что, хотя всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна, от неё, вообще говоря, нельзя ожидать выполнения «чуть более» сильного требования — гёльдеровости (ни с каким показателем) и тем более липшицевости (= гёльдеровость с показателем 1).

□ Рассмотрим функции

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 \frac{2}{x}}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln \frac{2}{x}}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что
1) $g(x) > 0$ при $x \in (0; 1]$,
2) $g \in L(0; 1)$,
3) $\int_0^x g(y)\, dy = f(x)$, $x \in [0; 1]$.
Следовательно, $f \in AC[0; 1]$. С другой стороны, при любом $\alpha \in (0; 1]$ имеем

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x) - f(0)}{(x-0)^\alpha} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x^\alpha \ln \frac{2}{x}} = +\infty,$$

поэтому $f \notin C^\alpha[0;1]$ ни при каком $\alpha \in (0;1]$. (Отметим, что попутно мы установили, что не все непрерывные функции гёльдеровы). ⊠

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. 1) Привести пример дифференцируемой почти всюду функции $f(x)$, для которой интеграл $\int_a^b f'(x)\,dx$ существует, но $\int_a^b f'(x)\,dx \neq f(b) - f(a)$.
2) То же, но $f(x)$ должна быть непрерывной, а интеграл от производной должен быть отличен от нуля.
3) Представить построенную в п. 2) функцию в виде (1.14).

Задача 2. Доказать, что $\frac{f}{g} \in AC[a,b]$, если $f, g \in AC[a,b]$, $|g| \geqslant C > 0$.

Задача 3. Доказать, что липшиц-непрерывная функция абсолютно непрерывна.

Задача 4*. Доказать, что если функция f монотонно не убывает на отрезке $[a;b]$, а множество её значений всюду плотно на отрезке $[f(a); f(b)]$, то $f \in C[a;b]$.

Задача 5*. Как мы видели в примере 13, абсолютная непрерывность не гарантирует гёльдеровости. Показать, что если в определении абсолютной непрерывности снять требование пустоты попарного пересечения интервалов, то функции, удовлетворяющие новому определению, будут даже липшицевы.

Задача 6*. Построить функцию

$$f \in \left(\cap_{\alpha \in (0;1)} C^\alpha[0;1]\right) \setminus BV[0;1].$$

Задача 7. Построить функцию $f \in BV[0;1] \cap C[0;1]$, не являющуюся гёльдеровой ни при каком $\alpha \in (0;1)$ (и тем более липшицевой).

Задача 8*. Построить на некотором отрезке $[a;b]$ функцию $g(x)$, для которой функция

$$f(x) = \int\limits_a^x g(y)\,dy,$$

где интеграл понимается в несобственном смысле Римана, определена (как конечная функция) при всех $x \in [a;b]$, но не является абсолютно непрерывной. Возможно ли такое, если интеграл понимается в смысле Лебега? Чем объяснить кажущееся несоответствие?

Лекция 3

СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Функция «шапочка» и сглаживание

Введем функцию «шапочка»:

$$\omega(x) = c \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{при} \quad |x| < 1; \\ 0, & \text{при} \quad |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

причем постоянная $c > 0$ выбирается из условия нормировки «шапочки»:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, \omega(x) = 1.$$

Из определения «шапочки» вытекает, что $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $\operatorname{supp}\{\omega\} = \{|x| \leqslant 1\}$.

При любом $\varepsilon > 0$ мы полагаем

$$\omega_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — открыто, причём граница $\partial\Omega$ этого множества (если $\partial\Omega \neq \varnothing$) достаточно гладкая. Например, $\partial\Omega \in C^\infty$.

Введём следующее обозначение:

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{distance}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}. \tag{1.2}$$

Дадим определение.

Определение 1. *Для произвольной функции $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ε-средней функцией называется функция*:

$$u_\varepsilon(x) := \omega_\varepsilon(x) * u(x) = \int\limits_\Omega \omega_\varepsilon(x - y) u(y)\, dy \quad \textit{при} \quad x \in \Omega_\varepsilon \text{ [1]}. \tag{1.3}$$

[1] Действительно, поскольку $u(x)$ всего лишь из $L^1_{loc}(\Omega)$, то вблизи границы $\partial\Omega$ функция $u(x)$ может себя вести нерегулярно.

Справедлива следующая основная теорема о свойствах ε-средних функций.

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства*:

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;

(ii) $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ *почти всюду в* Ω *при* $\varepsilon \to +0$;

(iii) *если* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, *то*

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{сильно в} \quad L^p(K) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to +0$$

для любого компакта $K \subset \Omega$;

(iv) *если* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $1 \leqslant p < +\infty$ *и* $\operatorname{supp}\{u\} = K \subset\subset \overline{\Omega}$ *и* K — *компакт*, *то*

$$u_\varepsilon \in L^p(\Omega), \quad \|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^N$ и $i \in \{1, \ldots, N\}$ — фиксированы. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{u_\varepsilon(x + he_i) - u_\varepsilon(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega \frac{1}{h} \left[\omega\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\, dy.$$

Поскольку

$$\frac{1}{h} \left[\omega\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \rightrightarrows \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad h \to 0$$

равномерно по $y \in \Omega$ и $x \in \mathbb{R}^N$, то мы приходим к выводу о том, что

$$\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy = \int\limits_\Omega \frac{\partial \omega_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i} u(y)\, dy. \qquad (1.4)$$

Последовательно используя формулу (1.4) с учётом того, что $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, мы получим следующее равенство:

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega \partial_x^\alpha \omega_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy.$$

Шаг 2. Заметим, что в лекции 2 мы получили результат о том, что производная в классическом смысле

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x g(y)\, dy = g(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in [a, b] \quad \text{при} \quad g \in L^1(a, b).$$

Аналогичные соображения в многомерном случае приводят к следующей формуле [1]:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\alpha_N\varepsilon^N}\int\limits_{O(x,\varepsilon)}|g(y)-g(x)|\,dy=0 \quad \text{для почти всех} \quad x\in\Omega \tag{1.5}$$

при условии, что $g\in L^1_{loc}(\Omega)$ [2] и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}|u_\varepsilon(x)-u(x)| &= \left|\int\limits_\Omega \omega_\varepsilon(x-y)[u(y)-u(x)]\,dy\right| = \\ &= \left|\int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)[u(y)-u(x)]\,dy\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_{O(x,\varepsilon)}\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|u(y)-u(x)|\,dy \leqslant \\ &\leqslant \alpha_N\frac{1}{\alpha_N\varepsilon^N}\int\limits_{O(x,\varepsilon)}|u(y)-u(x)|\,dy \to +0\end{aligned} \tag{1.6}$$

при $\varepsilon\to+0$ для почти всех $x\in\Omega_{\varepsilon_0}$. Сделаем важное для дальнейшего наблюдение. Если $u\in C(\Omega)$, то из (1.6) вытекает, что

$$u_\varepsilon(x)\rightrightarrows u(x) \quad \text{равномерно по} \quad x\in K, \tag{1.7}$$

где компакт $K\Subset\overline{\Omega}$. Более того, для доказательства этого факта не нужно ссылаться на теорему Лебега о дифференцировании.

Шаг 3. Для доказательства утверждения (iii) введём некоторые обозначения. Пусть $K\Subset\Omega$ — это произвольный компакт. Определим следующий компакт:

$$K_\varepsilon := \overline{\bigcup_{x\in K} O(x,\varepsilon)} \supset K. \tag{1.8}$$

Возьмём $\varepsilon_0>0$ настолько малым, чтобы для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ имело место вложение

$$K_\varepsilon\subset\Omega. \tag{1.9}$$

[1] Теорема Лебега о дифференцировании.

[2] Напомним, что $O(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^N:\ |y-x|<\varepsilon\}$ и $\alpha_N=\omega_N/N$ — это объём единичного шара и ω_N — это площадь единичной сферы.

Докажем сначала следующее неравенство:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(K)} \leqslant \|u\|_{L^p(K_\varepsilon)}. \tag{1.10}$$

□ Действительно, в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|u_\varepsilon(x)| = \left| \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon^{1-1/p}(x-y)\omega_\varepsilon^{1/p}(x-y)|u(y)|\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)\,dy \right)^{1-1/p} \left(\int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy \right)^{1/p} =$$
$$= \left(\int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy \right)^{1/p}.$$

Из этого неравенства вытекает следующая оценка:

$$\int\limits_K |u_\varepsilon(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_K \left(\int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy \right) dx.$$

Заметим, что

$$(x,y) \in D_1 := K \times O(x,\varepsilon) \subset D_2 := K \times K_\varepsilon$$

и, кроме того, $\omega_\varepsilon(x-y) = 0$ при $|y-x| > \varepsilon$, поэтому реально интегрирование ведётся по подмножеству

$$(x,y) \in (K \cap O(y,\varepsilon)) \times K_\varepsilon \subset D_2$$

и имеет место цепочка неравенств

$$\int\limits_K \left(\int\limits_{O(x,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy \right) dx = \iint\limits_{D_1} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \iint\limits_{D_2} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\,dx \leqslant \int\limits_{K_\varepsilon} \left(\int\limits_{O(y,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_{K_\varepsilon} |u(y)|^p \left(\int\limits_{O(y,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)\,dx \right) dy = \int\limits_{K_\varepsilon} |u(y)|^p\,dy,$$

поскольку

$$\int\limits_{O(y,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y)\,dx = \{z = x-y\} = \int\limits_{O(0,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(z)\,dz = 1.$$

Таким образом, мы приходим к искомому неравенству (1.10). ☒

Теперь мы переходим к доказательству утверждения (iii). Итак, фиксируем $K \Subset \overline{\Omega}$, $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(K,\varepsilon) > 0$. Поскольку $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, то

$$u \in L^p(K_\varepsilon) \subset L^p(K).$$

Заметим, что имеет место плотное вложение

$$C(K_\varepsilon) \overset{ds}{\subset} L^p(K_\varepsilon),$$

поэтому найдётся такая функция $v \in C(K_\varepsilon)$, что

$$\|u - v\|_{L^p(K_\varepsilon)} < \delta. \tag{1.11}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(K)} \leqslant \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(K)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(K)} + \|v - u\|_{L^p(K)}. \tag{1.12}$$

Если воспользоваться неравенством (1.10), то мы получим следующее неравенство:

$$\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(K)} \leqslant \|u - v\|_{L^p(K_\varepsilon)}. \tag{1.13}$$

Кроме того, очевидно, имеет место неравенство

$$\|v - u\|_{L^p(K)} \leqslant \|v - u\|_{L^p(K_\varepsilon)}. \tag{1.14}$$

Таким образом, из неравенства (1.12) с учётом неравенств (1.13) и (1.14) мы приходим к следующей оценке:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(K)} \leqslant 2\|v - u\|_{L^p(K_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(K)}. \tag{1.15}$$

Теперь заметим, что в силу наблюдения (1.7), применённого к функции $v(x)$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получим оценку

$$\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(K)} < \delta. \tag{1.16}$$

Поэтому с учётом (1.11) приходим к неравенству

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(K)} < 3\delta.$$

Тем самым,

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p_{loc}(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Шаг 4. Рассуждения в точности повторяют рассуждения на шаге 3. В модификации нуждается формула (1.10).

□ Действительно, пусть выполнены условия случая (iv). Тогда согласно неравенству Гёльдера имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\right)^{1/p} = \\ = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y)|u(y)|^p\,dy\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p\,dy. \quad \boxtimes \tag{1.18}$$

Заметим теперь, что поскольку $\operatorname{supp}\{u\} = K \subset\subset \overline{\Omega}$, где K — компакт, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\operatorname{supp}\{u_\varepsilon\} = K_\varepsilon \subset\subset \Omega\ ^{1)}.$$

Далее, рассуждая точно так же, как и на шаге 3, получим предельное свойство

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Теорема доказана.

---

1) Очевидно, что $K \subset\subset K_\varepsilon$.

§ 2. Основная лемма вариационного исчисления

Нам нужно доказать один важный результат, который мы будем использовать при доказательстве леммы 2.

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, +\infty)$ и последовательность $\{f_n\} \subset L^p(X, \mu)$ сходится сильно в $L^p(X, \mu)$ к функции $f \in L^p(X, \mu)$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n(x)\}$, которая сходится μ-почти всюду к $f(x)$ на множестве X.*

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу неравенства Чебышёва получаем оценку

$$\mu\left(\{x \in X : \, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = \mu\left(\{x \in X : \, |f_n(x) - f(x)|^p > \varepsilon^p\}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е. последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере μ к функции f.

Осталось воспользоваться известным результатом о том, что можно извлечь такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ последовательности $\{f_n\}$, которая сходится μ-почти всюду к функции f на множестве X.

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная лемма.

Лемма 2. *Пусть $u \in L^1(a, b)$, тогда справедливо следующее равенство*:

$$\sup_{h \in C_0^\infty(a,b), \, |h| \leqslant 1} \int\limits_a^b u(x) h(x) \, dx = \int\limits_a^b |u(x)| \, dx. \tag{2.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Определим новую функцию

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u(x)/|u(x)|, & \text{если} \quad u(x) \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad u(x) = 0. \end{cases}$$

Теперь по этой функции для достаточно малого $\delta > 0$ построим функцию

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} w(x), & \text{если} \quad x \in [a + \delta, b - \delta]; \\ 0, & \text{если} \quad x \in (a, a + \delta) \cup (b - \delta, b). \end{cases}$$

Шаг 2. Понятно, что построенная функция $v(x)$ измерима на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет неравенству $|v(x)| \leqslant 1$, а значит, принадлежит пространству $L^\infty(a,b) \subset L^1(a,b)$. [1] Поэтому для функции $v(x)$, которую можно продолжить нулём вне отрезка $[a,b]$, определено сглаживание функции $v(x)$

$$h_n = v_\varepsilon \in C_0^\infty(a,b), \quad \varepsilon = \frac{1}{n} < \delta \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0 \in \mathbb{N}.$$

□ Действительно, принадлежность построенной срезки пространству $C_0^\infty(a,b)$ следует из следующей формулы:

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) v(y)\,dy,$$

причём это выражение равно нулю при $x \geqslant b-\delta+\varepsilon$ и $x \leqslant a+\delta-\varepsilon$, значит это финитная функция вместе со всеми своими производными на интервале (a,b), поскольку по условию $\varepsilon < \delta$. ⊠

Шаг 3. По построению последовательность $\{h_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

$$|h_n(x)| \leqslant 1, \quad h_n \in C_0^\infty(a,b).$$

Таким образом, построенная последовательность является допустимой, т. е. принадлежит классу, по которому берется supremum в выражении (2.1).

Сделаем важное наблюдение: из вида левой части выражения (2.1) следует, что она не превышает значения выражения

$$\int\limits_a^b |u(x)|\,dx. \tag{2.2}$$

Шаг 4. Докажем, что на допустимом множестве достигается величина (2.2). Для построенной последовательности $\{h_n\}$ по свойству (iii) срезки имеет место следующее предельное равенство:

$$h_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^1(a,b) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, найдется такая подпоследовательность [2] $\{h_{n_k}\} \subset \subset \{h_n\}$, что

$$h_{n_k}(x) \to v(x) \quad \text{почти всюду в} \quad x \in (a,b) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty,$$

---

[1] Указанное вложение выполнено, поскольку $[a,b]$ — ограниченное множество.

[2] См. ниже лемму 1.

а значит,

$$h_{n_k}(x)u(x) \to |u(x)| \quad \text{п. в. в} \quad x \in [a+\delta, b-\delta] \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty,$$

и

$$h_{n_k}(x)u(x) \to 0 \quad \text{п. в. в} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$

Поэтому имеет место равенство

$$\sup_{h \in \{h_{n_k}\},\ \delta > 0} \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dx = \int\limits_a^b |u(x)|\,dx.$$

Лемма доказана.

Основная лемма вариационного исчисления. *Пусть $f \in L^1(a,b)$ и для каждой функции $h \in C_0^\infty(a,b)$ имеет место равенство*:

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0,$$

тогда $f(x) = 0$ для почти всех $x \in (a,b)$.

Доказательство.

В силу условий леммы имеем

$$\sup_{h \in C_0^\infty(a,b)\ |h(x)| \leqslant 1} \int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0.$$

Тогда в силу результата леммы 1 имеем

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0,$$

откуда сразу же получаем требуемый результат.

Лемма доказана.

Д о п о л н е н и е 1

ДОПОЛНЕНИЕ К ЛЕКЦИИ 2

§ 1. К теореме Лебега о производной функции $f \in AC[a, b]$

Дадим определение *покрытия ограниченного множества в смысле Витали*. Пусть μ — это классическая мера Лебега на $\mathbb{R}^1$ и дано ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^1$.

О п р е д е л е н и е 7. *Будем говорить, что множество E покрыто системой невырожденных отрезков I системы $T_0 \ni I$ в смысле Витали, если для всякой точки $x \in E$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой отрезок $I = I(x, \varepsilon) \in T_0$, что*

$$\mu(I) < \varepsilon \quad \text{и} \quad x \in I.$$

Справедлива *теорема Витали*.

Т е о р е м а В и т а л и. *Пусть ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^1$ покрыто системой T_0 в смысле Витали. Тогда существует такая не более чем счётная система отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T_0$, что $I_k \cap I_l = \varnothing$ при $k \neq l$ и*

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k\right) = 0.$$

С л е д с т в и е. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная система отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{N} \subset T_0$, что $I_k \cap I_l = \varnothing$ при $k \neq l$ и*

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} I_k\right) < \varepsilon.$$

Рассмотрим следующее множество:

$$E_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in (a, b) : \limsup_{h \to 0} \left|\frac{\Psi(x + h) - \Psi(x)}{h}\right| > \lambda\right\},$$

где

$$\Psi(x) = \int\limits_a^x \psi(y)\,dy, \quad x \in [a,b], \quad \psi(y) \in L^1(a,b).$$

Нужно доказать, что

$$\mu(E_\lambda) \leqslant \frac{4}{\lambda} \int\limits_a^b |\psi(y)|\,dy. \tag{1.1}$$

□ Действительно, имеем

Пункт 1. Докажем, что множество E_λ измеримо. Пусть

$$E_{m,\lambda,h} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in (a,b) : \ x + h \in (a,b) \text{ и } \left| \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} \right| > \lambda + \frac{1}{m} \right\}.$$

В силу определения функции $\Psi(x)$ она является непрерывной на отрезке $[a,b]$. Поэтому множество $E_{\lambda,h}$ открыто в $\mathbb{R}^1$ и, значит, борелевское. Заметим, что имеет место равенство

$$E_\lambda = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0<|h|<\frac{1}{n}} E_{m,\lambda,h}.$$

Как объединение открытых множеств, множество

$$\bigcup_{0<|h|<\frac{1}{n}} E_{m,\lambda,h}$$

открыто в $\mathbb{R}^1$ и, значит, борелевское. Как счётное пересечение и счётное объединение борелевских множеств множество E_λ борелевское и, значит, измеримое.

Пункт 2. Заметим, что для любого $x \in E_\lambda$ существует такая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$, сходящаяся к нулю, что

$$\left| \frac{\Psi(x + h_k(x)) - \Psi(x)}{h_k(x)} \right| > \lambda \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in E_\lambda.$$

Следовательно, система множеств

$$T_0 = \{[x - h_k(x), x + h_k(x)] : \ x \in E_\lambda, \ k \in \mathbb{N}\}$$

покрывает множество $E_\lambda \subset (a,b)$ в смысле Витали. В силу следствия к теореме Витали существует такая конечная система попарно непересекающихся отрезков

$$\{I_i\}_{i=1}^n = \left\{[x_i - |h_{k_i}|, x_i + |h_{k_i}|], \ i = \overline{1,n}\right\},$$

что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\mu(E_\lambda) = \mu\left(E_\lambda \setminus \cup_{k=1}^n I_k\right) + \mu\left(\cup_{k=1}^n I_k\right) \leqslant \frac{1}{2}\mu(E_\lambda) + \mu\left(\cup_{k=1}^n I_k\right),$$

$$\frac{1}{2}\mu(E_\lambda) \leqslant \mu\left(\cup_{k=1}^n I_k\right) \leqslant \sum_{i=1}^n 2|h_{k_i}|. \tag{1.2}$$

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\left|\frac{\Psi(x_i + h_{k_i}) - \Psi(x_i)}{h_{k_i}}\right| > \lambda \Rightarrow |h_{k_i}| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_{|x_i, x_i + h_{k_i}|} |\psi(y)|\, dy.$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^n |h_{k_i}| \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \int\limits_{|x_i, x_i + h_{k_i}|} |\psi(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{\lambda} \int\limits_a^b |\psi(y)|\, dy. \tag{1.3}$$

Из неравенств (2.2) и (1.5) вытекает неравенство (1.3). ⊠

Тематическая лекция II

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА: ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Семинар–Лекция 4

ТЕОРЕМА РАДОНА—НИКОДИМА

Это занятие будет посвящено доказательству теоремы Радона—Никодима. Она будет нужна нам для того, чтобы доказать изоморфизм пространств $L^p(\Omega)$ и $(L^q(\Omega))^*$, где $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

§ 1. Заряды

Пусть X — некоторое множество (которое мы часто будем называть пространством, подчёркивая тем самым, что в дальнейшем будут рассматриваться его подмножества), $\mathcal{A}_\mu$ — некоторая σ-алгебра его подмножеств. Напомним

Определение 1. *Числовая функция μ, определённая на $\mathcal{A}_\mu$, называется мерой, если*
1) $\forall A \in \mathcal{A}_\mu$ $\mu(A) \geqslant 0$;
2) *μ обладает свойством σ-аддитивности, т. е. если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_\mu$ и при всех $i, j \in \mathbb{N}$ верно $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $\mu(\sqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Для простоты будем пока рассуждать о конечных мерах: $\mu(X) < +$ $+\infty$.

Пусть $f(x)$ — некоторая неотрицательная измеримая по мере μ и интегрируемая (по Лебегу) на X функция. Тогда величина

$$\Phi(A) = \int\limits_A f(x)\, d\mu \tag{1.1}$$

определена для всех $A \in \mathcal{A}_\mu$ и обладает всеми свойствами меры. Таким образом, формула (1.1) определяет некоторую новую меру на $\mathcal{A}_\mu$. Если снять условие неотрицательности функции, так уже не будет. Однако в определении меры тоже можно снять условие неотрицательности и прийти к обобщению понятия меры:

Определение 2. *Числовая функция Φ, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}_\Phi$ подмножеств пространства X и обладающая на этой σ-алгебре свойством σ-аддитивности, называется зарядом. Заряд называется конечным, если его значение на любом $A \in \mathcal{A}$ выражается конечным числом ($\pm\infty$ не допускается).*

Смысл такого названия ясен: $\Phi(A)$ можно представить себе как полный электрический заряд, заключённый в объёме A. В этом случае $f(x)$ будет иметь смысл объёмной плотности заряда.

Нашей целью будет доказать, что не только всякая интегрируемая функция порождает заряд, но и, напротив, при некоторых условиях всякий заряд может быть представлен в виде (1.1) с некоторой функцией $f(x)$.

§ 2. Разложение Хана и разложение Жордана

Итак, пусть рассматривается заряд Φ, определённый на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X и принимающий лишь конечные значения (такой заряд называется *конечным*). Кратко будем говорить, что заряд определён на пространстве X, а множества из $\mathcal{A}$ будем в этом параграфе называть измеримыми (рассматривая тем самым измеримость не относительно меры, а относительно заряда).

Определение 3. *Множество $E \in \mathcal{A}$ называется отрицательным относительно заряда Φ, если $\forall F \in \mathcal{A}$ верно $\Phi(E \cap F) \leqslant 0$. Множество $E \in \mathcal{A}$ называется положительным относительно заряда Φ, если $\forall F \in \mathcal{A}$ верно $\Phi(E \cap F) \geqslant 0$.*

Замечание 1. Вообще говоря, далеко не всякое множество, имеющее отрицательный заряд, является отрицательным. (В каком случае всё-таки это можно утверждать?)

Лемма 1. *Множество $A \in \mathcal{A}$ положительно относительно заряда Φ тогда и только тогда, когда всякое его измеримое подмножество имеет неотрицательный заряд. (Аналогичное утверждение можно сформулировать для отрицательного множества.)*

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно (см. задачу 2).

Лемма 2. *Пусть $A_0 \in \mathcal{A}$, $\Phi(A_0) < 0$. Тогда в A_0 найдётся измеримое отрицательное подмножество строго отрицательного заряда.*

Доказательство.

Пункт 1. Заметим, что A_0 непусто (см. задачу 1). Далее, если в A_0 нет подмножеств положительного заряда, утверждение доказано (см. лемму 1).

Пункт 2. Рассмотрим теперь случай, когда в A_0 найдётся хотя бы одно подмножество положительного заряда. Тогда существуют такое $k \in \mathbb{N}$ и такое измеримое подмножество $C \subset A_0$, что $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. Выберем наименьшее из натуральных k, обладающее следующим свойством: в A_0 есть измеримое подмножество C с $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. Зафиксируем такое k и такое C, обозначив их соответственно k_1, C_1. Положим

$$A_1 = A_0 \setminus C_1.$$

Заметим, что $\Phi(A_1) = \Phi(A_0) - \Phi(C_1) < 0$, поэтому A_1 непусто. Могут представиться два случая: либо A_1 является отрицательным множеством, и тогда утверждение доказано, либо в A_1 найдётся подмножество C положительного заряда. Во втором случае вновь выберем наименьшее натуральное k, для которого в A_1 найдётся подмножество C с $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. Обозначим эти число и множество соответственно k_2, C_2. Заметим, что с необходимостью $k_2 \geqslant k_1$. В самом деле, в случае $k_2 < k_1$ получили бы, что k_1, найденное на первом шаге, не является минимально возможным, ведь для $C_2 \subset A_1 \subset A_0$ имеем $\Phi(C_2) \geqslant \frac{1}{k_2}$.

Пункт 3. Продолжим эту процедуру, если понадобится, до бесконечности. Чтобы корректно воспользоваться этим построением в дальнейшей части доказательства, опишем её более подробно.

Итак, *перед* каждым шагом с номером $l \in \mathbb{N}$ имеем: $\Phi(A_{l-1}) < 0$, но A_{l-1} не является отрицательным множеством. Поэтому существует такое k_l — наименьшее из натуральных чисел k, для которых найдётся $C \subset A_{l-1}$ с $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k}$. (Отсюда следует, что

$$\text{все подмножества } D \subset A_{l-1} \text{ таковы, что } \Phi(D) < \frac{1}{m} \text{ при всех } m < k_l.) \tag{2.1}$$

Выберем для этого числа k_l такое множество $C \subset A_{l-1}$, $\Phi(C) \geqslant \frac{1}{k_l}$, и зафиксируем его, обозначив через C_l. Далее, $k_l \geqslant k_{l-1}$, иначе имели бы: $C_l \subset A_{l-1} \subset A_{l-2}$ и $\Phi(C_l) \geqslant \frac{1}{k_l} > \frac{1}{k_{l-1}}$, что противоречит определению числа k_{l-1}. (Проверьте, что в случае $l = 1$ мы приходим к описанию первого шага, с которого начали изложение процедуры.)

Пункт 4. Полагаем теперь

$$A_l = A_{l-1} \setminus C_l. \tag{2.2}$$

Заметим, что $\Phi(A_l) = \Phi(A_{l-1}) - \Phi(C_l) < 0$. Следовательно, A_l непусто. Если A_l — отрицательное множество, утверждение доказано. Если A_l не является отрицательным множеством, переходим к шагу $l + 1$.

Пункт 5. В результате мы либо за конечное число шагов придём к отрицательному множеству строго отрицательного заряда, либо построим бесконечную последовательность пар $\{(k_l, C_l)\}_{l=1}^{\infty}$. Легко видеть, что множества C_l попарно не пересекаются, поскольку при $p < q$ имеем: $C_q \subset A_{q-1} \subset \ldots \subset A_p$, $C_p \cap A_p = \varnothing$ в силу (2.2). Далее, легко видеть, что $k_l \to +\infty$. В противном случае имели бы:

$$\exists M > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists l > N \;\; k_l \leqslant M,$$

т. е. в последовательности $\{k_l\}$ имеется подпоследовательность $\{k_{l_N}\}$ с $k_{l_N} \leqslant M$, или $\Phi(C_{l_N}) \geqslant \frac{1}{M} > 0$. Но тогда, поскольку множества C_k попарно не пересекаются, имели бы

$$\Phi\left(\sqcup_{N\in\mathbb{N}} C_{l_N}\right) = \sum_{N\in\mathbb{N}} \Phi(C_{l_N}) = +\infty,$$

что исключается условием конечности заряда Φ на всех множествах из $\mathcal{A}$. (На самом деле подпоследовательность выбирать даже не пришлось бы, т. к. из доказанной ранее монотонности следовала бы ограниченность всей последовательности.)

Пункт 6. Рассмотрим теперь множество

$$A_\infty := A_0 \setminus \sqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l = \cap_{l\in\mathbb{N}} A_l.$$

Поскольку $\Phi(A_0) < 0$, $\Phi\left(\sqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l\right) > 0$, то A_∞ имеет строго отрицательный заряд. Докажем, что A_∞ — отрицательное множество. Предположим противное: пусть существует $D \subset A_\infty$ такое, что $\Phi(D) > 0$. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого существует $D \subset A_\infty$ с $\Phi(D) \geqslant \frac{1}{m}$. Поскольку, как ранее показано, $k_l \to +\infty$, то найдётся такое наименьшее n, что $k_n > m$:

$$n = \min\{n \in \mathbb{N} \mid k_n > m\}.$$

Тогда в силу (3.3) имеем для k_n: все $C \subset A_{n-1}$ таковы, что $\Phi(C) < \frac{1}{m}$. Но это противоречит условию выбора m: $\Phi(D) \geqslant \frac{1}{m}$, поскольку по предположению $D \subset A_\infty \subset A_{n-1}$.

Лемма доказана.

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. *Если Φ — конечный заряд, определённый на X, то существует такое измеримое множество $A^- \subset X$, что A^- отрицательно относительно Φ, а $A^+ = X \setminus A^-$ положительно относительно Φ.*

Доказательство.

Шаг 1. Тривиальный случай заряда, положительного на всяком измеримом множестве (т. е. являющегося мерой), можно не рассматривать: в этом случае достаточно положить $A^- = \varnothing$.

Шаг 2. Положим

$$a = \inf \Phi(A),$$

где точная нижняя грань берётся по всем отрицательным измеримым множествам (семейство таких подмножеств непусто в силу леммы 2). Пусть последовательность $\{A_n\}$ отрицательных измеримых множеств такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) = a.$$

Такая последовательность существует в силу определения точной нижней грани. Положим теперь

$$A^- = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Заметим, что A^- измеримо (т. к. заряд определён на σ-алгебре) и $\Phi(A^-) = a$ (см. задачу 3). Отсюда, в частности, следует, что $a > -\infty$, иначе заряд принимал бы бесконечные значения. Кроме того, можно утверждать, что A^- — отрицательное множество (см. задачу 4).

Шаг 3. Докажем теперь, что $A^+ = X \setminus A^-$ — положительное множество. Предположим противное (см. лемму 1): пусть A^+ содержит измеримое подмножество A_0 такое, что $\Phi(A_0) < 0$. В силу леммы 2 найдётся отрицательное подмножество $A \subset A_0$ с $\Phi(A)<0$. Но тогда $A \subset \subset A^+$, откуда $A \cap A^- = \varnothing$, и $\Phi(A^- \sqcup A) = \Phi(A^-) + \Phi(A) < a$. Но по построению числа a отрицательных множеств заряда меньше a нет. Полученное противоречие доказывает, что множество A^+ является положительным относительно заряда Φ.

Теорема доказана.

Определение 4. *Разбиение пространства X на положительное и отрицательное множества называется разложением Хана пространства X относительно заряда* Φ.

Легко видеть, что разложение Хана, вообще говоря, не единственно (почему?). Однако можно утверждать, что если

$$X = A_1^- \sqcup A_1^+, \quad X = A_2^- \sqcup A_2^+$$

суть два таких разложения, то для любого измеримого множества E

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-), \quad \Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+).$$

Действительно, положим

$$A_{12}^+ = A_1^+ \cap A_2^+, \quad A_1^+ = A_{12}^+ \sqcup \widetilde{A}_1^+, \quad A_2^+ = A_{12}^+ \sqcup \widetilde{A}_2^+.$$

Тогда

$$\Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+) + \Phi(E \cap \widetilde{A}_1^+),$$
$$\Phi(E \cap A_2^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+) + \Phi(E \cap \widetilde{A}_2^+).$$

Но

$$\widetilde{A}_1^+ \subset A_2^- \Rightarrow \Phi(E \cap \widetilde{A}_1^+) \leqslant 0,$$
$$\widetilde{A}_1^+ \subset A_1^+ \Rightarrow \Phi(E \cap \widetilde{A}_1^+) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\Phi(E \cap \widetilde{A}_1^+) = 0$. Аналогично $\Phi(E \cap \widetilde{A}_2^+) = 0$. Таким образом,

$$\Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+).$$

Аналогично

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-),$$

что и требовалось.

Таким образом, заряд Φ однозначно определяет на σ-алгебре $\mathcal{A}$ две неотрицательные функции множества

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+),$$
$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-),$$

называемые соответственно *верхней и нижней вариациями заряда* Φ. При этом:

1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ (для каждого измеримого множества);

2) Φ^+, Φ^- суть неотрицательные σ-аддитивные функции множества

(см. задачу 6), т. е. меры.
Поэтому функция $|\Phi| \equiv \Phi^+ + \Phi^-$ (*полная вариация заряда* Φ) тоже будет мерой.

Определение 5. *Представление заряда Φ в виде разности его верхней и нижней вариаций $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ называется разложением Жордана заряда Φ.*

Замечание 2. В этом определении существенно, что Φ^- и Φ^+ суть нижняя и верхняя вариации заряда Φ (определённые выше). Это гарантирует единственность разложения Жордана. Очевидно, что в общем случае представление заряда в виде разности двух мер не единственно (привести пример).

§ 3. Типы зарядов

Пусть μ — некоторая σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X. Множества, входящие в $\mathcal{A}$, будем называть измеримыми. Пусть на той же σ-алгебре $\mathcal{A}$ определён заряд Φ.

Определение 6. *Говорят, что заряд Φ сосредоточен на множестве $A_0 \in \mathcal{A}$, если*

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; A \subset X \setminus A_0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Множество A_0 в этом случае называется носителем заряда Φ.

Определение 7. *Заряд Φ называется дискретным, он сосредоточен на конечном или счётном множестве. Это равносильно утверждению $\exists\{c_n\}$ ($n = \overline{1, N}$ или $n \in \mathbb{N}$) такое, что $\forall E \subset X$*

$$\Phi(E) = \sum_{k: c_k \in E} \Phi(\{c_k\}).$$

Определение 8. *Заряд Φ называется непрерывным, если $\Phi(E) = 0$ для любого одноточечного множества E.*

Определение 9. *Заряд Φ называется абсолютно непрерывным относительно меры μ, если*

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Определение 10. *Заряд Φ называется сингулярным относительно меры μ, если он сосредоточен на некотором множестве A с $\mu(A) = 0$.*

Заметим, что интеграл Лебега (1.1) от фиксированной интегрируемой по Лебегу функции является абсолютно непрерывным (относительно меры Лебега μ, фигурирующей в этом интеграле) зарядом. Оказывается, этим примером все абсолютно непрерывные заряды исчерпываются.

§ 4. Теорема Радона—Никодима

Теорема Радона—Никодима) *Пусть μ — конечная σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X; пусть Φ — конечный заряд, определённый на $\mathcal{A}$ и абсолютно непрерывный относительно μ. Тогда существует такая интегрируемая (по Лебегу) по мере μ функция $f(x)$, определённая на X, что*

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \Phi(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu.$$

Эта функция (называемая производной заряда Φ по мере μ) определена с точностью до μ-эквивалентности.

Замечание 3. Очевидно, что от условия абсолютной непрерывности заряда Φ относительно меры μ нельзя отказаться. (Почему? Приведите контрпример и покажите, где это условие используется в доказательстве.)

Прежде чем перейти к доказательству, отметим, что простейшими примерами производной заряда по мере являются плотность (массы), плотность электрического заряда.

Доказательство.

Этап 1. Поскольку каждый заряд есть разность двух неотрицательных зарядов и при этом абсолютно непрерывный заряд представляется в виде разности двух абсолютно непрерывных (см. задачу 7), то доказательство достаточно провести для неотрицательных зарядов, т. е. мер. Итак, пусть Φ — мера, абсолютно непрерывная относительно меры μ.

Лемма 3. *Пусть мера Φ абсолютно непрерывна относительно меры μ и $\Phi \not\equiv 0$. Тогда существуют такие натуральное n и $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и B положительно относительно заряда $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.*

Доказательство леммы.

Пусть $X = A_n^- \sqcup A_n^+$ — разложения Хана пространства X относительно зарядов $\Phi - \frac{1}{n}\mu$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть

$$A^- = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Phi(A^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A^-)$, поэтому $\Phi(A^-) = 0$. Следовательно, $\Phi(A^+) > 0$ (почему?). Но тогда в силу абсолютной непрерывности меры Φ относительно меры μ имеем $\mu(A^+) > 0$. Поэтому существует такое m, что $\mu(A_m^+) > 0$: иначе $\mu(A^+) = 0$ в силу σ-аддитивности меры. Но A_m по условию положительно относительно заряда $\Phi - \frac{1}{m}\mu$. Поэтому множество $B = A_m$ и число $n = m$ и будут искомыми.

Лемма доказана.

Этап 2. Пусть теперь K — множество функций φ на X, удовлетворяющих условиям:

1) $\varphi \geqslant 0$,
2) φ измеримы и интегрируемы по μ на X,
3) $\forall A \in \mathcal{A}$ $\int_A \varphi(x)\,d\mu \leqslant \Phi(A)$.

Пусть

$$M = \sup_{\varphi \in K} \int\limits_X \varphi(x)\,d\mu.$$

(M конечно в силу конечности меры Φ и определения множества K.) В силу определения точной верхней грани существует такая последовательность $\{f_n\} \subset K$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = M. \tag{4.1}$$

Положим при каждом $x \in X$

$$g_n(x) = \max(f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

(Докажите, что эти функции измеримы и интегрируемы на X, см. задачу 7.)

Этап 3. Покажем, что $g_n \in K$, т. е. что для всех $E \in \mathcal{A}$ верно

$$\int\limits_E g_n(x)\,d\mu \leqslant \Phi(E).$$

□ Действительно, E можно представить в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств $E = \sqcup_{k=1}^{n} E_k$, где $g_n(x) = f_k(x)$ при всех $x \in E_k$, полагая, например, $E_k = \{x \in X \mid g_n(x) = f_k(x), k - \min\}$ [1]. Поэтому

$$\int\limits_E g_n(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f_k(x)\,d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Phi(E_k) = \Phi(E).$$

Заметим, что последовательность функций $g_n(x)$ обладает следующими свойствами:
1) она монотонно не убывает в каждой точке;
2) все g_n измеримы и интегрируемы по мере μ;
3) $\forall E \in \mathcal{A}$ $\int_E g_n(x)\,d\mu \leqslant \Phi(E)$ и, в частности,
3′) $\int_X g_n(x)\,d\mu \leqslant \Phi(X)$.

[1] Если не позаботиться о том, к какому именно из E_k отнести точки, где несколько функций $f_k(x)$ принимают равные значения, мы рискуем столкнуться с неизмеримыми множествами.

Тогда из 1), 2), 3′) по теореме Беппо Леви следует существование почти всюду на X конечного предела

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

а также существование интеграла $\int_X f(x)\,d\mu$ и равенство

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu. \tag{4.2}$$

С другой стороны, из построения следует, что всюду на X верно неравенство $g_n(x) \geqslant f_n(x)$, откуда

$$\int\limits_X g_n(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_X f_n(x)\,d\mu. \tag{4.3}$$

Но по только что доказанному п. 2) имеем $g_n \in K$, откуда по определению числа M следует, что

$$M \geqslant \int\limits_X g_n(x)\,d\mu. \tag{4.4}$$

Тогда из (4.1)—(4.4), а также теоремы «о двух милиционерах» получаем:

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = M.$$

Более того, применяя теорему Беппо Леви к любому множеству из $\mathcal{A}$, получаем из 1), 2), 3):

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \int\limits_E f(x)\,d\mu \leqslant \Phi(E), \tag{4.5}$$

т. е. $f(x) \in K$. ⊠

Этап 4. Покажем теперь, что для любого $E \in \mathcal{A}$

$$\Phi(E) - \int\limits_E f(x)\,d\mu = 0.$$

Заметим, что функция множества

$$\lambda(E) \equiv \Phi(E) - \int\limits_E f(x)\,d\mu$$

неотрицательна в силу (4.5) и обладает всеми свойствами меры. Далее, она абсолютно непрерывна относительно меры μ. Если $\lambda \not\equiv 0$, то в силу леммы 3 существует такое число $n \in \mathbb{N}$ и такое множество $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и для любого $E \in \mathcal{A}$ верно неравенство

$$\frac{1}{n}\mu(E \cap B) \leqslant \lambda(E \cap B).$$

Обозначим для краткости $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и положим $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$, где $\chi_B(x)$ — индикаторная функция множества B. Тогда при всех $E \in \mathcal{A}$ с учётом $f(x) \in K$ получим

$$\int\limits_E h(x)\,d\mu =$$
$$= \int\limits_E f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \int\limits_E f(x)\,d\mu + \lambda(E \cap B) =$$
$$= \int\limits_E f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) - \int\limits_{E \cap B} f(x)\,d\mu = \int\limits_{E \setminus B} f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(E \setminus B) + \Phi(E \cap B) = \Phi(E).$$

Это означает, что $h \in K$. Но, с другой стороны,

$$\int\limits_X h(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(B) > M,$$

что приводит нас к противоречию с определением M.

Следовательно, существование такой функции f, что

$$\Phi(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu \quad \text{при всех} \quad A \in \mathcal{A},$$

доказано.

Этап 5. Докажем единственность (с точностью до μ-эквивалентности). Пусть при всех $A \in \mathcal{A}$

$$\Phi(A) = \int\limits_A f_1(x)\,d\mu = \int\limits_A f_2(x)\,d\mu.$$

Тогда для всех

$$A_n \equiv \left\{x \mid f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем в силу неравенства Чебышёва

$$\mu(A_n) \leqslant n \int\limits_{A_n} (f_1(x) - f_2(x))\, d\mu =$$

$$= n \int\limits_{A_n} f_1(x)\, d\mu - n \int\limits_{A_n} f_2(x)\, d\mu = n\,(\Phi(A_n) - \Phi(A_n)) = 0.$$

Аналогично, для $B_m = \left\{x \mid f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{m}\right\}$ имеем $\mu(B_m) = 0$. Следовательно,

$$\mu\{x \in X \mid f_1(x) \neq f_2(x)\} \equiv \mu\big((\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\cup_{m\in\mathbb{N}} B_m)\big) = 0,$$

т. е. $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду.

Теорема доказана.

§ 5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по ходу текста.

Задача 1. Доказать, что из счётной аддитивности меры (заряда) следует конечная аддитивность. *Указание.* Докажите сначала, что пустое множество имеет нулевую меру (заряд).

Задача 2. Доказать лемму 1 на с. 196.

Задача 3. Показать, что в доказательстве теоремы 1 множество A^- измеримо и $\Phi(A^-) = a$.

Задача 4. Показать, что в доказательстве теоремы 1 A^- — отрицательное множество. *Предостережение.* Требуется показать существенно более сильное утверждение, чем $\Phi(A^-) < 0$.

Задача 5. Показать, что верхняя и нижняя вариации заряда суть σ-аддитивные функции множества.

Задача 6. Показать, что если заряд Φ абсолютно непрерывен относительно меры μ, то то же можно сказать о его верхней и нижней вариациях.

Задача 7. Доказать, что функции $g_n(x)$, использованные в доказательстве теоремы Радона—Никодима, измеримы и интегрируемы на X.

Задача 8. 1) Определяет ли функция Кантора на отрезке $[0;1]$ некоторую меру по формуле (1.1)?
2) Что можно сказать об этой мере по отношению к мере Лебега?

Задача 9. Обобщить теорему 2 на случай, когда μ является σ-конечной мерой.

Задача 10*. Пусть $g(x)$ — произвольная монотонно неубывающая функция, определённая на отрезке $[0;1]$. Продолжим её константой $g(a)$ слева от a и константой $g(b)$ справа от b. Рассмотрим полукольцо S всех промежутков, вложенных в отрезок $[0;1]$, и определим на этом полукольце меру m следующим образом (при всех $a, b \in [0;1]$, $b \geqslant a$):

$$\begin{aligned} m([a;b]) &= g(b+0) - g(a-0); \\ m([a;b)) &= g(b-0) - g(a-0); \\ m((a;b]) &= g(b+0) - g(a+0); \\ m((a;b)) &= g(b-0) - g(a+0). \end{aligned}$$

1) Доказать, что m — действительно мера на S, т. е. неотрицательная σ-аддитивная функция промежутка. (Доказательство σ-аддитивности развивает идеи лекции 1 тома 1.)

Пользуясь продолжением меры с полукольца на σ-алгебру, можно получить меру μ_g, определенную на некоторой σ-алгебре. (Нам важен лишь этот факт; доказательство можно, но не обязательно для решения данной задачи, прочитать у Колмогорова, Фомина.)

2) Будет ли мера μ_g абсолютно непрерывной относительно классической меры Лебега?

3) Может ли при некоторой функции $g(x)$ мера μ_g быть сингулярной относительно классической меры Лебега (см. определение выше)?

4) Можно ли, сняв требование монотонности функции g, построить аналогичным образом заряд Φ_g?

Лекция 4

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА. ПРОДОЛЖЕНИЕ

В этой лекции мы продолжим рассмотрение пространств Лебега, начатое в лекции 4 тома I настоящего курса. Для более полного понимания следует посмотреть эту лекцию.

§ 1. Следствие неравенства Гёльдера

Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Напомним, что

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1;$$

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \backsim f} \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ *и* $\mu(X) < +\infty$, *тогда имеют место следующие свойства:*

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \text{для всех} \quad f \in L^q(X),$$

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f \in L^\infty(X).$$

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\mu(X) < +\infty$. Тогда в силу неравенства Гёльдера с параметрами

$$q_1 = \frac{q}{p}, \quad q_2 = \frac{q_1}{q_1 - 1} = \frac{q}{q - p}$$

имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_X |f(x)|^p \, \mu(dx) = \int\limits_X |f(x)|^p \, 1 \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} \left(\int\limits_X 1 \, \mu(dx) \right)^{1 - p/q} =$$

$$
= \left(\int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} [\mu(X)]^{1-\frac{p}{q}},
$$

откуда сразу же получаем первое утверждение теоремы.

Шаг 2. Теперь, если мы в первом неравенстве утверждения теоремы положим $q = +\infty$, то получим следующее неравенство

$$
\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{1/p} \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f \in L^\infty(X).
$$

Откуда вытекает предельное неравенство

$$
\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty.
$$

Шаг 3. Теперь докажем, что

$$
\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty,
$$

откуда и будет следовать второе утверждение теоремы.

□ Действительно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся такое μ-измеримое подмножество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что $\mu(A_\varepsilon) > 0$ и имеет место неравенство

$$
|f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in A_\varepsilon.
$$

Отсюда вытекает неравенство

$$
\|f\|_p \geqslant \left(\int\limits_{A_\varepsilon} |f(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p} \geqslant [\|f\|_\infty - \varepsilon] \, [\mu(A_\varepsilon)]^{1/p},
$$

$$
\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon,
$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает искомое утверждение. ⊠

Т е о р е м а   д о к а з а н а.

§ 2. Одна интерполяционная лемма

Справедлива одна интерполяционная лемма.

Пусть $1 \leqslant t \leqslant r \leqslant s \leqslant +\infty$ и

$$
\frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{s} + \frac{1-\vartheta}{t}, \quad \vartheta \in [0, 1].
$$

Л е м м а 1. *Имеет место вложение*

$$
L^s(X) \cap L^t(X) \subset L^r(X)
$$

и справедлива оценка

$$
\|f\|_r \leqslant \|f\|_s^\vartheta \|f\|_t^{1-\vartheta}.
$$

Доказательство.

Действительно, находим

$$\int\limits_X |f|^r\,\mu(dx) = \int\limits_X |f|^{\vartheta r}|f|^{(1-\vartheta)r}\,\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^{\vartheta r \frac{s}{\vartheta r}}\,\mu(dx)\right)^{\vartheta r/s} \left(\int\limits_X |f|^{(1-\vartheta)r\frac{t}{(1-\vartheta)r}}\,\mu(dx)\right)^{\frac{(1-\vartheta)r}{t}}.$$

Мы использовали неравенство Гёльдера, которое можно применить, так как

$$\frac{\vartheta r}{s} + \frac{(1-\vartheta)r}{t} = 1,$$

где

$$\frac{s}{r\vartheta} \geqslant \frac{s}{r} \geqslant 1.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Заметим, что утверждение этой леммы тривиально в случае μ-ограниченных множеств $X : \mu(X) < +\infty$. Действительно, из теоремы 1 вытекает цепочка вложений

$$L^t(X) \subset L^r(X) \subset L^s(X).$$

Однако в случае бесконечной меры утверждение леммы нетривиально.

§ 3. Обобщённое неравенство Гёльдера

Справедливо обобщённое неравенство Гёльдера.

Теорема 2. *Пусть* $f_k \in L^{p_k}(X)$, *причём* $p_k \in (1, +\infty)$ *при* $k = \overline{1, n}$ *и*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}, \quad r \in [1, +\infty).$$

Тогда имеет место обобщённое неравенство Гёльдера:

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\cdots\|f_n\|_{p_n}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Доказательство проведём по индукции.

Шаг 1. Прежде всего при $n = 2$ в силу неравенства Гёльдера имеет место следующее неравенство:

$$\|f_1 \cdot f_2\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}.$$

□ Действительно, справедлива цепочка неравенств:

$$\|f_1 \cdot f_2\|_r = \left(\int\limits_X |f_1|^r |f_2|^r\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_X |f_1|^{rp}\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |f_1|^{rq}\,dx\right)^{1/q}\right)^{1/r} = \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}$$

при условии

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad rp = p_1, \quad rq = p_2 \Rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Пусть обобщённое неравенство Гёльдера доказано для $n = N - 1$; докажем его для $n = N$. Действительно, пусть

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_{N-1}.$$

Из неравенства Гёльдера получим цепочку неравенств:

$$\|f \cdot f_N\|_r = \left(\int\limits_X |f|^r |f_N|^r\,\mu(dx)\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_X |f|^{rp}\,\mu(dx)\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |f_N|^{rq}\,\mu(dx)\right)^{1/q}\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^{rp}\,\mu(dx)\right)^{1/(rp)} \left(\int\limits_X |f_N|^{rq}\,\mu(dx)\right)^{1/(rq)} =$$

$$= \|f\|_{p^*}\|f_N\|_{p_N},$$

где

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad rp = p^*, \quad rq = p_N.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{r}{p^*} + \frac{r}{p_N} = 1 \Rightarrow \frac{1}{p^*} + \frac{1}{p_N} = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, по индукции мы приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 4. Теорема Рисса

Теперь зададимся следующим вопросом: какой явный вид имеют скобки двойственности между сопряжёнными банаховыми пространствами $L^p(X,\mu)$ и $(L^p(X,\mu))^*$? Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема Рисса.

Теорема 3. *Сопряжённым к банахову пространству $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является банахово пространство $L^q(X,\mu)$, где*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

причём имеет место явное представление для скобок двойственности:

$$\langle \Phi_g, f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_X f(x)g(x)\,\mu(dx) \tag{4.1}$$

для всех

$$f \in L^p(X,\mu), \quad g \in L^q(X,\mu). \tag{4.2}$$

Отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрией.

Доказательство.

Шаг 1. Сначала покажем, что формула (4.1) при $p > 1$ для каждого $g \in L^q(X,\mu)$ задаёт некоторый линейный и непрерывный функционал на $L^p(X,\mu)$. И, кроме того, имеет место равенство норм

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q.$$

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} |\langle \Phi_g, f\rangle| =$$

$$= \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \left| \int\limits_X f(x)g(x)\,\mu(dx) \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \leqslant \|g\|_q, \tag{4.3}$$

из которой, в частности, вытекает, что $\Phi_g \in (L^p(X,\mu))^*$.

Шаг 2. Докажем, что при $p > 1$ на самом деле имеет место равенство

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q.$$

Это равенство, очевидно, выполнено, если $g = \vartheta$. Пусть $\|g\|_q > 0$. Возьмем в формуле (4.1) функцию

$$f = \frac{\operatorname{sign}(g)|g|^{q/p}}{\|g\|_q^{q/p}}.$$

Заметим, что

$$\|f\|_p^p = \frac{\int\limits_X |g(x)|^q \, \mu(dx)}{\|g\|_q^q} = 1 \Rightarrow \|f\|_p = 1.$$

Тогда имеет место равенство

$$\langle \Phi_g, f \rangle = \int\limits_X g(x) f(x) \, \mu(dx) = \int\limits_X \frac{|g(x)|^{q/p+1}}{\|g\|_q^{q/p}} \, \mu(dx) =$$
$$= \frac{1}{\|g\|_q^{q/p}} \int\limits_X |g(x)|^q \; \mu(dx) = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Откуда сразу же получаем, что

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\langle \Phi_g, f \rangle| \geqslant \|g\|_q.$$

Значит, отсюда и из (4.3), действительно, приходим к следующему равенству:

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q \quad \text{при} \quad p > 1.$$

Шаг 3. Рассмотрим теперь случай $p = 1$, тогда $q = +\infty$. Аналогично случаю $p > 1$ для линейного непрерывного функционала (4.1) в силу неравенства Гёльдера вытекает оценка

$$\|\Phi_g\|_{1*} \leqslant \|g\|_\infty.$$

С другой стороны, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся такое μ-измеримое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ с положительной мерой $\mu(A_\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство

$$|g(x)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in A_\varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$. Теперь введём функцию $f \in L^1(X, \mu)$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sign}(g)(x)}{\mu(A_\varepsilon)} \chi_{A_\varepsilon}(x), \quad \chi_{A_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\varepsilon; \\ 0, & x \in X \backslash A_\varepsilon. \end{cases}$$

Из вида функции $f(x)$ вытекает равенство

$$\int\limits_X |f(x)| \, \mu(dx) = \frac{\int\limits_{A_\varepsilon} \mu(dx)}{\mu(A_\varepsilon)} = \frac{\mu(A_\varepsilon)}{\mu(A_\varepsilon)} = 1.$$

Но тогда имеет место неравенство

$$\int\limits_X f(x)g(x)\,\mu(dx) \geqslant \frac{1}{\mu(A_\varepsilon)}\int\limits_{A_\varepsilon}|g(x)|\,\mu(dx) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\mu(A_\varepsilon)}\left[\|g\|_\infty - \varepsilon\right]\mu(A_\varepsilon) = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\|\Phi_g\|_{1*} \geqslant \|g\|_\infty \Rightarrow \|\Phi_g\|_{1*} = \|g\|_\infty \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Тем самым на этом этапе мы доказали, что отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрической инъекцией всего пространства $L^q(X,\mu)$ в пространство $(L^p(X,\mu))^*$ при $p \in [1,+\infty)$.

Шаг 4. Докажем, что это отображение является сюръекцией. Рассмотрим случай конечной меры μ, поскольку из доказательства видно, что все результаты распространяются и на случай σ-конечной меры μ.

Итак, пусть $\Phi \in (L^p(X,\mu))^*$. Пусть $\chi_A(x)$ — это характеристическая функция множества $A \in \mathcal{A}$. Введём обозначение

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Phi, \chi_A \rangle, \quad \chi_A \in L^p(X,\mu), \tag{4.4}$$

поскольку $\mu(\chi_A) < +\infty$.

Докажем, что $\nu(A)$ — это счётно-аддитивная функция множества $A \subset \mathcal{A}$.

$\square$ Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — это система попарно непересекающихся множеств, исчерпывающая A, т. е.

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing \quad \text{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^N \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^N \chi_{A_n} \right\rangle.$$

Заметим, что

$$f_N(x) := \sum_{n=1}^N \chi_{A_n}(x) \to f(x) := \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}(x) \quad \text{поточечно по } x \in X,$$

причём ряд в правой части сходится для каждого $x \in X$. Кроме того, имеет место оценки

$$|f_N(x)| \leqslant 1, \quad |f(x)| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\varphi_N(x) := |f_N(x) - f(x)|^p \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{при} \quad N \to +\infty$$

$$\varphi_N(x) \leqslant 2^p.$$

Поэтому из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, применённого к функции $\varphi_N(x)$, получим предельное свойство

$$f_N \to \chi_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n} \quad \text{сильно в} \quad L^p(X, \mu). \tag{4.5}$$

Поскольку $\Phi \in (L^p(X, \mu))^*$, то в силу (4.5) получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle \to \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n} \right\rangle = \langle \Phi, \chi_A \rangle = \nu(A)$$

при $N \to +\infty$. Итак, имеем

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).$$

Тем самым, доказали счётную аддитивность функции множества $\nu(A)$. ⊠

Докажем теперь абсолютную непрерывность функции множества ν относительно меры μ.

□ Действительно, имеет место цепочка соотношений

$$|\nu(A)| = |\langle \Phi, \chi_A \rangle| \leqslant \|\Phi\|_{p*} \|\chi_A\|_p =$$
$$= \|\Phi\|_{p*} \left(\int_A 1 \, \mu(dx) \right)^{1/p} = \|\Phi\|_{p*} \left[\mu(A) \right]^{1/p}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\nu(A) = 0, \quad \text{как только} \quad \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A},$$

т. е. мы доказали абсолютную непрерывность счётно-аддитивной функции множеств $\nu(A)$ относительно меры Лебега μ на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$. ⊠

Теперь напомним одну важную теорему теории меры и интеграла Лебега:

Пусть μ — это конечная мера на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$. Пусть функция множеств ν является конечной и счётно-аддитивной на том же измеримом пространстве.

Т е о р е м а Р а д о н а — Н и к о д и м а. *Функция множеств $\nu(A)$ абсолютно непрерывна относительно меры μ в точности тогда, когда существует такая μ-интегрируемая функция g, что имеет место представление*

$$\nu(A) = \int\limits_A g(x)\,\mu(dx) \quad \textit{для всех} \quad A \in \mathcal{A}. \tag{4.6}$$

Тем самым для введённой функции множеств ν выполнены все условия теоремы Радона—Никодима. Таким образом, найдётся такая μ-интегрируемая функция $g(x)$, что имеет место представление (4.6). Осталось доказать, что $g \in L^q(X,\mu)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle \Phi, \chi_A \rangle = \int\limits_X g(x)\chi_A(x)\,\mu(dx). \tag{4.7}$$

Пусть $f(x)$ — это простая функция, тогда из (4.7) получим

$$\langle \Phi, f \rangle = \int\limits_X g(x)f(x)\,\mu(dx). \tag{4.8}$$

В силу плотности множества простых функций во множестве измеримых и ограниченных функций $B(X)$ приходим к выводу, что (4.8) справедливо для $f \in B(X)$.

Шаг 5. Теперь осталось доказать, что $g \in L^q(X,\mu)$ при $p > 1$, $q = p/(p-1)$. С этой целью введём специально выбранную функцию из $B(X)$. Именно, пусть

$$f_n(x) = |g(x)|^{q/p}\chi_{A_n}(x)\,\mathrm{sign}(g), \quad A_n = \{x:\ |g(x)| \leqslant n\}.$$

Понятно, что множество A_n является μ-измеримым в силу μ-измеримости функции $g(x)$. Тогда, с одной стороны,

$$\langle \Phi, f_n \rangle = \int\limits_{A_n} |g|^{q/p}|g|\,\mu(dx) = \int\limits_{A_n} |g(x)|^q\,\mu(dx),$$

поскольку

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{q}{p} = q.$$

С другой стороны,

$$|\langle \Phi, f_n \rangle| \leqslant \|\Phi\|_{p*}\|f_n\|_p.$$

Так что имеет место неравенство

$$\int\limits_{A_n} |g(x)|^q\,\mu(dx) \leqslant \|\Phi\|_{p*}\left(\int\limits_{A_n} |g(x)|^q\,\mu(dx)\right)^{1/p}.$$

Значит,

$$\left(\int_X |g(x)|^q \chi_{A_n}(x)\,\mu(dx)\right)^{1/q} \leqslant \|\Phi\|_{p*}.$$

В силу леммы Фату приходим к выводу, что

$$g \in L^q(X, \mu).$$

Шаг 6. Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Докажем, что функция $g \in L^\infty(X, \mu)$. С этой целью рассмотрим множество

$$A \equiv \{x : \ |g(x)| > \|\Phi\|_{1*}\}.$$

Докажем, что это множество имеют нулевую μ-меру Лебега. Действительно, предположим, что $\mu(A) > 0$. Тогда

$$\left\langle \Phi, \frac{\chi_A \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle = \frac{1}{\mu(A)} \int_X |g(x)|\chi_A(x)\,\mu(dx) > \frac{1}{\mu(A)}\mu(A)\|\Phi\|_{1*} = \|\Phi\|_{1*}.$$

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|\Phi\|_{1*} = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} |\langle \Phi, f\rangle| \geqslant \left\langle \Phi, \frac{\chi_A \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle > \|\Phi\|_{1*},$$

поскольку

$$\int_X \left| \frac{\chi_A \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right| \mu(dx) = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1.$$

Значит,

$$\|\Phi\|_{1*} > \|\Phi\|_{1*}.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\mu(A) = 0$. И значит, почти всюду $|g(x)| \leqslant \|\Phi\|_*$. Тем самым доказано, что $g \in L^\infty(X, \mu)$.

Шаг 7. Стало быть, мы получили следующий результат. Для произвольного линейного непрерывного функционала $\Phi \in (L^p(X, \mu))^*$ при $p \in [1, +\infty)$ найдётся такая функция $g \in L^q(X, \mu)$ с $q = p/(p-1)$, что имеет место равенство

$$\langle \Phi, f\rangle = \int_X g(x) f(x)\,\mu(dx),$$

справедливое для всех простых функций $f(x)$, но, как известно, множество простых функций в случае конечной меры μ плотно в $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$. Стало быть, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

С е м и н а р – Л е к ц и я 5

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

§ 1. Полнота пространств Лебега

Мы рассматриваем пространства $L^p(\Omega)$, где Ω есть некоторое измеримое пространство (конечной или бесконечной, но σ-конечной меры), $p \in [1; +\infty]$.

Т е о р е м а 1. *Пространства $L^p(\Omega)$ полны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть дана последовательность $\{f_n\}$, фундаментальная по норме пространства $L^p(\Omega)$. Мы докажем, что существует элемент $f \in L^p(\Omega)$ такой, что $f_n \to f$ в $L^p(\Omega)$.

Этап I. $p = 1$.

Шаг 1. Следует начать с выбора представителей элементов f_n. Сделаем этот выбор произвольным образом. Из дальнейшего будет ясно, что результат не зависит от конкретного выбора. Теперь будем считать, что $f_n(x)$ суть не что иное, как выбранные представители элементов f_n. По определению фундаментальной последовательности имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \ \ \|f_n(x) - f_m(x))\|_1 < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Шаг 2. Положим $N_0 = 0$. Далее при каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $N_k = N\left(\frac{1}{2^k}\right)$ в смысле (1.1). Нетрудно видеть, что при каждом $k \in \mathbb{N}$

$$f_{N_k} = f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right). \tag{1.2}$$

С другой стороны, в силу выбора N_k имеем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\|f_{N_0}\|_1 + \|f_{N_1} - f_{N_0}\|_1 + \ldots + \left\|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right\|_1 \leqslant \|f_{N_0}\|_1 + \|f_{N_1} - f_{N_0}\|_1 + 1,$$

откуда

$$\int\limits_\Omega \left(|f_{N_0}| + |f_{N_1} - f_{N_0}| + \ldots + \left|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right|\right) \mu(dx) < C.$$

Шаг 3. Тогда по теореме Беппо Леви ряд

$$|f_{N_0}| + |f_{N_1} - f_{N_0}| + \ldots + \left|f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right| + \ldots$$

сходится почти всюду на Ω к некоторой функции $\widetilde{f}(x)$, причём $\int_\Omega \widetilde{f}(x)\,d\mu \leqslant C$. Следовательно, то же верно для ряда

$$f_{N_0} + (f_{N_1} - f_{N_0}) + \ldots + \left(f_{N_k} - f_{N_{k-1}}\right) + \ldots. \tag{1.3}$$

Обозначив сумму последнего через $f(x)$, с учётом (1.2) мы можем написать, что

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{N_k}(x), \tag{1.4}$$

где предел существует почти всюду. (В остальных точках доопределим функцию $f(x)$ нулём.) Тогда функция $f(x)$ измерима как предел почти всюду последовательности измеримых функций, а в силу очевидной оценки $|f(x)| \leqslant \widetilde{f}(x)$ и свойств интеграла Лебега получаем, что $\int_\Omega |f(x)|\,d\mu \leqslant C$ и $f \in L^1(\Omega)$.

Шаг 4. Итак, мы построили подпоследовательность $\{f_{N_k}\}$ исходной последовательности $\{f_n\}$, сходящуюся почти всюду к некоторой функции $f \in L^1(\Omega)$. Теперь наша задача показать, что $f_n \to f$ по норме пространства $L^1(\Omega)$. Очевидно, достаточно доказать лишь, что $f_{N_k} \to f$ в $L^1(\Omega)$, поскольку для фундаментальной последовательности сходимость некоторой её подпоследовательности гарантирует сходимость всех последовательности к тому же пределу.

Шаг 5. Заметим, что в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$, а следовательно, и её подпоследовательности $\{f_{N_k}\}$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall m, n \geqslant K(\varepsilon) \int\limits_\Omega |f_{N_m} - f_{N_l}|\,\mu(dx) < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Воспользовавшись теоремой Фату, перейдём в (1.5) к пределу при $l \to \infty$. Тогда получим, что при всех $m > K(\varepsilon)$ в смысле (1.5)

$$\int\limits_\Omega |f_{N_m} - f|\,\mu(dx) \leqslant \varepsilon. \tag{1.6}$$

А это означает не что иное, как сходимость $f_{N_k} \to f$ в $L^1(\Omega)$.

Шаг 6. Теперь ясно, что исходный выбор представителей не мог повлиять на сходимость почти всюду ряда (1.3); соотношение (1.4) также выполнялось бы почти всюду; наконец, в соотношениях (1.5) и (1.6) также ничего бы не поменялось, кроме значений подынтегральных функций на множествах меры нуль.

Итак, для случая $p = 1$ теорема доказана.

Замечание 1. 1. В данной ситуации нам было безразлично, конечна или бесконечна мера множества Ω. 2. Попутно мы доказали, что из последовательности, фундаментальной по норме $L^1(\Omega)$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω.

Этап II. $p = \infty$.

Шаг 1. По-прежнему начнём с выбора функций $f_n(x)$ — представителей элементов $f_n \in L^\infty(\Omega)$. Далее, вспомним, что если $g \in L^\infty(\Omega)$, то

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|g\|_\infty\}\right) = 0.$$

С учётом этого можно утверждать, что $\mu(\Omega_{nm}) = 0$, где

$$\Omega_{nm} = \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Шаг 2. Положим теперь $\Omega^* = \Omega \setminus \cup_{n,m=1}^\infty \Omega_{nm}$. Очевидно, что $\mu\left(\cup_{n,m=1}^\infty \Omega_{nm}\right) = 0$ и что на множестве Ω^* последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно фундаментальна, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon), \forall x \in \Omega^*\ \ |f_n(x) - f_m(x))| < \varepsilon. \quad (1.7)$$

Шаг 3. Но из (1.7) следует равномерная сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на Ω^*, причём для предельной функции $f(x)$ верно: $\sup_{x \in \Omega^*} |f(x)| \leqslant \sup_{n \in N} \|f_n\|_\infty$, поэтому $f(x) \in L^\infty(\Omega)$. Далее, переходя в (1.7) к пределу при $m \to \infty$ при фиксированном n, получим:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in \Omega^*\ \ |f_n(x) - f(x))| \leqslant \varepsilon. \quad (1.8)$$

Шаг 4. Поскольку после доопределения функции $f(x)$ на $\Omega \setminus \Omega^*$ произвольным образом условие (1.8) не нарушается, мы получаем, что $f_n \to f$ в $L^\infty(\Omega)$.

Осталось лишь заметить, что любой другой выбор представителей не повлияет на результат.

Теперь теорема доказана и для случая $p = \infty$.

Этап III. $p \in (1; +\infty)$.

Шаг 1. В этом случае, в отличие от предыдущих, придётся рассмотреть отдельно множества Ω конечной и бесконечной меры.

Шаг 2. $\mu(\Omega) < +\infty$. Тогда для всех $g \in L^p(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega |g|\, \mu(dx) = \int\limits_\Omega |g| \cdot 1\, \mu(dx) \leqslant \|g\|_p \cdot \left(\int\limits_\Omega 1\, \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_p \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p'}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Следовательно, все элементы $f_n \in L^p(\Omega)$ принадлежат также пространству $L^1(\Omega)$ и, более того, из фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ по норме пространства $L^p(\Omega)$ следует её фундаментельность по норме $L^1(\Omega)$. Поэтому (как и прежде, начав с выбора представителей), в силу доказанного в I мы получим функцию $f \in L^1(\Omega)$ такую, что $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Шаг 3. Заметим теперь, что полученная функция принадлежит также пространству $L^p(\Omega)$. Действительно, поскольку фундаментальная последовательность ограничена, то для $C \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^p \geqslant 0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} |f_{N_k}|^p \, \mu(dx) \leqslant C,$$

где $\{f_{N_k}\}$ — почти всюду сходящаяся к f подпоследовательность, выбранная из $\{f_n\}$ согласно I. Но тогда по теореме Фату получаем $\int_\Omega |f|^p \, d\mu \leqslant C$, т. е. $f \in L^p(\Omega)$. Осталось лишь доказать, что $\|f_n - f\|_p \to 0$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу фундаментальности последовательности $\{f_{N_k}\}$ получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K(\varepsilon) > 0 \;\; \forall l, m > K(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |f_{N_l} - f_{N_m}|^p \, \mu(dx) < \varepsilon.$$

Шаг 4. Устремляя m к бесконечности, по теореме Фату получаем, что при тех же $l > K(\varepsilon)$ верно неравенство $\int_\Omega |f_{N_l} - f|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon$. Поскольку это рассуждение можно провести для произвольного $\varepsilon > 0$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K(\varepsilon) > 0 \, \forall l > K(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |f_{N_l} - f|^p \, \mu(dx) \leqslant \varepsilon,$$

т. е. $\|f_{N_k} - f\|_p \to 0$. Очевидно, вся исходная последовательность также стремится к f в $L^p(\Omega)$.

Шаг 5. Пусть $\mu(\Omega) = +\infty$ (но при этом мера на Ω σ-конечна). По определению σ-конечности меры на Ω получаем, что Ω может быть представлено в виде объединения измеримых подмножеств конечной меры:

$$\Omega = \sqcup_{q=1}^{\infty} \Omega_q, \quad \text{где} \quad \mu(\Omega_q) < +\infty, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Шаг 6. Как обычно, выберем представителей каждого элемента f_n и заметим к тому же, что сужения выбранных функций на каждое из Ω_q измеримы и принадлежат $L^p(\Omega_q)$. Более того, если $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\forall l, m > K(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |f_l - f_m|^p \, \mu(dx) < \varepsilon,$$

то очевидным образом при всех $l, m > K(\varepsilon)$ (где $K(\varepsilon)$ то же)

$$\forall l, m > K(\varepsilon), \forall q \in \mathbb{N} \int\limits_{\Omega_q} |f_l - f_m|^p \, \mu(dx) < \varepsilon.$$

Шаг 7. Поэтому согласно пункту 1. из $\{f_n(x)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на Ω_1. Из неё можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на Ω_2. Продолжим этот процесс, а затем с помощью диагонального процесса выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду на всех Ω_q, т. е. сходящуюся почти всюду на Ω. Обозначим соответствующую предельную функцию через $f(x)$. Из пункта A следует, что $\|f_{n_k} - f\|_{L^p(\Omega_q)} \to 0$ при всех $q \in \mathbb{N}$. Тогда имеем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\Omega} |f_{n_k}|^p \, \mu(dx) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^p_{L^p(\Omega)},$$

откуда по теореме Фату

$$\int\limits_{\Omega} |f|^p \, \mu(dx) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^p_{L^p(\Omega)},$$

т. е. $f \in L^p(\Omega)$.

Шаг 8. Осталось доказать, что $\|f_{n_k} - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ (как и прежде, из этого будет следовать аналогичное утверждение для всей последовательности). Но это вытекает из теоремы Фату совершенно аналогично предыдущему случаю.

Замечание 1. Мы и для случая σ-конечной меры построили подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Замечание 2. Полезно сравнить ход доказательства полноты в случае пространств Лебега и в случае пространств $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций со значениями в полном метрическом пространстве M_2. В обоих случаях мы действуем в три этапа: 1) строим некоторый предельный объект, 2) доказываем, что он принадлежит нужному пространству, 3) доказываем, что исходная фундаментальная последовательность действительно к нему сходится, причём на последнем этапе мы с помощью некоторых соображений (в данном случае – теоремы Фату) совершаем предельный переход в условии фундаментальности.

Теорема доказана.

Неравенства Кларксона и равномерная выпуклость пространств Лебега.

Неравенства Кларксона для функций $f, g \in L^p(X)$ имеют вид (с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \quad p \in [2; +\infty),$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}, \quad p \in (1; 2].$$

Мы приведём полный вывод первого неравенства.

Шаг 0. Заметим, что для любых $a, b \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ верны неравенства

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r), \tag{0a; 0b}$$

откуда для $s \leqslant 1$

$$a^s + b^s \geqslant (a+b)^s. \tag{1.9}$$

Для доказательства неравенств $(0a)$ и $(0b)$ мы воспользуемся их однородностью и разделим все три выражения на a^r. (Случай $a = 0$ тривиален.) Отношение $\frac{b}{a}$ снова обозначим символом b. С учётом этих рассуждений нам остаётся доказать неравенства

$$1 + b^r \leqslant (1+b)^r \leqslant 2^{r-1}(1 + b^r). \tag{0a'; 0b'}$$

Очевидно, что неравенство $(0a')$ обращается в равенство при $b = 0$ (найти эту точку можно, например, с помощью дифференцирования). Возьмём производные от левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{d}{db}(1 + b^r) = rb^{r-1}, \quad \frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}.$$

Очевидно, что при $b \geqslant 0$, $r - 1 \geqslant 0$ имеет место следующее неравенство, связывающее указанные производные:

$$rb^{r-1} \leqslant r(1+b)^{r-1}. \tag{1.10}$$

Поскольку при $b = 0$ в $(0a')$ достигается равенство, то из (1.10) получаем неравенство $(0a')$ при всех $b \geqslant 0$.

Чтобы теперь доказать $(0b')$, заметим, что это неравенство обращается в равенство при $b = 1$. Далее,

$$\frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}, \quad \frac{d}{db}2^{r-1}(1 + b^r) = 2^{r-1}rb^{r-1}.$$

Достаточно показать, что

$$r(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1,$$

$$r(1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1.$$

Но это очевидно, если разделить обе части неравенств на положительное число $r2^{r-1}$ и представить их в виде соответственно

$$\left(\frac{1+b}{2}\right)^{r-1} \quad \text{и} \quad b^{r-1}.$$

Таким образом, неравенства $(0a; 0b)$ полностью доказаны.

Далее, неравенство (1.9) следует из ($0a$), если в последнем в качестве a, b, r взять соответственно a^s, b^s, $\frac{1}{s}$.

Шаг 1. Теперь докажем, что для всех комплексных α, β и всех $p \geqslant 2$ верно неравенство

$$\left(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.11}$$

Это имеет место в силу легко проверяемого равенства параллелограмма

$$\left(|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и неравенства

$$\left(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant |\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2,$$

которое получается, если положить в (1.9) $a = |\alpha+\beta|^p$, $b = |\alpha-\beta|^p$, $s = \frac{2}{p}$.

Шаг 2. Возводя (1.11) в положительную степень p и пользуясь далее (0b) с $r = \frac{p}{2} \geqslant 1$, имеем:

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right) = 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right),$$

откуда следует

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right), \tag{1.12}$$

где, напоминаем, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $p \geqslant 2$.

Шаг 3. Переписав теперь только что полученное числовое неравенство (1.12) в виде

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p, \tag{1.13}$$

положив при каждом $x \in X$ $\alpha = f(x)$, $\beta = g(x)$ и проинтегрировав по области X, получим первое неравенство Кларксона.

Для вывода второго неравенства Кларксона используется обратное неравенство Минковского (см., напр.: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988, с. 17) и следующее числовое неравенство, доказательство которого мы здесь не приводим (см. там же, с. 31—32):

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^q + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^q \leqslant \left(\frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{1.14}$$

где по-прежнему $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, но теперь $p\in(1;2]$.

В целях удобства записи будем пользоваться стандартным обозначением

$$\|f\|_u \equiv \left(\int\limits_X |f(x)|^u\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{u}}$$

даже при $u\in(0;1)$, хотя в последнем случае эта величина, конечно, нормой не является (см. обратное неравенство Минковского). Тогда для любой функции $h\in L^p(X)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\||h|^q\|_{p-1} = \left(\int\limits_X |h(x)|^{q(p-1)}\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int\limits_X |h(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{\frac{q}{p}} = \|h\|_p^q. \tag{1.15}$$

В силу (1.15), обратного неравенства Минковского и (1.14) получим:

$$\begin{gathered}
\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q = \left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} \leqslant \\
\leqslant \left(\int\limits_X \left[\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right]^{p-1}\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \\
\leqslant \left(\int\limits_X \left[\frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p\right]\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1},
\end{gathered}$$

что и доказывает второе неравенство Кларксона.

Шаг 4. Теперь убедимся в том, что из неравенств Кларксона следует равномерная выпуклость пространств $L^p(X)$ при $p>1$.

Вначале напомним определение равномерной выпуклости. Банахово пространство B называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенств $\|u\|\leqslant 1$, $\|v\|\leqslant 1$ и $\|u-v\|\geqslant\varepsilon>0$ следует

$$\|u+v\|\leqslant 2(1-\delta(\varepsilon)). \tag{1.16}$$

Легко видеть, что при $p\geqslant 2$ из первого неравенства Кларксона, записанного в виде

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right) - \|f-g\|_p^p,$$

при $\|f\|_p\leqslant 1$, $\|g\|_p\leqslant 1$, $\|f-g\|_p\geqslant\varepsilon>0$ имеем

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2(1-\delta_1(\varepsilon))$$

при $\delta_1(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} > 0$, т. е. (1.16). Далее, при $p \leqslant 2$ из второго неравенства получаем при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$

$$\|f + g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} = 2(1 - \delta_2(\varepsilon))$$

с $\delta_2(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} > 0$, т. е. (1.16).

§ 2. Нелинейный сжимающий оператор

Рассмотрим в области Ω с $\mu(\Omega) < +\infty$ интегральное уравнение вида

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,s) \frac{|u(s)|}{1 + |u(s)|}\, ds, \tag{2.1}$$

где $K(x,s)$ ограничена в $\Omega \times \Omega$ и измерима по s при всех $x \in \Omega$, $u_0 \in L^1(\Omega)$.

Существование и единственность его решения в $L^1(\Omega)$ «при малых» λ легко доказать, воспользовавшись принципом сжимающих отображений. Действительно, если

$$(Au)(x) \equiv u_0(x) + \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,s) \frac{|u(s)|}{1 + |u(s)|}\, ds,$$

то при $z_i(x) = (Au_i)(x)$, $i = 1, 2$, $K_0 = \sup_{\Omega \times \Omega} |K(x,s)|$ имеем

$$\begin{aligned}
\|z_1 - z_2\|_1 &= \int\limits_{\Omega} dx \left| \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,s) \frac{|u_1(s)|}{1 + |u_1(s)|}\, ds - \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,s) \frac{|u_2(s)|}{1 + |u_2(s)|}\, ds \right| = \\
&= |\lambda| \int\limits_{\Omega} dx \left| \int\limits_{\Omega} K(x,s) \left(\frac{|u_1(s)|}{1 + |u_1(s)|} - \frac{|u_2(s)|}{1 + |u_2(s)|} \right) ds \right| \leqslant \\
&\leqslant |\lambda| \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{\Omega} |K(x,s)| \left| \frac{|u_1(s)|}{1 + |u_1(s)|} - \frac{|u_2(s)|}{1 + |u_2(s)|} \right| ds \leqslant \\
&\leqslant |\lambda| K_0 \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{\Omega} |u_1(s) - u_2(s)|\, ds = |\lambda| K_0 \|u_1 - u_2\|_1 \mu(\Omega).
\end{aligned}$$

Мы использовали здесь легко проверяемое непосредственно неравенство

$$\left| \frac{|a|}{1 + |a|} - \frac{|b|}{1 + |b|} \right| \leqslant |a - b|.$$

Очевидно, при

$$|\lambda| < \frac{1}{K_0\mu(\Omega)}$$

отображение A является сжимающим, что гарантирует существование и единственность решения $u(x) \in L^1(\Omega)$ уравнения (2.1) при каждом из указанных λ.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что всякое гильбертово пространство является равномерно выпуклым.

Задача 2. Показать (на контрпримерах), что пространства $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$ не являются строго выпуклыми (и тем более равномерно выпуклыми).

Задача 3*. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве. Показать, что тогда функция $f(x) = \|x\|$ достигает своего минимума на K, и притом ровно в одной точке. *Замечание.* Вот, наряду с критерием сильной сходимости, ещё одно полезное свойство равномерно выпуклых пространств. Как мы теперь знаем, пространства Лебега $L^p(\Omega)$ с $1 < p < +\infty$ таковыми являются.

Семинар–Лекция 6

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ, ДАЛЬНЕЙШИЕ ФАКТЫ

§ 1. Примеры и контрпримеры

Определение 1. *Множество M в банаховом пространстве B называется слабо замкнутым, если из $x_n \rightharpoonup x$, $\{x_n\} \subset M$ следует $x \in M$. (Иными словами, речь идёт о замкнутости в смысле слабой сходимости.)*

Обсудим связь между замкнутостью множества в банаховом пространстве и его слабой замкнутостью.

ПРИМЕР 1. Всякое слабо замкнутое множество замкнуто.

□ Действительно, пусть M — слабо замкнутое множество в банаховом пространстве и $x_n \to x$. Тогда имеем $x_n \rightharpoonup x$, отсюда в силу условия слабой замкнутости $x \in M$, т. е. M — замкнутое множество. ⊠

ПРИМЕР 2. Обратное неверно: не всякое замкнутое множество слабо замкнуто.

□ Действительно, сфера $S_1 = \{x \mid \|x\| = 1\}$ в гильбертовом пространстве замкнута как прообраз замкнутого множества $\{1\}$ на числовой оси при отображении, осуществляемой непрерывной функцией «норма». Однако S_1 не является слабо замкнутым множеством, поскольку, как известно, $e_n \rightharpoonup \vartheta$ (здесь и далее, если речь идёт о гильбертовом пространстве, e_n — элементы ортонормированного базиса), но $\vartheta \notin S_1$. ⊠

ПРИМЕР 3. Замкнутое подпространство является слабо замкнутым.

□ В самом деле, пусть L — (замкнутое) подпространство банахова пространства B, $\{x_n\} \subset L$, $x_n \rightharpoonup x$. Докажем, что $x \in L$. Действительно, в противном случае по одному из следствий из теоремы Хана—Банаха существовал бы функционал $f \in L^*$, для которого $\|f\|_* = 1$, $f|_L = 0$, $\langle f, x\rangle = \|x\| \neq 0$. Тогда в силу слабой сходимости имели бы $0 = \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \neq 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. ⊠

Обсудим теперь некоторые случаи, которые могут возникнуть, когда не выполнено то или иное условие критерия сильной сходимости в равномерно выпуклых банаховых пространствах.

Например, может случиться так, что $u_n \rightharpoonup u$, $\|u_n\| \to C \neq \|u\|$.

ПРИМЕР 4. Так будет при $u_n = e_n$ в гильбертовом пространстве: $u_n \rightharpoonup \vartheta$, $\|u_n\| \to 1 \neq \|\vartheta\|$.

ПРИМЕР 5. Можно привести другой пример: пусть $B = L^2(\mathbb{R})$, $u_n = \chi_{[n;n+1]}(x)$. Тогда, очевидно, $\|u_n\| = 1$. При этом $u_n \rightharpoonup \vartheta$.

□

1. В самом деле, в силу изоморфизма L^2 и $(L^2)^*$ достаточно показать, что при всех $v \in L^2(\mathbb{R})$ верно $(v, u_n) \to 0$. Имеем

$$
\begin{aligned}
(v, u_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x) u_n(x)\, dx = \int\limits_{n}^{n+1} v(x) u_n(x)\, dx \leqslant \\
\leqslant \sqrt{\int\limits_{n}^{n+1} |v(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_{n}^{n+1} |u_n(x)|^2\, dx} = \\
= \sqrt{\int\limits_{n}^{n+1} |v(x)|^2\, dx} \cdot 1 = \sqrt{\int\limits_{n}^{n+1} |v(x)|^2\, dx}\,. \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

2. Поскольку

$$
\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{n}^{n+1} |v(x)|^2\, dx,
$$

в силу необходимого условия сходимости рядов имеем $\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx \to$ $\to 0$, откуда в силу (2.11) заключаем, что $u_n \rightharpoonup \vartheta$. ⊠

ПРИМЕР 6. Заменив в каждом из предыдущих примеров u_{2k} на $\frac{1}{2} u_{2k}$, получим: $u_n \rightharpoonup \vartheta$, $\{\|u_n\|\}$ не имеет предела.

ПРИМЕР 7. Можно привести и обратный пример: $\|u_n\| \to C$, но при этом $\{u_n\}$ не является слабо сходящейся последовательностью.

□

1. Пусть, например, $x_0 \in H$ — некоторый ненулевой элемент гильбертова пространства H. Положим $u_n = (-1)^n (x_0 + e_n)$.

2. Тогда, очевидно, $u_{2k} \rightharpoonup x_0$, $u_{2k+1} \rightharpoonup -x_0$, что исключает возможность сходимости всякой числовой последовательности $\{\langle f, u_n \rangle\}$, если только $\langle f, x_0 \rangle \neq 0$. Что же касается сходимости норм, имеем

$$
\|u_n\|^2 = \|x_0\|^2 + \|e_n\|^2 + 2(x_0, e_n) = \|x_0\|^2 + 1 + 2(x_0, e_n) \to \|x_0\|^2 + 1.
$$

⊠

Замечание 1. Мы говорим «не является слабо сходящейся», а не «не имеет слабого предела», потому что одним из возможных определений слабой сходимости является просто требование существования предела числовой последовательности $\{\langle f, u_n \rangle\}$ для всякого $f \in$

$\in B^*$. Это, вообще говоря, ещё не гарантирует существования такого элемента u, что $\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle$ при всех $f \in B^*$. (См. Иосида. Функциональный анализ. Глава V.)

§ 2. Связь сильной и слабой сходимости

ПРИМЕР 8. Пусть $x_n \rightharpoonup x$ — слабо сходящаяся последовательность элементов гильбертова пространства H. Докажем, что из неё можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой

$$\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right) \to x \quad \text{при } k \to \infty.$$

□

1. Рассмотрим сначала случай $x = \vartheta$. Положим $n_1 = 1$. Поскольку в силу условия слабой сходимости данной последовательности имеем $(x_n, x_{n_1}) \to 0$, то найдётся такое $n_2 > n_1$, что $|(x_{n_2}, x_{n_1})| \leqslant 1$.

2. Далее, по аналогичной причине существует такое $n_3 > n_2$, что $|(x_{n_3}, x_{n_1})| \leqslant \frac{1}{2}$, $|(x_{n_3}, x_{n_2})| \leqslant \frac{1}{2}$.

3. Продолжая эту процедуру далее, на каждом k-ом шаге построим такое $n_{k+1} > n_k$, что

$$|(x_{n_{k+1}}, x_{n_1})| \leqslant \frac{1}{k}, \ldots, |(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{2.1}$$

4. Заметим также, что в силу слабой сходимости последовательности $\{x_n\}$ можно утверждать её ограниченность: $\|x_n\| < C$. Имеем теперь

$$\left\|\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right)\right\|^2 = \frac{1}{k^2}\left[\sum_{i=1}^{k} \|x_{n_i}\|^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}(x_{n_s}, x_{n_i})\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k^2}\left[kC^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}\frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{k^2}\left[kC^2 + 2\sum_{s=2}^{k}\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{s-1}\right] =$$
$$= \frac{1}{k^2}\left[kC^2 + 2\sum_{s=2}^{k}\frac{s-1}{s-1}\right] \leqslant \frac{C^2+2}{k} \to 0,$$

где в первом неравенстве мы учли оценку (2.1), а затем поменяли порядок суммирования в двойной сумме (рекомендуется сделать рисунок, поясняющий это изменение порядка).

5. Таким образом,

$$\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right) \to \vartheta.$$

6. Для рассмотрения общего случая следует применить только что доказанный результат к последовательности $\{y_n\} \equiv \{x_n - x\}$. ⊠

Замечание 2. Это утверждения является частным случаем теоремы Мазура: если $x_n \rightharpoonup x$ в банаховом пространстве B, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая их выпуклая комбинация

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,$$

что $\|x - y_k\| \leqslant \varepsilon$. (См. Иосида. Функциональный анализ. Глава V.)

Это утверждение представляет интерес с точки зрения задач математической физики. В самом деле, если удаётся установить ограниченность последовательности $\{v_n\}$ приближённых решений (например, полученных по методу Галёркина), то в силу соответствующих теорем для сепарабельного или рефлексивного пространства устанавливается существование её слабо сходящейся подпоследовательности $v_{n_k} \rightharpoonup v$, а в силу упомянутого факта можно построить последовательность выпуклых комбинаций элементов $\{v_{n_k}\}$, сильно сходящуюся к тому же пределу v. Это полезно, в частности, тем, что свойства элементов последовательности $\{v_{n_k}\}$, инвариантные относительно образования выпуклой комбинации и предельного перехода (например, свойства гладкости или знакоопределённости), окажутся доказанными и для v, которое в типичной ситуации и будет точным решением.

§ 3. Пространство l^1. Свойство Шура

Как мы помним, $(l^1)^* = m \equiv l^\infty$.

ПРИМЕР 9. Докажем, что в l^1 покоординатная сходимость слабее слабой сходимости. Для этого приведём пример последовательности $x^{(k)}$, не являющейся слабо сходящейся, но обладающей свойством покоординатной сходимости. (Здесь и далее по тексту верхний индекс будет означать номер элемента пространства, нижний — номер элемента числовой последовательности, образующей элемент пространства).

□

1. Положим

$$x^{(k)} = \Bigl(\underbrace{\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k}, 0, 0, \dots\Bigr).$$

2. Очевидно:

1) при всех $k \in \mathbb{N}$ $\|x^{(k)}\| = 1$,

2) имеет место *покоординатная* сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$ к нулевому элементу.

Покажем, что $\{x^{(k)}\}$ не сходится даже слабо (не говоря уже о сильной сходимости).

3. В самом деле, предположим противное: пусть $x^{(k)} \rightharpoonup x$. Тогда, положив

$$f_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l^\infty$$

(заметим, что эти элементы нельзя называть базисными: в l^∞ не может существовать счётного базиса!), получим, что x заведомо является покоординатным пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$.

4. Таким образом, с необходимостью $x = \vartheta$. Далее, положим $f = (1, 1, \ldots) \in l^\infty$. Легко видеть, что $\langle f, x^{(k)} \rangle = 1 \to 1 \neq \langle f, \vartheta \rangle$, т. е. наше предположение о слабой сходимости привело к противоречию. ⊠

ПРИМЕР 10. Пространство l^1 интересно так называемым *свойством Шура* — в нём сильная и слабая сходимость равносильны. (Таким образом, *не только конечномерные* пространства могут обладать свойством Шура.) Докажем это интересное свойство методом «от противного».

□

1. Итак, пусть $x^{(n)} \rightharpoonup x$. Аналогично п. 8 заменяя при необходимости $x^{(n)}$ на $x^{(n)} - x$, можно ограничиться рассмотрением случая $x = \vartheta$.

2. В этом случае, как показано в предыдущем примере, последовательность $\{x^{(n)}\}$ заведомо обладает свойством покоординатной сходимости к нулю. Предположим теперь, что $x^{(n)} \not\to \vartheta$. В таком случае имеется подпоследовательность $x^{(n_\alpha)}$, отграниченная от нуля, т. е. с уществует такое $M > 0$, что при всех $\alpha \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|x^{(n_\alpha)}\| \geqslant M. \tag{3.1}$$

3. С другой стороны, естественно,

$$\|x^{(n_\alpha)}\| < +\infty, \tag{3.2}$$

поскольку $x^{(n_\alpha)} \in l^1$. Теперь наша цель состоит в том, чтобы извлечь из $x^{(n_\alpha)}$ подпоследовательность $x^{(n_{\alpha_k})}$, не обладающую свойством слабой сходимости к ϑ.

4. Положим $\alpha_1 = 1$ и заметим, что в силу (3.1) и (1.2) найдётся такое m_1, что

$$\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| \geqslant \frac{4}{5} M.$$

5. Однако в силу свойства покоординатной сходимости к нулю имеем $x_i^{(n_\alpha)} \to 0$ при $\alpha \to \infty$ для всех i (напоминаем, i — номер «координаты» элемента), поэтому найдётся такое $\alpha_2 > \alpha_1$, что $\sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}$. (Здесь m_1 ранее зафиксировано!) Тогда $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| > \frac{9}{10} M$ и найдётся такое $m_2 > m_1$, что

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| \geqslant \frac{4}{5} M, \qquad \sum_{i=m_2+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}.$$

6. Продолжая эту процедуру аналогичным образом, построим строго возрастающие последовательности $\{m_k\}$ (где $m_0 = 0$), $\{\alpha_k\}$, для которых верно:

$$\sum_{i=1}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| \geqslant \frac{4}{5}M, \quad \sum_{i=m_k+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}. \tag{3.3}$$

7. Введём теперь в рассмотрение функционал $f = (c_1, c_2, \ldots)$, где c_j выберем по следующему принципу. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдём такое k, что $m_{k-1} < j \leqslant m_k$ (оно существует, поскольку в силу нашего построения целые неотрицательные числа m_k образуют возрастающую последовательность) и положим

$$c_j = \operatorname{sgn} x_j^{(n_{\alpha_k})}. \tag{3.4}$$

8. Очевидно, $f \in l^\infty$. Имеем теперь с учётом (3.3), (3.4)

$$\begin{aligned} \langle f, x^{(n_{\alpha_k})} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} \geqslant \\ \geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} \left| x_i^{(n_{\alpha_k})} \right| - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} \left| x_i^{(n_{\alpha_k})} \right| \geqslant \\ \geqslant \frac{4}{5}M - \frac{M}{10} - \frac{M}{10} = \frac{3}{5}M, \end{aligned}$$

т. е. $\langle f, x^{(n_{\alpha_k})} \rangle \not\to 0$ и $x^{(n_{\alpha_k})} \not\rightharpoonup \vartheta$, а следовательно, и $x^{(n)} \not\rightharpoonup \vartheta$. ⊠

Рекомендуется сделать рисунок, иллюстрирующий выбор подпоследовательностей и оценки отрезков сумм.

Замечание 3. Может показаться, что мы вывели сильную сходимость из покоординатной, что было бы очень странно с учётом предыдущего примера. На самом деле, конечно, это не так: мы существенно использовали специально построенный функционал f, отличный от «координатных» функционалов.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Возможно ли существование последовательности $\{u_n\}$, для которой $u_n \rightharpoonup \vartheta$, $\|u_n\| \to \infty$?

Задача 2. Доказать, что последовательность в банаховом пространстве может иметь не более одного слабого предела.

Задача 3. Пусть $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ (ограниченный линейный оператор, определённый на всём B_1), где B_1, B_2 — банаховы пространства. Доказать, что A непрерывен и в смысле слабой сходимости, т. е. если $x_n \rightharpoonup x$ в B_1, то $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в B_2.

Задача 4. Пусть $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ и замыкание образа единичного шара $\{x \in B_1 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ компактно в B_2. (Такие линейные операторы называются *вполне непрерывными*.) Доказать, что A преобразует слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, т. е. если $x_n \rightharpoonup x$ в B_1, то $Ax_n \to Ax$ в B_2.

Задача 5. Доказать, что если $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, где H_1, H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, то из того факта, что для любой слабо сходящейся последовательности $\{v_n\} \subset H_1$ последовательность $\{Av_n\}$ сильно сходится в H_2, следует, что A — вполне непрерывный оператор.

Задача 6. Доказать, что всякое выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве слабо замкнуто. (Заметим, что отсюда сразу же следует слабая замкнутость (замкнутого) подпространства, которую мы установили непосредственно.)

Задача 7*. Пусть X — сепарабельное линейное нормированное пространство. Доказать, что в X^* существует счётное множество, всюду плотное в смысле $*$-слабой сходимости.

Тематическая лекция III

ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Лекция 5

ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ И ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

§ 1. Пространство функций $\mathcal{D}(K)$

Символом $|\alpha|$ будем обозначать длину мультииндекса α:

$$|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+}_{N}.$$

Символом $\partial_{x_k}^{\alpha_k}$ обозначаем частную производную порядка $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+$ по переменной $x_k \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. Символом ∂_x^α будем обозначать следующее выражение:

$$\partial_x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

Символом K_n будем обозначать компакт в $\mathbb{R}^N$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Определение 1. *Семейство компактов $\{K_n\} \subset \mathbb{R}^N$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ будем называть компактно исчерпывающим $\mathbb{R}^N$ семейством, если*

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n, \quad \overline{\operatorname{int}\{K_n\}} = K_n,$$

и, кроме того, имеют место строгие вложения

$$K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots \Subset K_n \Subset K_{n+1} \Subset \cdots \Subset \mathbb{R}^N.$$

Сначала рассмотрим, как строится пространство основных функций $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, которое для простоты часто обозначается как $\mathcal{D}$. Для этого предварительно введём пространство $\mathcal{D}(K)$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$. Дадим определение.

Определение 2. *Носителем* $\operatorname{supp}\{f\}$ *функции $f(x)$ называется замыкание множества тех точек $x \in \mathbb{R}^N$, в которых $f(x) \neq 0$.*

Определение 3. *Символом $\mathcal{D}(K)$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$, мы обозначим векторное подпространство пространства $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций f, носитель которых сосредоточен на K.*

На векторном пространстве $\mathcal{D}(K)$ можно ввести счётную систему норм следующего вида:

$$p_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}. \tag{1.1}$$

Докажем, что $p_n(f)$ — действительно нормы на $\mathcal{D}(K)$.

□ Покажем, что из условия $p_n(f) = 0$ вытекает $f = \vartheta$. Действительно, из формулы (1.1) следует, что

$$p_n(f) = 0 \Rightarrow \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha f(x)| = 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha: \ |\alpha| \leqslant n,$$

значит, в частности, при $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ получаем

$$\sup_{x\in K} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = \vartheta. \quad \boxtimes$$

Рассмотрим следующее семейство множеств:

$$\mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{V}_{nm},\ n, m \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}\}, \tag{1.2}$$

где

$$\mathrm{V}_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathcal{D}(K): \ p_n(f) < \frac{1}{m} \right\}. \tag{1.3}$$

Семейство множеств $\mathfrak{B}$ можно взять за систему окрестностей нуля в векторном пространстве $\mathcal{D}(K)$. Тогда систему окрестностей произвольной функции $f(x)$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{B}_f \stackrel{\text{def}}{=} \{f + \mathrm{V}_{nm}: \ \mathrm{V}_{nm} \in \mathfrak{B}\}.$$

Пусть $f_1 \in \mathfrak{B}_{f_0}$. Это означает, что найдутся такие $n, m \in \mathbb{N}$ и найдётся такая функция $f \in V_{nm}$, что

$$f_1 = f_0 + f \Leftrightarrow f = f_1 - f_0 \in V_{nm} \Leftrightarrow p_n(f_1 - f_0) < \frac{1}{m}.$$

Таким образом, систему окрестностей произвольной функции $f \in \mathcal{D}(K)$ можно представить следующим эквивалентным образом:

$$\mathfrak{B}_{f_0} = \left\{ f \in \mathcal{D}(K): \ p_n(f - f_0) < \frac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.4}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Система окрестностей $\mathfrak{B}_{f_0}$ для каждого $f_0 \in \mathcal{D}(K)$, определённая формулой* (1.4), *является фундаментальной системой окрестностей для некоторой единственной топологии.*

Доказательство.

Нужно проверить выполнение трёх свойств указанной системы окрестностей из теоремы 1 лекции 8 тома I настоящего курса.

Свойство 1. Для любого $f_0 \in \mathcal{D}(K)$ имеем $\mathfrak{B}_{f_0} \neq \varnothing$ и для любых $n, m \in \mathbb{N}$

$$f_0 \in V_{nm}(f_0) = \left\{ f \in \mathcal{D}(K) : \; p_n(f - f_0) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Свойство выполнено.

Свойство 2. Для любых $V_{n_1 m_1}(f_0)$ и $V_{n_2 m_2}(f_0)$ найдётся $V_{n_3 m_3}(f_0)$ такое, что

$$V_{n_3 m_3}(f_0) \subset V_{n_1 m_1}(f_0) \cap V_{n_2 m_2}(f_0).$$

Действительно, пусть

$$n_3 = \max\{n_1, n_2\}, \quad m_3 = \max\{m_1, m_2\}.$$

Тогда имеем

$$p_{n_1}(f - f_0) \leqslant p_{n_3}(f - f_0) < \frac{1}{m_3} \leqslant \frac{1}{m_1},$$

$$p_{n_2}(f - f_0) \leqslant p_{n_3}(f - f_0) < \frac{1}{m_3} \leqslant \frac{1}{m_2}$$

для всех $f \in V_{n_3 m_3}(f_0)$. Свойство выполнено.

Свойство 3. Для любого $f_1 \in \mathcal{D}(K)$, любого $V_{n_1 m_1}(f_1) \in \mathcal{B}_{f_1}$ и произвольного $f_2 \in V_{n_1 m_1}(f_1)$ найдётся такое $V_{n_2 m_2}(f_2) \in \mathfrak{B}_{f_2}$, что $V_{n_2 m_2}(f_2) \subset V_{n_1 m_1}(f_1)$.

Действительно, пусть

$$f_2 \in V_{n_1 m_1}(f_1) = \left\{ f \in \mathcal{D}(K) : \; p_{n_1}(f - f_1) < \frac{1}{m_1} \right\}$$

и пусть

$$p_{n_1}(f_2 - f_1) = \varepsilon < \frac{1}{m_1}, \quad V_{n_2 m_2}(f_2) = \left\{ f \in \mathcal{D}(K) : \; p_{n_2}(f - f_2) < \frac{1}{m_2} \right\},$$

где $n_2 = n_1$, а m_2 настолько велико, что

$$\varepsilon + \frac{1}{m_2} < \frac{1}{m_1}.$$

Тогда имеем

$$p_{n_1}(f - f_1) \leqslant p_{n_1}(f - f_2) + p_{n_1}(f_2 - f_1) = p_{n_2}(f - f_2) + \varepsilon < \frac{1}{m_2} + \varepsilon < \frac{1}{m_1}$$

для всех $f \in V_{n_2 m_2}(f_2)$. Свойство выполнено.

Итог. Таким образом, выполнены все условия отмеченной теоремы 1 и поэтому существует такая единственная топология τ_K, относительно которой семейство

$$\nu_K = \{\mathfrak{B}_f,\ f \in \mathcal{D}(K)\}$$

является *фундаментальной системой окрестностей* (ФСО).

Лемма доказана.

Построенная таким образом топология τ_K является *метризуемой*, т.е. существует такая метрика, которая порождает туже топологию.

□Действительно, в качестве метрики, порождающую введённую топологию, на векторном топологическом пространстве (ВТП) $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ возьмём следующую величину:

$$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}. \quad \boxtimes \tag{1.5}$$

Теорема 1. *Пространство* $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ *является пространством Фреше.*

Доказательство. Сначала докажем, что пространство $\mathcal{D}(K)$ полно относительно метрики (1.5).

Шаг 1. Пусть $\{f_m\}$ последовательность Коши в $\mathcal{D}(K)$, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $l, m \geqslant N$ имеем

$$\rho(f_l, f_m) < \varepsilon.$$

Из (1.5) вытекает неравенство

$$\|f_l - f_m\|_n < \frac{2^n}{1-2^n\varepsilon}\varepsilon \quad \text{при условии} \quad \varepsilon < \frac{1}{2^n}, \tag{1.6}$$

где мы использовали обозначение

$$\|g\|_n \stackrel{\text{def}}{=} p_n(g).$$

□ Действительно, имеем

$$\frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n} < \varepsilon \Rightarrow \|f-g\|_n < \frac{2^n}{1-2^n\varepsilon}\varepsilon. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Норма (1.1) есть норма на банаховом пространстве $C^{(n)}(K)$. Поэтому последовательность $\{f_m\} \subset C^{(n)}(K)$ является фундаментальной в $C^{(n)}(K)$ и сходится к некоторому элементу $f \in C^{(n)}(K)$ для произвольного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Кроме того, по определению 3 пространства $\mathcal{D}(K)$ имеем

$$\operatorname{supp} f_m \subset K \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}$$

и поэтому, очевидно, что $\operatorname{supp} f$ тоже сосредоточен на K. Таким образом, имеем

$$f \in \mathcal{D}(K).$$

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что

$$\|f_m - f\|_k \leqslant \|f_m - f\|_{N_1} \leqslant \delta = \delta(\varepsilon) \tag{1.7}$$

для $k = \overline{1, N_1}$ и всех $m \geqslant N_2$, где

$$\frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k}\delta = c_{N_1}\delta, \quad c_{N_1} := \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k}. \tag{1.8}$$

При достаточно большом $N_1 \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство:

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_m - f\|_k}{1 + \|f_m - f\|_k} \leqslant \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Но тогда из (1.7)–(1.9) приходим к следующему неравенству:

$$\rho(f_m, f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_m - f\|_k}{1 + \|f_m - f\|_k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_m - f\|_k}{1 + \|f_m - f\|_k} + \sum_{k=N_1+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_m - f\|_k}{1 + \|f_m - f\|_k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $m \geqslant N_2$. Таким образом, полнота доказана.

Теперь мы докажем метризуемость векторного топологического пространства $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ относительно метрики (1.5).

Шаг 3. Итак, пусть τ_ρ — это топология, порождённая метрикой ρ (1.5), а τ_K — это исходная топология. Пусть $\mathfrak{B}$ — это рассмотренная ранее ФСО для топологии τ_K, а $\mathfrak{B}_\rho$ — это ФСО для топологии τ_ρ, очевидно, состоящее из открытых шаров

$$O(f_1, \rho) = \{f \in \mathcal{D}(K) : \ \rho(f, f_1) < r\}.$$

Нам нужно доказать эквивалентность систем множеств $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_\rho$. Пусть

$$f_1 \in V_{n_1 m_1}(f_0) = \left\{f(x) \in \mathcal{D}(K) : \ p_{n_1}(f - f_0) < \frac{1}{m_1}\right\}$$

— это произвольная функция из произвольной фиксированной окрестности $V_{n_1 m_1}(f_0)$. Нужно сначала доказать, что найдётся такой шар

$$O(f_1, r) = \{f \in \mathcal{D}(K) : \ \rho(f, f_1) < r\}, \quad r > 0,$$

что $O(f_1, r) \subset V_{n_1 m_1}(f_0)$.

□ Действительно, имеем

$$\varepsilon := p_{n_1}(f_1 - f_0) < \frac{1}{m_1}.$$

Пусть $\gamma > 0$ таково, что

$$\varepsilon + \gamma < \frac{1}{m_1}.$$

При этом имеем

$$f \in O(f_1, r) \Leftrightarrow \rho(f, f_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f - f_1)}{1 + p_k(f - f_1)} < r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{n_1}(f - f_1) < \frac{2^{n_1}}{1 - 2^{n_1} r} r < \gamma,$$

где выберем радиус $r > 0$ шара $O(f_1, r)$ достаточно малым. Итак, для любой функции $f \in O(f_1, r)$ справедлива цепочка неравенств

$$p_{n_1}(f - f_0) \leqslant p_{n_1}(f_1 - f_0) + p_{n_1}(f - f_1) = \varepsilon + p_{n_1}(f - f_1) < \varepsilon + \gamma < \frac{1}{m_1},$$

т. е. $f \in V_{n_1 m_1}(f_0)$. Следовательно, $O(f_1, r) \subset V_{n_1 m_1}(f_0)$. ⊠

Шаг 4. Теперь докажем утверждение в другую сторону. Пусть $O(f_0, r)$ — это произвольный шар с центром в функции $f_0 \in \mathcal{D}(K)$ и положительного радиуса $r > 0$. Докажем, что для произвольной функции $f_1 \in O(f_0, r)$ найдётся такая окрестность $V_{n_1 m_1}(f_1) \subset O(f_0, r)$. Итак, пусть

$$f_1 \in O(f_0, r) \Rightarrow \rho(f_1, f_0) = r_0 < r.$$

Тогда найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что

$$r_0 + \varepsilon < r.$$

Теперь мы выберем $n_1 \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы

$$\sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь выберем $m_1 \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Докажем, что окрестность $V_{n_1 m_1}(f_1) \subset O(f_0, r)$.

$\square$ Действительно, пусть $f \in V_{n_1 m_1}(f_1)$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\rho(f, f_0) \leqslant \rho(f_1, f_0) + \rho(f_1, f) =$$
$$= r_0 + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2^k} \frac{\|f - f_1\|_k}{1 + \|f - f_1\|_k} + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f - f_1\|_k}{1 + \|f - f_1\|_k} \leqslant$$
$$\leqslant r_0 + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + \|f - f_1\|_{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2^k} \leqslant r_0 + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2^k} \leqslant$$
$$\leqslant r_0 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = r_0 + \varepsilon < r.$$

Таким образом, $f \in O(f_0, r)$, т. е. $V_{n_1 m_1}(f_1) \subset O(f_0, r)$. $\boxtimes$

Следовательно, обе системы ФСО эквивалентны. Поэтому топологии τ_K и τ_ρ порождаемые соответствующими ФСО $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_\rho$ совпадают.

Теорема доказана.

§ 2. Пространства $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ и $\mathcal{D}(\Omega)$

Пусть теперь $\{K_n\}$ — это компактное исчерпывание пространства $\mathbb{R}^N$. Прежде всего отметим, что в силу теоремы 1 каждое пространство $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ является пространством Фреше. Причём имеет место топологическое вложение

$$(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n}) \subset \big(\mathcal{D}(K_{n+1}), \tau_{K_{n+1}}\big).$$

Из полноты каждого пространства $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ и того, что относительная топология $\tau_{K_{n+1}}$ на пространстве $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ совпадает с топологией τ_{K_n}, вытекает, что пространство $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ замкнуто в $\big(\mathcal{D}(K_{n+1}), \tau_{K_{n+1}}\big)$. При этом

$$(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n}) \neq \big(\mathcal{D}(K_{n+1}), \tau_{K_{n+1}}\big).$$

Определение 4. *Посредством $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ обозначим объединение пространств $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$:*

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}(K_n). \tag{2.1}$$

Причём $\mathcal{D}$ наделяется сильнейшей локально выпуклой топологией τ, при которой все вложения

$$(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n}) \subset (\mathcal{D}, \tau), \quad n \in \mathbb{N}$$

непрерывны.

Топология τ строгого индуктивного предела $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ пространств $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ обладает следующим важным свойством:

Лемма 2. *Множество $U \in \tau$, когда*

$$U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K$$

для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N$.

Перечислим свойства пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. [1])

Теорема 2. *Справедливы следующие свойства пространства основных функций $\mathcal{D}$:*

(I) *Пространство $\mathcal{D}$ неметризуемо;*

(II) *Последовательность $\{f_m\} \subset \mathcal{D}$ сходится к f в $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда носитель всех функций $\{f_m\}$ содержится в некотором компакте K и эта последовательность сходится в каком-то $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$;*

(III) *Для непрерывности линейного оператора $\mathbb{T}$, действующего из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $\{f_m\} \subset \mathcal{D}$ и $f_m \to \vartheta$ вытекало $\mathbb{T} f_m \to \vartheta$ в $\mathcal{D}$.*

Доказательство.

Мы докажем только свойство (II). Достаточно доказать это утверждения для случая $f = 0$. Отметим, что нам достаточно доказать, что найдётся такой компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, что

$$\operatorname{supp} f_m \subset K \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N},$$

тогда $\{f_m\} \subset \mathcal{D}(K)$, причём по определению индуктивной топологии τ пространства основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ имеет место следующее равенство систем множеств:

$$\mathcal{D}(K) \cap \tau = \tau_K,$$

где τ_K — это уже рассмотренная нами топология, построенная по системе множеств $\mathfrak{B}$. А сходимость в этой топологии τ_K к нулевой функции $\vartheta(x)$ означает сходимость по каждой норме $\|\cdot\|_k$:

$$\|f_m - \vartheta\|_k = \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f_m(x)| \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому докажем, что найдётся такой компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, что

$$\operatorname{supp} f_m \subset K \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Предположим противное. Тогда найдётся такая последовательность $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^N$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{R}^N$, и подпоследовательность

$$\{f_{m_j}\} \subset \{f_m\}$$

[1]) Смотри книгу [22].

такая, что $f_{m_j}(x_j) \neq 0$. Рассмотрим следующую полунорму:

$$p(f) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{x \in K_j \setminus K_{j-1}} \left| \frac{f(x)}{f_{m_j}(x_j)} \right|,$$

где $\{K_n\}$ — это компактное исчерпывание пространства $\mathbb{R}^N$ такое, что $x_j \in K_j \setminus K_{j-1}$, $K_0 = \varnothing$. Эта полунорма определяет некоторую *окрестность* нулевой функции пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$U := \left\{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \ p(f) < 1 \right\}.$$

□ Действительно, заметим, что

$$U \cap \mathcal{D}(K) =: U_K = \left\{ f \in \mathcal{D}(K) : \ p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| < 1 \right\}.$$

Но по построению топологии τ_K пространства $\mathcal{D}(K)$ норма $p_K(f)$ входит в счётный набор норм $\|\cdot\|_n$ при $n = 0$. Поэтому, в частности, множество $U_K \in \tau_K$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N$. Следовательно, $U \in \tau$ — топологии строгого индуктивного предела $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. ⊠

При этом, с одной стороны, имеем

$$f_{m_j} \xrightarrow{\tau} \vartheta \quad \text{при} \quad m_j \to +\infty$$

и поэтому $f_{m_j} \in U$ для всех $m_j \geqslant N$ при достаточно большом $N \in \mathbb{N}$. А с другой стороны, имеем

$$p(f_{m_j}) \geqslant 2 \Rightarrow \{f_{m_j}\} \notin U \quad \text{для всех} \quad m_j \in \mathbb{N}.$$

Полученное противоречие доказывает, что найдётся такой компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, что

$$\operatorname{supp} f_m \subset K \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Поскольку пространство $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ является счётно нормированным пространством Фреше, то сильная сходимость в этом пространстве последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(K)$ к элементу $u \in \mathcal{D}(K)$ равносильна сходимости по всем нормам

$$\|u_n - u\|_k \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$.

§ 3. Пространство распределений $\mathcal{D}'$

Определение 5. *Через $\mathcal{D}'$ обозначим пространство линейных и непрерывных функционалов над локально выпуклым векторным топологическим пространством $\mathcal{D}$ с топологией τ — топологией строгого индуктивного предела пространств $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Каждый линейный функционал f^* является непрерывным в индуктивной топологии τ пространства $(\mathcal{D}, \tau)$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'$, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ такой, что $\varphi_n \to \vartheta$, вытекает, что*

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Вытекает из определения непрерывности линейного функционала, из того свойства, что непрерывность функционала эквивалентна непрерывности в окрестности нулевого элемента и, наконец, из пункта (III) теоремы 2 и замечания 1.

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 3. *Линейный функционал $f^* \in \mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда найдется такой компакт $K_n \subset \mathbb{R}^N$ и такая постоянная $\mathrm{M}_{nm} > 0$, что имеет место неравенство*

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{3.1}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$.

Достаточность. Из (3.1) получаем, что если $\{\varphi_k\} \subset (\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ и $\varphi_k \to \vartheta$, то

$$p_n(\varphi_k) \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из (3.1) вытекает, что

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{D}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{D}'$, тогда полунорма (проверьте сами!)

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi \rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{D}, \tau)$. Следовательно, эта полунорма непрерывна и над всяким $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$. А это в свою очередь означает, что найдётся полунорма $p_{nm}(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства Фреше $(\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$, такая, что

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} p_{nm}(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in (\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n}).$$

□ Действительно, непрерывность полунормы $p(\varphi)$ означает, что найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{supp} \varphi \subset K_n$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ фиксированного и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\varphi \in (\mathcal{D}(K_n), \tau_{K_n})$ таких, что

$$p_{nm}(\varphi) < \delta(\varepsilon, n, m) \Rightarrow p(\varphi) < \varepsilon.$$

Отсюда в силу положительной однородности полунорм $p(\varphi)$ и $p_{nm}(\varphi)$ вытекает следующее неравенство:

$$p\left(\frac{\varphi}{\delta}\right) < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \text{как только} \quad p_{nm}\left(\frac{\varphi}{\delta}\right) < 1,$$

или, эквивалентно,

$$p(\psi) < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \text{как только} \quad p_{nm}(\psi) < 1.$$

В частности, подходит

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{p_{nm}(\varphi)} \Rightarrow p(\varphi) \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon, n, m)} p_{nm}(\varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(K_n)$. Но полунорма $p_{nm}(\varphi)$ имеет следующий явный вид:

$$p_{nm}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Формула (3.1) доказана. ⊠

Лемма доказана.

§ 4. Регулярные и сингулярные обобщённые функции

Функции из $\mathcal{D}'$ можно условно разделить на *регулярные* и *сингулярные*. Дадим определение.

Определение 6. *Элемент $f^* \in \mathcal{D}'$ назовем регулярной обобщённой функцией, если существует такая локально интегрируемая функция $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, что имеет место следующее явное представление для скобок двойственности*:

$$\langle f^*, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{4.1}$$

В противном случае $f^* \in \mathcal{D}'$ называется сингулярной обобщённой функцией.

Лемма (Дюбуа—Раймонда). *Пусть $f_1, f_2 \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ — два представителя обобщённой функции $f^* \in \mathcal{D}'$, т. е. имеют место равенства*

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_1(x)\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_2(x)\varphi(x)\, dx.$$

Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ *почти всюду.*

Доказательство.

Данная лемма следует из основной леммы вариационного исчисления, доказанной в лекции 3. Действительно, имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} [f_1(x) - f_2(x)]\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Поскольку

$$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теперь осталось применить основную лемму вариационного исчисления.

Лемма доказана.

Распределение f^* из $\mathcal{D}'$ не является, строго говоря, функцией, однако очень удобно сопоставить обобщённой функции аргумент $x \in \in \mathbb{R}^N$ по следующему правилу:

$$\langle f^*(x), \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, \varphi(x)\rangle.$$

В дальнейшем мы будем использовать это правило.

ПРИМЕР 1. (дельта-функция Дирака) Дельта-функцией Дирака называют обобщённую функцию, действующую по формуле

$$\langle \delta, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Как известно, П. Дирак определял эту функцию как такую функцию, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

И ещё тогда современниками П. Дирака было отмечено, что в виде интеграла Лебега «дельта-функцию» представить нельзя, потому что это сингулярная обобщённая функция. Покажем это.

□ Допустим противное. Пусть существует $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ такая, что для любых $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

тогда для «шапочки»

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим в силу теоремы Лебега противоречивое равенство

$$0 = e^{-1}.$$

Следовательно, $\delta(x)$ — сингулярная обобщённая функция. ⊠

ПРИМЕР 2. (функция Хевисайда.) Функцией Хевисайда называют обобщенную функцию ϑ, действующую по формуле

$$\langle \vartheta, \varphi\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \cdots \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Это регулярная обобщённая функция и ее действие на основные функции из $\mathcal{D}$ задаётся по формуле (4.1) с помощью локально интегрируемой в $\mathbb{R}^N$ функции

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x_i \geqslant 0, \quad \forall\, i = \overline{1,N}, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту функцию еще называют функцией единичного скачка.

ПРИМЕР 3. (постоянная). Регулярную обобщённую функцию, действующую по правилу

$$\langle f, \varphi\rangle = c\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} c\cdot\varphi(x)\,dx,$$

называют постоянной.

ПРИМЕР 4. (главное значение интеграла от функции x^{-1}). Такое название закреплено за линейным функционалом

$$\mathcal{P}\frac{1}{x},$$

действующим по формуле

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

□ Линейность этого функционала следует из свойства линейности интеграла Римана, осталось проверить его непрерывность. Пусть $\varphi_k \to \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ при $k \to +\infty$, тогда, во-первых, найдётся такое $R > 0$, что $\varphi_k(x) = 0$ при $|x| > R$ для всех $k \in \mathbb{N}$, во-вторых, в частности,

$$\varphi_k' \rightrightarrows 0 \quad \text{равномерно на} \quad [-R, R] \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

т. е.

$$\max_{x \in [-R;R]} |\varphi_k'(x)| \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

поэтому

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k \right\rangle \overset{\text{def}}{=} V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях на $[-R, R]$ имеет место равенство

$$\varphi_k(x) - \varphi_k(0) = \varphi_k'(x')x \quad \text{при} \quad x' \in [0, x],$$

или

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + x\varphi_k'(x'),$$

отсюда

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k \right\rangle = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k'(x')}{x}\, dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое из правой части последнего равенства:

$$V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \right) \frac{\varphi_k(0)}{x}\, dx =$$
$$= \varphi_k(0) \cdot \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln|-\varepsilon| - \ln|-R| + \ln|R| - \ln|\varepsilon|) = 0.$$

Таким образом,

$$\left| \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k \right\rangle \right| = \left| V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\varphi_k'(x')}{x}\, dx \right| = \left| V.p. \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\, dx \right| =$$
$$= \left| \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\, dx \right| \leqslant \int\limits_{-R}^{R} |\varphi_k'(x')|\, dx \leqslant 2R \max_{x \in [-R,R]} |\varphi_k'(x)| \to +0$$

при $k \to +\infty$.

Итак, линейный функционал

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

является обобщённой функцией на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. ☒

Покажем, что этот функционал является сингулярной обобщённой функцией.

□ Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в $\mathbb{R}^1$ функция f такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Рассмотрим семейство основных функций типа «шапочка»

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где c_ε выбираем так, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1,$$

т. е.

$$c_\varepsilon = \frac{c_1}{\varepsilon},$$

где c не зависит от ε.

Вычислим теперь значения этого функционала на семействе функций $\varphi(x) = x\omega_\varepsilon(x)$. С одной стороны

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\omega_\varepsilon(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\omega_\varepsilon(x)}{x}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Теперь предположим, что

$$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^1) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^1).$$

В этом случае в силу неравенства Гельдера получим неравенство

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)x\omega_\varepsilon(x)\, dx \right| = c_\varepsilon \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)x \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_\varepsilon \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right)\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{c_1}{\varepsilon}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\varepsilon^3 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 \exp\left(-\frac{2}{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right)\,d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1/2}}{c}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-1}^{1} t^2 \exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)\,dt\right)^{1/2} \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. Полученное противоречие и означает, что

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

— это сингулярная обобщённая функция. ☒

Семинар–Лекция 7

ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{D}$ И $\mathcal{D}'$

§ 1. Вводные замечания

На этом занятии основное внимание будет уделено пространству $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — пространству непрерывных линейных функционалов, действующих на пространстве основных функций $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Из теоретических основ, изложенных в лекции 5, на практике важно следующее:
1) линейный функционал f, определённый на $\mathcal{D}$, непрерывен тогда и только тогда, когда он секвенциально непрерывен в нуле, т. е.

$$\forall\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D} \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \langle f, \varphi_n\rangle \to 0;$$

2) говорят, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, если существует такой компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ и $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$. Иными словами, носители всех функций последовательности лежат в некотором компакте и все производные функций $\varphi_n(x)$ (включая сами функции) сходятся равномерно в K (а тем самым, и в $\mathbb{R}^N$) к соответствующим производным функции φ.

§ 2. Пространство $\mathcal{D}$: некоторые примеры

ПРИМЕР 1. Функция-«шапочка». Напомним:

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} e^{-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x^2|}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь константа c_ε такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\, dx \equiv \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N \mid |x|\leqslant\varepsilon\}} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Рассмотрим случай $N = 1$. Имеем

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = c_\varepsilon \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x^2|}}\,dx =$$

$$= c_\varepsilon \cdot \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}}\, d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = c_\varepsilon \cdot \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt.$$

Отсюда ясно, что

$$c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon}, \quad c = \left(\int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\,dx \right)^{-1}.$$

П Р И М Е Р 2. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$1)\, \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x), \quad 2)\, \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}x\right), \quad 3)\, \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx)$$

сходящиеся в $\mathcal{D}$.

□

1. Итак, нужно проверить, что:
а) носители всех функций φ_k лежат в некотором компакте K;
б) все производные $\partial^\alpha \varphi_k$, $|\alpha| \geqslant 0$, равномерно на K сходятся к $\partial^\alpha \psi$, $\psi \in \mathcal{D}$.

2. Очевидно, носитель всех функций φ_k совпадает с носителем функции φ и, тем самым, условие а) выполнено. б) Имеем

$$\forall |\alpha| \geqslant 0 \quad \max_{x \in \operatorname{supp} \varphi} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \max_{x \in \operatorname{supp} \varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)| \to 0,$$

поскольку все рассматриваемые производные ограничены в K. Итак, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

3. Очевидно, что при $\varphi(x) \not\equiv 0$ сходимость места не имеет уже потому, что $\operatorname{supp} \varphi_k = k \operatorname{supp} \varphi$ и, следовательно, не существует общего компакта, содержащего носители всех функций последовательности.

4. Легко видеть, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \operatorname{supp} \varphi =: K$. Следовательно, условие а) выполнено. б) Очевидно, $\varphi_k \rightrightarrows 0$, т. к.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi_k(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{k}\varphi(kx) \right| \leqslant \sup_{kx \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{k} |\varphi(kx)| = \frac{1}{k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

5. Значит, если $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, то $\varphi \equiv 0$. Но уже для производных первого порядка имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k(x) = k\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\varphi(t)\right)\bigg|_{t=kx},$$

откуда следует, что

$$\sup_{x\in K}\left|\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k(x)\right| = \sup_{t\in K}\left|\frac{\partial}{\partial t_l}\varphi(t)\right| = C \not\to 0,$$

если переменная x_l выбрана так, что производная функции $\varphi(x)$ по этой переменной отлична от тождественного нуля.

6. Итак, условие б) нарушено и последовательность $\{\varphi_k\}$ не стремится к 0 в $\mathcal{D}$, а следовательно, не имеет предела в этом пространстве. ⊠

§ 3. Обобщённые функции из $\mathcal{D}'$: примеры

Далее по тексту, если не оговорено особо, считаем $N = 1$.

ПРИМЕР 3. В лекции 5 были приведены примеры обобщённых функций: $\delta(x)$, $\vartheta(x)$, константа, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, из которых $\delta(x)$ и $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ являются сингулярными обобщёнными функциями, а другие две — регулярными. Оставалось ещё показать, что выражение, входящее в определение функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, действительно имеет смысл при всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Сделаем это.

□

1. Зафиксируем $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. В выражении

$$\text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \equiv \lim_{\gamma\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\gamma} + \int\limits_{\gamma}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

определяющем эту функцию, содержится предел при $\gamma \to +0$. (Заметим ещё, что в силу финитности основной функции интегрирование фактически не распространяется до бесконечности.)

2. Для доказательства существования этого предела можно воспользоваться критерием Коши. Иными словами, достаточно доказать, что

$$\text{при}\quad \gamma_1,\gamma_2 \to +0,\quad \gamma_1 < \gamma_2,\quad \int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \to 0. \qquad (3.1)$$

3. Для этого воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа, согласно которой для каждого $x > 0$ ($x < 0$) существует такое $x^* = x^*(x) \in (0; x)$ ($x^{**} = x^{**}(x) \in (x; 0)$), что $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(x^*)x$ (соответственно $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(x^{**})x$). Тогда сумму интегралов в (1.7) можно переписать в виде

$$I(\gamma_1,\gamma_2) = \int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1}\left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x^{**})\right)dx + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x^{*})\right)dx.$$

4. Имеем теперь

$$I(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \right) \frac{\varphi(0)}{x} \, dx + \int\limits_{-\gamma_2}^{-\gamma_1} \varphi'(x^{**}) \, dx + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \varphi'(x^*) \, dx.$$

Первое слагаемое обращается в ноль как интеграл от нечётной функции, второе же оценивается величиной $\sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi'(x)| \cdot 2\gamma_2 \to 0$ при $\gamma_2 \to 0$, поскольку первый множитель в силу свойств основных функций ограничен. $\boxtimes$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим теперь обобщённую функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$, определяемую выражением

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} \, dx. \tag{3.2}$$

$\square$

1. Аналогично предыдущему можно доказать, что выражение (3.2) имеет смысл для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ (см. задачу 4). Докажем теперь, что оно действительно представляет непрерывный линейный функционал. Поскольку линейность в силу свойств интеграла и предела очевидна, остаётся проверить лишь непрерывность.

2. Итак, пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к нулю в $\mathcal{D}$, т. е. эти функции равны нулю вне некоторого компакта $[-R; R]$ и сходятся в нём вместе со всеми производными к нулю равномерно.

3. Для каждой из функций $\varphi_n(x)$ запишем разложение по формуле Тейлора до первого порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \varphi_n'(0)x + \frac{\varphi_n''(x_n^*(x))}{2} x^2.$$

4. Тогда можем переписать (3.2) в виде

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int\limits_{[-R;R]} \frac{\varphi_n'(0)}{x} \, dx + \int\limits_{[-R;R]} \frac{\varphi_n''(x_n^*(x))}{2} \, dx,$$

где во втором слагаемом по понятной причине символ главного значения снят. Первое слагаемое равно нулю как предел интегралов от нечётной функции по симметричному множеству, а правое ограничено величиной $R \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi_n''(x)|$ и стремится к нулю в силу равномерной сходимости производных.

5. Доказательство того факта, что данная обобщённая функция является сингулярной, остаётся в качестве самостоятельного упражнения (см. задачу 4). $\boxtimes$

ПРИМЕР 5. Рассмотрим обобщённую функцию

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta(x - n),$$

где a_n — произвольные числовые коэффициенты. Здесь полагается по определению

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle \equiv \varphi(x_0) \tag{3.3}$$

(подробнее о линейной замене переменных в аргументе обобщённых функций мы поговорим в следующем семинаре-лекции) и, тем самым,

$$\langle f, \varphi \rangle \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(n). \tag{3.4}$$

□

1. Заметим прежде всего, что выражение (3.4) определено для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Действительно, в силу финитности основной функции в $\langle f, \varphi \rangle$ войдёт лишь конечное число слагаемых:

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|n| \leqslant m[\varphi]} a_n \varphi(n). \tag{3.5}$$

2. Линейность рассматриваемого функционала очевидна. Непрерывность тоже, поскольку, во-первых, при $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ все функции последовательности обращаются в нуль вне некоторого общего компакта и, тем самым, в (3.5) можно взять некоторое общее $m[\varphi]$, а во-вторых, в силу сходимости $\varphi_k(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ при каждом $x = n$ (здесь даже несущественно, что сходимость равномерна) имеем

$$\sum_{|n| \leqslant m[\varphi]} a_n \varphi_k(n) \to \sum_{|n| \leqslant m[\varphi]} a_n \varphi(n).$$

⊠

ПРИМЕР 6. Пусть $f(x) \in C^1(x \leqslant x_0) \cap C^1(x \geqslant x_0)$, что понимается следующим образом: $f(x) \in C^1(x < x_0) \cap C^1(x > x_0)$ и существуют (вообще говоря, различные) *конечные* предельные значения производной $f'(x)$ при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$.

□

1. Отметим, что отсюда сразу следует, что $f'(x)$ ограничена при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$, а поэтому (в силу критерия Коши существования предела функции в точке) существуют конечные предельные значения $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

2. Имеем далее (с учётом (3.3))

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} f(x) \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\left(f(x)\varphi(x)\right)\big|_{-\infty}^{x_0-0} - \left(f(x)\varphi(x)\right)\big|_{x_0+0}^{+\infty} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= f(x_0+0)\varphi(x_0) - f(x_0-0)\varphi(x_0) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \left\langle \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0), \varphi \right\rangle.$$

⊠

§ 4. Операции над обобщёнными функциями из $\mathcal{D}'$: умножение на $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Пусть $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ —произвольная функция.

Определение 1. *Произведением обобщённой функции f на функцию a называется обобщённая функция af, действующая по правилу*

$$\langle af, \varphi\rangle = \langle f, a(x)\varphi(x)\rangle. \tag{4.1}$$

Это определение есть не что иное, как естественное обобщение равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)f(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)(a(x)\varphi(x))\,dx,$$

верного для регулярной обобщённой функции с представителем $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Легко видеть, что полученная операция всякую обобщённую функцию из $\mathcal{D}'$ преобразует в обобщённую функцию из $\mathcal{D}'$. В самом деле, для всякой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем $a\varphi \in \mathcal{D}$. Поэтому выражение в правой части (4.1) — значение обобщённой функции f на $a\varphi \in \mathcal{D}$ — заведомо имеет смысл. Линейность полученного функционала очевидна. Для доказательства непрерывности достаточно заметить, что в силу ограниченности функции $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и всех её производных *на компакте* K, содержащем носители всех функций последовательности $\{\varphi_n\}$, функции $a(x)\varphi_n(x)$ со всеми производными равномерно в K сходятся к $a(x)\varphi(x)$, а их носители, очевидно, содержатся в K.

ПРИМЕР 7. Пусть $a \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда $a\delta \in \mathcal{D}'$. Покажем, более того, что $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, т. е.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \ \ \langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = a(0)\varphi(0).$$

$\square$ Действительно, по определению 1 для произвольной $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем

$$\langle a\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, a\varphi\rangle = (a(x)\varphi(x))|_{x=0} = a(0)\varphi(0).$$

$\boxtimes$

ПРИМЕР 8. 1) Очевидно, $x\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$. Покажем, что $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$.

$\square$ Действительно, имеем в силу определения обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, а также определения произведения обобщённых функций:

$$\left\langle x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right\rangle = \\ = \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

2) $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x^2\varphi(x)\right\rangle = \\ = \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0)}{x^2}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

3) $x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, x^3\varphi(x)\right\rangle = \\ = \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^3\varphi(x) - 0^3\varphi(0) - (x^3\varphi(x))'\big|_0 \cdot x)}{x^3}dx = \\ = \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^3\varphi(x) - 0^3\cdot\varphi(0) - 0\cdot x)}{x^3}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

$\boxtimes$

ПРИМЕР 9. $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3} = \mathcal{P}\frac{1}{x}$.

$\square$ Действительно,

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, x^2\varphi(x)\right\rangle =$$

$$= \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0) - \left.(x^2\varphi(x))'\right|_0 \cdot x)}{x^3} dx =$$

$$= \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x^2\varphi(x) - 0}{x^3} dx = \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \boxtimes$$

§ 5. Операции над обобщёнными функциями из $\mathcal{D}'$: дифференцирование

Определение 2. *Производной $\partial^\alpha f$ порядка α обобщённой функции $f \in \mathcal{D}$ называется обобщённая функция, действующая по правилу*:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

В частности, при $N = 1$ имеем

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle.$$

Это определение является естественным обобщением формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha f(x)\varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)\, dx$$

для регулярных обобщённых функций, заданных бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$. Здесь в силу финитности основной функции $\varphi(x)$ интегрирование фактически ведётся по компакту.

ПРИМЕР 10. $\vartheta'(x) = \delta(x)$ (здесь и далее равенство понимается в смысле равенства обобщённых функций).

$\square$ Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\vartheta(x), \varphi(x) \right\rangle = -\langle \vartheta(x), \varphi'(x) \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^1} \vartheta(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = -(-\varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle.$$

$\boxtimes$

ПРИМЕР 11. $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$.

$\square$ Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right\rangle =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi'(x)}{x}dx = -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi'(x)}{x}dx =$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\right\} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left.\frac{\varphi(x)}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left.\frac{\varphi(x)}{x}\right|_{+\varepsilon}^{+\infty} + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right] =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}dx + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(0)}{x^2}dx\right] =$$

$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi(0)\left(-\left.\frac{1}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left.\frac{1}{x}\right|_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\right] =$$

$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi(0)\left(\frac{1}{-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right) =$$

$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle + \varphi'(0) - \varphi'(0) = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle.$$

⊠

З а м е ч а н и е 1. Как видно, в основе техники работы с обобщёнными функциями лежит интегрирование по частям, а также учёт свойств гладкости основных функций (применяем теорему Лагранжа либо определение производной, стандартные пределы и т. п.).

П Р И М Е Р 12. Докажем, что решением уравнения $x^m u = 0$ является в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ являются функции $u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c^k \delta^{(k)}(x)$, где c_k, $k = 0, \ldots, m-1$, — произвольные постоянные.

□ Действительно,

1. Очевидно, что $u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$ является решением рассматриваемого уравнения, поскольку

$$\left\langle x^m \delta^{(k)}(x), \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \delta^{(k)}(x), x^m\varphi(x)\right\rangle = (-1)^k\left\langle \delta(x), (x^m\varphi(x))^{(k)}\right\rangle = 0$$

при всех $k = 0, \ldots, m-1$.

2. Докажем, что найдено общее решение рассматриваемого уравнения. Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки $x = 0$ (вопрос о её построении сейчас обсуждать не будем). Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ верно представление

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x),$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right].$$

3. Заметим, что $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. В самом деле, она финитна (поскольку финитны $\varphi(x)$ и $\eta(x)$); её бесконечная дифференцируемость во всех точках $x \neq 0$ очевидна; в точке $x = 0$ она следует из формулы Тейлора

$$\psi(x) = \sum_{k=m}^{p} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^{k-m} + O(|x|^{p+1-m}),$$

справедливой в той окрестности точки $x = 0$, где $\eta = 1$, при всех $p \geqslant m$.

4. Следовательно, если $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения $x^m u = 0$, то

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right\rangle + \langle u, x^m \psi(x) \rangle = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle u, \eta(x) x^k \rangle + \langle x^m u, \psi \rangle = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) + 0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

с $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle u, x^k \eta(x) \rangle$, $k = 0, \ldots, m-1$. ☒

Важное замечание. При использовании рядов Тейлора для функций из $\mathcal{D}$ необходимо учитывать, что эти ряды, вообще говоря, лишь асимптотические и могут не сходиться к функции на интересующем нас множестве. В самом деле, в силу единственности аналитического продолжения с действительной прямой финитная функция, отличная от тождественного нуля, не может являться аналитической.

§ 6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. С помощью замены переменной установить вид зависимости нормировочного коэффициента в (2.1) от ε при произвольном N.

Задача 2*. Доказать, что $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ при 1) $N = 2$; 2) произвольном N.

Задача 3. Выяснить, задают ли функции 1) e^x, 2) $e^{\frac{1}{x}}$ (после произвольного доопределения в нуле) обобщённые функции из $\mathcal{D}'$. Регулярными или сингулярными будут эти обобщённые функции?

Задача 4. Положим

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^m}, \varphi(x) \right\rangle \equiv \text{v. p.} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \sum_{l=0}^{m-2} \frac{x^l}{l!}\varphi^{(l)}(0)}{x^m}\, dx. \tag{6.1}$$

Доказать, что:
1) правая часть формулы (6.1) определена при всех $\varphi \in \mathcal{D}$;
2) она задаёт непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$;
3) этот функционал является сингулярной обобщённой функцией.

Задача 5. Продолжение. Показать, что:
1) $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$;
2) при всех $m \in \mathbb{N}$

$$x^m \mathcal{P}\frac{1}{x^m} = 1.$$

Задача 6. 1) Показать, что

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

2*) Сформулировать и доказать общее утверждение (ср. пример 9).

Задача 7. Показать, что $\frac{d}{dx}\operatorname{sgn} x = 2\delta(x)$ (Здесь и далее производная понимается в смысле обобщённых функций.)

Задача 8. 1) Показать, что

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

2) Показать, что

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

(Как корректно придать смысл интегралу с логарифмом?)

Задача 9*. Положим для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2+y^2}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(0,0)}{x^2+y^2}\, dx\, dy + \int\limits_{x^2+y^2 > 1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

1) Доказать, что это выражение определено для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.
2) Доказать, что оно задаёт непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$.
3) Доказать, что
$$(x^2 + y^2)\mathcal{P}\frac{1}{x^2 + y^2} = 1,$$
где равенство понимается в смысле обобщённых функций.

Семинар–Лекция 8

ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{D}'$, ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Линейная замена переменной

Для введения операции линейной (точнее, аффинной) замены переменной, как и прежде, воспользуемся принципом продолжения с множества регулярных обобщённых функций с бесконечно гладким представителем.

Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — регулярная обобщённая функция с представителем $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда при всяком $a > 0$ имеем для $g(x) = f_0(ax + b)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(ax+b)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt = \frac{1}{a}\left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle,$$

а при всяком $a < 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(ax+b)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f_0(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\,dt = \frac{1}{|a|}\left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

Итак, при всех $a \neq 0$ для указанного типа регулярных обобщённых функций имеет место равенство

$$\langle g(x), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f, \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

Это позволяет ввести

Определение 1. *Пусть* $f \equiv f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, $a \neq 0$. *Тогда символом* $f(ax+b)$ *обозначим обобщённую функцию, действующую по правилу*:

$$\langle f(ax+b), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle.$$

Именно в этом смысле и следует понимать «аргумент» обобщённой функции.

Замечание 1. Тривиальную проверку того факта, что данное определение вводит функцию из $\mathcal{D}'$, оставляем слушателям.

ПРИМЕР 1. Легко видеть, что при $a \neq 0$ имеем $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

□ В самом деле, согласно определению 3 имеем

$$\langle \delta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \delta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \\ = \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

⊠

ПРИМЕР 2. Упростим выражение $\langle \vartheta(ax), \varphi(x)\rangle$.

□ Имеем при $a > 0$

$$\langle \vartheta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \vartheta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \\ = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \langle \vartheta(x), \varphi(x)\rangle,$$

при $a < 0$

$$\langle \vartheta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \vartheta(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \\ = \frac{1}{-a}\int\limits_0^{-\infty} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(-t)\,dt = \langle \vartheta(x), \varphi(-x)\rangle.$$

Итак, $\langle \vartheta(ax), \varphi(x)\rangle = \langle \vartheta(x), \varphi(x \operatorname{sgn} a)\rangle$. ⊠

В случае пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ при произвольном N имеем (A — матрица, x, y, b — столбцы)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(Ax+b)\varphi(x)\,dx_1 \ldots dx_N =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b)) \left| \frac{D(x_1,\ldots,x_N)}{y_1,\ldots,y_N} \right| dy_1 \ldots dy_N =$$

$$= |\det A^{-1}| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))dy_1 \ldots dy_N =$$

$$= \frac{1}{|\det A|} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(A^{-1}(y-b))dy_1 \ldots dy_N,$$

что мотивирует

Определение $1'$. *Пусть $f \equiv f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, A — невырожденная матрица размера $N \times N$. Тогда символом $f(Ax+b)$ обозначим обобщённую функцию, действующую по правилу*

$$\langle f(Ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\det A|} \left\langle f(x), \varphi(A^{-1}(x-b)) \right\rangle.$$

§ 2. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$

Определение 2. *Пусть $f_n, f \in \mathcal{D}'$. Тогда говорят, что $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ при $n \to \infty$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ имеет место предельное соотношение*

$$\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, речь идёт о $*$-слабой сходимости.

Аналогично говорят, что $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ при $\varepsilon \to +0$, если если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ верно $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ при $\varepsilon \to +0$.

ПРИМЕР 3. Очевидно, с учётом определения 3 в силу финитности основных функций имеем

$$\delta(x-n) \to 0.$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим так называемые *δ-образные семейства* (смысл названия скоро будет ясен)

$$1)\ f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad 2)\ f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)},$$

$$3)\ f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}, \quad 4)\ f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\frac{x}{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

$$5)\ f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}.$$

Во всех случаях имеем $f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ при $\varepsilon \to +0$. Докажем это для примера 1). Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[\varphi(0)+\varphi'(x^*(x))x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon\varphi(0) + \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi'(x^*(x))x\,dx.$$

Таким образом,

$$|\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle - \varphi(0)| = \frac{1}{2\varepsilon}\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi'(x^*(x))x\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi'(x)|\cdot\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}x^2\,dx \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\varphi'(x)|\cdot\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon\to+0.$$

Имеет смысл доказать более общее утверждение.

Лемма 1. *Пусть*:
1) *функция* $f(x)$ *кусочно непрерывна на* $\mathbb{R}^1$,
2) $f(x) \geqslant 0$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^1$,
3) $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,dx = 1$,
4) $f_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
Тогда для регулярных обобщённых функций f_ε, *задаваемых функциями* $f_\varepsilon(x)$, *верно предельное соотношение*

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad \varepsilon \to +0.$$

Замечание 2. Легко видеть, что лемма применима ко всем семействам (2.1), кроме 4). При этом в семействе 3) роль ε играет $\sqrt{\varepsilon}$.

Прежде чем перейти к доказательству леммы, опишем «на пальцах» его идею. Она состоит в том, что:
1) для каждой конкретной функции $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ найдётся окрестность ω нуля, в которой её значение мало отличается от значения в нуле;
2) с другой стороны, найдётся такое ε_0, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ функции f_ε «сосредоточены» в выбранной окрестности нуля, т. е. их интеграл по этой окрестности «почти равен» единице, а интеграл по оставшемуся множеству «пренебрежимо мал», поэтому в сумме

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\omega} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus\omega} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx$$

первое слагаемое мало отличается от $\varphi(0)$, а второе маló.

Доказательство леммы.

1. Сформулируем на языке «ε-δ», что, собственно, нужно доказать:

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1),\ \forall \zeta > 0\ \ \exists \varepsilon_0(\varphi, \zeta) > 0\ \ \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0(\varphi, \zeta)),$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0) \right| \leqslant \zeta. \tag{2.2}$$

2. Заметим прежде всего, что при всех a, b верно равенство

$$\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt \tag{2.3}$$

и, в частности,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx = 1. \tag{2.4}$$

3. Заметим теперь, что в силу равенства $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,dx = 1$

$$\forall \gamma \in (0; 1)\ \ \exists R(\gamma) > 0\ \ \forall R' \geqslant R(\gamma)\ \ \int\limits_{-R'}^{R'} f(x)\,dx \geqslant 1 - \gamma. \tag{2.5}$$

Следовательно, при тех же R' в силу (2.3) верно

$$\int\limits_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1 - \gamma. \tag{2.6}$$

4. Пусть теперь нам заданы конкретные $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\zeta > 0$ и требуется построить $\varepsilon_0(\varphi, \zeta)$ (см. (2.2)).

5. Заметим, что в силу непрерывности основной функции $\varphi(x)$

$$\forall \eta > 0 \quad \exists r(\varphi, \eta) > 0 \quad \forall x \in [-r(\varphi, \eta); r(\varphi, \eta)] \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \eta. \tag{2.7}$$

6. Положим $C = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)|$. Найдём $\mu > 0$ такое, что

$$\mu|\varphi(0)| < \frac{\zeta}{4}.$$

(Если $\varphi(0) = 0$, то можно взять любое положительно число, в противном же случае достаточно положить $0 < \mu < \frac{\zeta}{4|\varphi(0)|}$.) Далее, положим (см. (2.5))

$$R = R\left(\gamma = \min\left\{\mu, \frac{\zeta}{2C}\right\}\right).$$

Тогда при всех $\varepsilon > 0$ и всех $R' \geqslant R$ имеем

$$\int\limits_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1-\mu, \qquad \int\limits_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1-\frac{\zeta}{2C},$$

или, с учётом (2.4),

$$\int\limits_{-R'\varepsilon}^{R'\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx \geqslant 1-\mu, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus[-R'\varepsilon;R'\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \frac{\zeta}{2C}. \tag{2.8}$$

7. Далее, выберем (см. (2.7)) $r = r\left(\eta = \frac{\zeta}{4}\right)$ такое, что

$$|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant \frac{\zeta}{4} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant r, \tag{2.9}$$

и положим $\varepsilon_0(\varphi,\zeta) = \frac{r}{R}$. Тогда *при всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ будем иметь с учётом (2.8), (2.9)

$$\begin{aligned}
&|f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)| = \\
&\quad = \left|\int\limits_{[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \\
&\quad\quad \leqslant \left|\int\limits_{[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)[\varphi(0)+(\varphi(x)-\varphi(0))]\,dx + \right. \\
&\quad\quad\quad \left. + \int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left|\int\limits_{[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\varphi(0)\,dx - \varphi(0)\right| + \left|\int\limits_{[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx\right| + \\
&\quad\quad\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus[-R\varepsilon;R\varepsilon]} |f_\varepsilon(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |\varphi(x)| \leqslant \\
&\quad \leqslant |\varphi(0)|\cdot|(1-\mu)-1| + \sup_{x\in[-R\varepsilon;R\varepsilon]} |\varphi(x)-\varphi(0)| \int\limits_{[-R\varepsilon;R\varepsilon]} f_\varepsilon(x)\,dx + \\
&\quad\quad\quad + C\cdot\frac{\zeta}{2C} \leqslant |\varphi(0)|\mu + \frac{\zeta}{4}\cdot 1 + \frac{\zeta}{2} \leqslant \frac{\zeta}{4}+\frac{\zeta}{4}+\frac{\zeta}{2} = \zeta.
\end{aligned}$$

Это и доказывает требуемый результат (2.2).

Лемма доказана.

Замечание 3. Мы пользовались условием неотрицательности функции $f_\varepsilon(x)$ в оценках типа

$$\int\limits_{A\subset\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\,dx, \qquad \int\limits_{A\subset\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{A\subset\mathbb{R}^1} f_\varepsilon(x)\sup_{x\in A}|\varphi(x)|\,dx.$$

Поэтому для рассмотрения примера 4) требуется либо сформулировать более общее утверждение, либо провести доказательство в частном случае непосредственно для

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}.$$

Замечание 4. Удивительный факт состоит в том, что результат леммы имеет место, в частности, в том случае, когда $f(0) = 0$ и даже $\operatorname{supp} f \not\ni 0$, например, для $f(x) = 0{,}1\chi_{[90;100]}(x)$. Конечно, этим мы всецело обязаны свойству непрерывности основных функций (см. (2.7)).

ПРИМЕР 5. $\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ при $k\to\infty$, где

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1) \quad \left\langle \mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi(x)\right\rangle \equiv \text{v. p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx.$$

□ Действительно, пусть фиксирована некоторая произвольная основная функция $\varphi(x)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset[-R;R]$.

1. Имеем

$$\text{v. p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx = \text{v. p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \text{v. p.}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\cos kx}{x}\varphi(0)\,dx + \text{v. p.}\int\limits_{-R}^{R}\cos kx\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Здесь первое слагаемое в правой части обращается в нуль как предел интегралов от нечётной функции по симметричному множеству.

2. Насчёт второго слагаемого заметим прежде всего, что в силу свойств гладкости основной функции подынтегральная функция содержит устранимую особенность: множитель $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ имеет конечное предельное значение $\varphi'(0)$ при $x\to 0$, что вытекает из формулы конечной приращений Лагранжа и непрерывности производной основной функции. Далее, в силу вышесказанного получаем

$$\text{v. p.}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-R}^{R}\cos kx\,\psi(x)\,dx,$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}, & x \neq 0, \\ \varphi'(0), & x = 0 \end{cases}. \tag{2.10}$$

3. Но тогда в силу леммы Римана получаем требуемый результат. (Формулировка леммы: $\int_a^b f(x)\cos tx\,dx \to 0$, $\int_a^b f(x)\sin tx\,dx \to$ $\to 0$ при $a, b = \mathrm{const}$, $t \to +\infty$ для любой *кусочно непрерывной* функции $f(x)$.)

ПРИМЕР 6. Формула Сохоцкого.

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

где

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}$$

в смысле обобщённых функций.

□ Действительно,

1. имеем

$$\left\langle \frac{1}{x - i\varepsilon}, \varphi(x) \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon}\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)(x + i\varepsilon)}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx + i\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx.$$

Сходимость второго слагаемого в правой части к $i\pi\delta(x)$ следует из предыдущего пример (семейство 2)). Рассмотрим первое слагаемое. Как обычно, фиксируем произвольную основную функцию $\varphi(x)$ и выбираем R так, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R; R]$.

2. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{x(\varphi(x) - \varphi(0))}{x^2 + \varepsilon^2}\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}, \tag{2.11}$$

где в предпоследнем равенстве мы воспользовались нечётностью функции $\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}$, а в последнем перешли к функции $\psi(x)$, определённой формулой (2.10). С другой стороны,

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \psi(x)\,dx, \tag{2.12}$$

где мы снова воспользовались соображениями нечётности, а также сняли знак главного значения, поскольку, как и в предыдущем примере, в подынтегральном выражении теперь функция с устранимой особенностью.

3. Сравним теперь правые части (2.11) и (1.2):

$$\left|\int\limits_{-R}^{R} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} - \int\limits_{-R}^{R} \psi(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in[-R;R]} |\psi(x)| \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\,dx =$$

$$= C\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-R}^{R} \leqslant C\varepsilon\pi \to 0, \quad \varepsilon \to +0.$$

⊠

ПРИМЕР 7. Вычислить предел в смысле обобщённых функций при $t \to +\infty$ от выражения $\frac{e^{ixt}}{x-i0}$.

□ Действительно, имеем при произвольном фиксированном $\varphi(x) \in \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ с $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R;R]$ с учётом предыдущего примера

$$\left\langle \frac{e^{ixt}}{x-i0}, \varphi(x)\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0} \int \frac{\varphi(x)e^{ixt}}{x-i\varepsilon}\,dx = \{\varphi(x)e^{ixt} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{x-i\varepsilon}\varphi(x)e^{ixt} =$$

$$= \left\langle \frac{1}{x-i0}, \varphi(x)e^{ixt}\right\rangle = \left\langle i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)e^{ixt}\right\rangle =$$

$$= i\pi\varphi(0) + \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)e^{ixt}\right\rangle = i\pi\varphi(0) +$$

$$+ \text{v. p.} \int \frac{\varphi(x)(\cos xt + i\sin xt)}{x}\,dx =$$

$$= i\pi\varphi(0) + \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}(\cos xt + i\sin xt)\,dx +$$

$$+ \text{v. p.} \frac{\varphi(0)}{\cos xt + i\sin xt}\,dx \to$$

$$\to i\pi\varphi(0) + 0 + 0 + \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{i\varphi(0)\sin xt}{x}\,dx =$$

$$= i\pi\varphi(0) + i\pi\varphi(0) = \langle 2i\pi\delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

Здесь в одном из последних переходов мы воспользовались равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin xt}{x}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\sin y}{y}\,dy = \pi,$$

верном при всех $t > 0$. Этот результат можно получить с помощью дифференцирования или предельного перехода по параметру (см. материал 3-го семестра по математическому анализу). ☒

§ 3. Прямое (тензорное) произведение обобщённых функций из $\mathcal{D}'$

Пусть $x \in \mathbb{R}^M$, $y \in \mathbb{R}^N$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{M+N})$, $f \in C(\mathbb{R}^M)$, $g \in C(\mathbb{R}^N)$. Тогда верна формула сведения повторного интеграла к двойному (в более общем случае — теорема Фубини)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{M+N}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^M} dx \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\varphi(x,y)\,dy \right) dx,$$

что позволяет сформулировать

Определение 3. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^M)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Тогда прямым (тензорным) произведением функций $f(x)$ и $g(y)$ называется функция $h(x,y) \equiv f(x) \cdot g(y)$, действующая по правилу*

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^{M+N}} = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^N} \rangle_{\mathbb{R}^M}.$$

Проверка корректности определения остаётся для самостоятельной работы слушателей, равно как и доказательство следующих свойств введённой операции:
1) коммутативность,
2) непрерывность по каждому из сомножителей (в смысле предельного перехода, определённого выше),
3) ассоциативность,
4) для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ верно $D_x^\alpha[f(x) \cdot g(y)] = [D_x^\alpha f(x)] \cdot g(y)$,
5) для любой $a(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ верно $(a(x)f(x)) \cdot g(y) = a(x)(f(x) \cdot g(y))$,
6) $\left\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x,y)\,dy \right\rangle_{\mathbb{R}^M} = \int_{\mathbb{R}^N} \langle f(x), \varphi(x,y) \rangle_{\mathbb{R}^M}\,dy$,
7) $\operatorname{supp}[f(x) \cdot g(y)] = \operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y)$.

Для формулировки последнего свойства требуется ввести понятие носителя обобщённой функции. Сделаем это.

Определение 4. *Говорят, что обобщённая функция $f \in \mathcal{D}'$ обращается в ноль в области G, если для любой основной функции $\varphi(x)$ с $\operatorname{supp} \varphi \subset G$ верно $\langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0$.*

Определение 5. *Объединение всех областей, в которых обобщённая функция $f \in \mathcal{D}'$ обращается в ноль, называется нулевым множеством этой функции, а дополнение к нулевому множеству — её носителем. Обобщённые функции с компактным носителем называются финитными.*

Например, $\operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}$, $\operatorname{supp}\vartheta(x) = \{x \mid x \geqslant 0\}$ (докажите это непосредственно!), поэтому функция Дирака финитна, а функция Хевисайда — нет.

Введём теперь обобщённую функцию

$$\delta(at - |x|) \equiv \vartheta(t)\cdot\delta(at + x) + \vartheta(t)\cdot\delta(at - x). \tag{3.1}$$

Здесь в правой части использованы тензорные произведения функции Хевисайда по переменной t на дельта-функции, в которых осуществлена линейная замена переменной $x \mapsto at \pm x$, при которой t рассматривается как параметр.

ПРИМЕР 8. Преобразуем тензорные произведения в правой части (3.1).

□ Имеем

$$\langle\vartheta(t)\cdot\delta(at + x), \varphi(t, x)\rangle =$$
$$= \langle\vartheta(t), \langle\delta(at + x), \varphi(t, x)\rangle\rangle = \left\langle\vartheta(t), \left\langle\delta(x), \varphi\left(t, \frac{x - at}{1}\right)\right\rangle\right\rangle =$$
$$= \langle\vartheta(t)\,\varphi(t, -at)\rangle = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(t, -at)\,dt.$$

Аналогично получаем

$$\langle\vartheta(t)\cdot\delta(at - x), \varphi(t, x)\rangle = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(t, at)\,dt. \quad \boxtimes$$

ПРИМЕР 9. Положим

$$\vartheta(at - |x|) = \begin{cases} 1, & at - |x| \geqslant 0, \\ 0, & at - |x| < 0 \end{cases}.$$

Требуется вычислить $\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(at - |x|)$, где производная пониматеся в смысле обобщённых функций.

□ Имеем с учётом предыдущего примера

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(at - |x|), \varphi(t, x)\right\rangle = -\left\langle\vartheta(at - |x|), \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x)\right\rangle =$$
$$= -\int\limits_{\{(t,x)\mid t\geqslant\frac{|x|}{a}\}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x)\,dt\,dx =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^1}dx\int\limits_{t=\frac{|x|}{a}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^1}dx\,\varphi\left(\frac{|x|}{a}\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi\left(-\frac{x}{a}, x\right)\,dx + \int\limits_{0}^{(} +\infty)\varphi\left(\frac{x}{a}, x\right)\,dx =$$

$$= a\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(t, -at)dt + a\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(t, at) = a\delta(at - |x|). \quad \boxtimes$$

ПРИМЕР 10. Доказать, что

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\vartheta(at - |x|), \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= -\left\langle \vartheta(t)\cdot\delta(at + x), \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \vartheta(t)\cdot\delta(at - x), \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\rangle.$$

□ Имеем с учётом примера 8

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta(at - |x|), \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \vartheta(at - |x|), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) \right\rangle = \int\limits_{\{(t,x)|t \geqslant \frac{|x|}{a}\}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dt\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} dt \int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} dt\,\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, at) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, -at)\right) =$$

$$= -\left\langle \vartheta(t)\cdot\delta(at + x), \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \vartheta(t)\cdot\delta(at - x), \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\rangle. \quad \boxtimes$$

§ 4. Свёртка обобщённых функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции. Тогда можно ввести в рассмотрение функцию

$$h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(t)g(x - t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x - t)g(x)\,dt$$

при условии, что эти интегралы сходятся. Далее, для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ имеем

$$\langle h(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\xi)g(x - \xi)\,d\xi\right)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^{2N}} f(\xi)\cdot g(\eta)\varphi(\eta+\xi)\,d\eta\,d\xi.$$

Это позволяет ввести определение *свёртки* обобщённых функций.

Определение 6. *Свёрткой $f*g$ обобщённых функций $f\in\mathcal{D}'$, $g\in\mathcal{D}'$ называется обобщённая функция, действующая по правилу*

$$\langle f(x)*g(x),\varphi(x)\rangle = \langle f(\xi)\cdot g(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle. \tag{4.1}$$

Замечание 5. Здесь в правой части происходит не линейная замена переменной в аргументе основной функции, а применение тензорного произведения к сложной функции $\psi(\xi,\eta)\equiv\varphi(\xi+\eta)$.

Вообще говоря, формула (4.1) имеет смысл не для всех $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $g\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, поскольку $\varphi(\xi+\eta)$ может уже не быть финитной. Однако она заведомо имеет смысл, в частности, когда одна или обе обобщённые функции финитны или (при $N=1$) когда носители функций f и g ограничены с одной стороны.

ПРИМЕР 11. Упростим выражение $\vartheta(x)*\vartheta(x)$.

□ Имеем для всякой $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\langle\vartheta(x)*\vartheta(x),\varphi(x)\rangle = \langle\vartheta(\xi)\cdot\vartheta(\eta),\varphi(\xi+\eta)\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\vartheta(\xi)\vartheta(\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\varphi(\xi+\eta)\,d\xi = \{\xi+\eta=\tau\} = \int\limits_0^{+\infty}d\eta\int\limits_\eta^{+\infty}\varphi(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{+\infty}d\tau\int\limits_0^{\tau}d\eta\,\varphi(\tau) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\tau\varphi(\tau) = \langle x\vartheta(x),\varphi(x)\rangle,$$

или $\vartheta(x)*\vartheta(x) = x\vartheta(x)$. ⊠

ПРИМЕР 12. Упростим выражение $f(x) = x^2\vartheta(x)*\vartheta(x)\sin^2 x$.

□ Имеем для всякой $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\langle f(x),\varphi(x)\rangle = \langle\xi^2\vartheta(\xi)\cdot\vartheta(\eta)\sin^2\eta,\varphi(\xi+\eta)\rangle =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\xi^2\sin^2\eta\varphi(\xi+\eta)\,d\xi =$$

$$= \{\xi+\eta=\tau\} = \int\limits_0^{+\infty}d\tau\int\limits_0^{\tau}d\eta\,\varphi(\tau)(\tau-\eta)^2\sin^2\eta =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}d\tau\varphi(\tau)(\tau-\eta)^2\sin^2\eta\,d\eta = \int\limits_0^{+\infty}d\tau\,\varphi(\tau)\left(\frac{\tau^3}{6}-\frac{\cos2\tau}{4}-\frac{\sin2\tau}{8}\right),$$

или $x^2\vartheta(x) * \vartheta(x)\sin^2 x = \vartheta(x)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{8}\right)$. $\boxtimes$

§ 5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что функционал, задаваемый определением 3, действительно определён на всём $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ и является линейным и непрерывным.

Задача 2. 1) Показать, что

$$(D^\alpha f)(x+h) = D^\alpha[f(x+h)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad h \in \mathbb{R}^N.$$

2) Показать, что

$$(D^l f)(ax+b) = a^l D^l[f(ax+b)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1), \quad h \in \mathbb{R}^1, \quad a \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

3) Показать, что при всех $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathfrak{F}(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ верно $(af)(Ax + b) = a(Ax+b)f(Ax+b)$ $(\det A \neq 0)$.
4) Упросить выражение $\delta(ax)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$).

Задача 3. Найти носители обобщённых функций $\delta(x)$, $\vartheta(x)$, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Задача 4. Описать преобразование носителя при линейной замене переменной.

Задача 5. Убедиться, что в примерах 4.1)—4.3), 4.5) можно применить лемму, сформулированную на с. 148.

Задача 6. 1) Обосновать требуемый результат для примера 4.4).
2*) Сформулировать и доказать общее утверждение, подходящее для этого случая.

Задача 7. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — финитная обобщённая функция (не обязательно регулярная!). Показать, что если $\eta(x) \equiv 0$ в окрестности $\operatorname{supp} f$, то $\eta(x)f(x) = f(x)$.

Задача 8*. Найти предел $\lim_{t\to+\infty} t^m e^{ixt}$, где $m \in \mathbb{N}$ фиксировано.

Задача 9. Исследовать на сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \delta^{(n)}(x-n)$.

Задача 10*. Проверить корректность определения тензорного произведения обобщённых функций. (Что именно нужно проверить?)

Задача 11*. Проверить свойства тензорного произведения.

Задача 12. Показать, что
1) $\vartheta(x_1, x_2, \ldots x_N) = \vartheta(x_1)\cdot\vartheta(x_2)\cdot\ldots\cdot\vartheta(x_N)$;
2) $\delta(x_1, x_2, \ldots x_N) = \delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_N)$;
3) $\frac{\partial^n \vartheta(x_1, x_2, \ldots x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N} = \delta(x_1, x_2, \ldots x_N)$.

Задача 13. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}\vartheta(at - |x|) = \vartheta(t)\cdot\delta(at+x) - \vartheta(t)\cdot\delta(at-x);$$

$$2)\ \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vartheta(at-|x|), \varphi(t,x)\right\rangle = -a\left\langle \delta(at-|x|), \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right\rangle.$$

Задача 14. Изобразить на координатной плоскости носители следующих обобщённых функций:

$$1),\delta(x-a)\cdot\delta(y-b), \quad 2)\,\vartheta(x-a)\cdot\delta(y-b), \quad 3)\,\vartheta(x-a)\cdot\vartheta(y-b).$$

Задача 15. Упростить выражение $f(x) = x^2\vartheta(x) * \vartheta(x)\sin x$.

Задача 16. На примере обобщённых функций $\vartheta(x)$, $\delta(x)$, 1 показать, что *операция свёртки не ассоциативна*.

Задача 17*. Показать, что верны формулы

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x), \quad g_\alpha(x) * g_\beta(x) = g_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x),$$

где

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}, \quad \alpha > 0; \quad g_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\cdot\exp\left(-\pi\frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad \alpha > 0.$$

Задача 18*. Показать, что в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ свёртка $x \times \times \vartheta(t) * t\cdot\vartheta(x)$ не имеет смысла.

Задача 19. Показать, что имеют место равенства:
1) $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$;
2) $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$;
3) $\left(\delta^{(l)}(x)\right) * f(x) = f^{(l)}(x)$, $l \in \mathbb{N}$.

Задача 20. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ свёртку $\vartheta(t-|x|) * \vartheta(t-|x|)$.

Лекция 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Пространство $\mathcal{S}$

Пусть $\mathcal{S}$ — это векторное подпространство таких функций $f \in \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, что $\|f\|_{nm} < +\infty$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, где

$$\|f\|_{nm} := \max_{|\alpha| \leqslant 2m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial^\alpha f(x)| . \tag{1.1}$$

Можно доказать, что числовые функции $\|\cdot\|_{nm}$ — это нормы. Таким образом, векторное пространство $\mathcal{S}$ является счётно нормированным. Пространство $\mathcal{S}$ является полным метризуемым пространством относительно указанного счётного семейства норм. Кроме того, из условия конечности величины $\|f\|_{nm} < +\infty$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$ вытекает, что функции $f(x) \in \mathcal{S}$ убывают при $|x| \to +\infty$ вместе со всеми своими производными $\partial^\alpha f(x)$ быстрее, чем функция

$$\frac{1}{(1 + |x|^2)^s} \quad \text{для всякого} \quad s \in \mathbb{N}.$$

Определение 1. *Обозначим через $\mathcal{S}'$ или $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством $(\mathcal{S}, \tau)$.*

Замечание 1. Отметим, что непрерывность элемента $f^* \in \mathcal{S}'$ в силу линейности отображения

$$f^* : (\mathcal{S}, \tau) \to \mathbb{R}^1$$

и метризуемости векторного топологического пространства $(\mathcal{S}, \tau)$ эквивалентна секвенциальной непрерывности

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

для любой последовательности $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}$ такой, что

$$\varphi_k \xrightarrow{\tau} \vartheta \Leftrightarrow \|\varphi_k\|_{nm} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty \quad \text{для всех} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Причём такую сходимость естественно назвать *сильной сходимостью* к нулевому элементу $\vartheta(x) \in \mathcal{S}$. В общем случае говорят, что *последовательность* $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}$ *сильно сходится к функции* $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, *и пишут*

$$\varphi_k \xrightarrow{\tau} \varphi \quad \textit{при} \quad k \to +\infty,$$

если

$$\|\varphi_k - \varphi\|_{nm} \to +0 \quad \textit{при} \quad k \to +\infty \quad \textit{для всех} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Докажем важную лемму.

Лемма 1. *Линейный функционал* $f^* \in \mathcal{S}'$ *тогда и только тогда, когда найдётся такая норма* $\|\cdot\|_{nm}$ *вида* (1.1) *и постоянная* $M_{nm} > 0$, *что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant M_{nm} \max_{|\alpha| \leqslant 2m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{S}, \tau)$.

Доказательство.

Достаточность. Из (1.2) получаем, что если $\{\varphi_k\} \subset (\mathcal{S}, \tau)$ и

$$\varphi_k \xrightarrow{\tau} \vartheta \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

то и

$$\langle f^*, \varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{S}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{S}'$, тогда полунорма

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi\rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{S}, \tau)$. А это в свою очередь означает, что для всех $n, m \in \mathbb{N}$ найдётся такая постоянная $M_{nm} > 0$, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant M_{nm} \|\varphi\|_{nm} \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Но норма $\|\varphi\|_{nm}$ имеет явный вид (1.1). Формула (1.2) доказана.

Лемма доказана.

§ 2. Преобразование Фурье

Определение 2. *Назовём прямым преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{S}$:

$$\widehat{\varphi}(y) \stackrel{\text{def}}{=} F[\varphi](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \varphi(x)\, dx, \quad (x, y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k. \tag{2.1}$$

Определение 3. *Назовём обратным преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{S}$:

$$\widetilde{\varphi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}\left[\varphi\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)}\varphi(y)\,dy, \quad (x,y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k. \tag{2.2}$$

Справедлива следующая теорема о линейности и непрерывности преобразования Фурье.

Теорема 1. *Операции прямого и обратного преобразования Фурье*

$$F : (\mathcal{S},\tau) \to (\mathcal{S},\tau) \quad \text{и} \quad F^{-1} : (\mathcal{S},\tau) \to (\mathcal{S},\tau)$$

являются линейными и непрерывными

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку пространство $(\mathcal{S},\tau)$ является пространством Фреше, то оно как метрическое пространство обладает свойством эквивалентности непрерывности по Коши и по Хайне. Поэтому нам достаточно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_l\} \subset (\mathcal{S},\tau)$ такой, что

$$\varphi_l \xrightarrow{\tau} \vartheta \quad \text{в} \quad (\mathcal{S},\tau) \quad \text{при} \quad l \to +\infty,$$

вытекает, что [1])

$$F\left[\varphi_l\right] \xrightarrow{\tau} \vartheta \quad \text{в} \quad (\mathcal{S},\tau) \quad \text{при} \quad l \to +\infty.$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\partial_y^\alpha F\left[\varphi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha e^{-i(x,y)}\varphi(x)\,dx, \tag{2.3}$$

где мы использовали обозначение

$$(-ix)^\alpha := (-ix_1)^{\alpha_1}\cdots(-ix_N)^{\alpha_N}, \quad \alpha := (\alpha_1,...,\alpha_N),$$

$$\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

Имеют место следующие равенства:

$$\left(1+|y|^2\right)^n F[\varphi](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\left[I-\Delta_x\right]^n e^{-i(x,y)}\,dx =$$

$$= \{\text{интегрирование по частям}\} =$$

[1]) Т. е. из сильной сходимости последовательности $\varphi_m \to \vartheta$ вытекает сильная сходимость $F[\varphi_m] \to \vartheta$.

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \, [I - \Delta_x]^n \, \varphi(x) \, dx, \quad (2.4)$$

поскольку

$$[I - \Delta_x] e^{-i(x,y)} = e^{-i(x,y)} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e^{-i(x,y)} =$$

$$= e^{-i(x,y)} - \sum_{j=1}^{N} (-iy_j)^2 e^{-i(x,y)} = \left[1 + \sum_{j=1}^{N} y_j^2 \right] e^{-i(x,y)} = [1 + |y|^2] e^{-i(x,y)},$$

и мы воспользовались интегрированием по частям, чтобы «перекинуть» оператор $[I - \Delta_x]^n$ $n \in \mathbb{N}$, где

$$\Delta_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

Замечание 2. Интегрирование по частям в формуле (2.4) нужно проверить индуктивно:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) [I - \Delta_x] \psi(x) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \psi(x) \, dx + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_{x_j} \varphi(x) D_{x_j} \psi(x) \, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \psi(x) \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-\Delta_x) \varphi(x) \psi(x) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \psi(x) [I - \Delta_x] \varphi(x) \, dx;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \, [I - \Delta_x]^n \, e^{-i(x,y)} \, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} [I - \Delta_x] \varphi(x) \, [I - \Delta_x]^{n-1} \, e^{-i(x,y)} \, dx =$$

$$= \cdots = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [I - \Delta_x]^n \varphi(x) e^{-i(x,y)} \, dx.$$

Шаг 3. Таким образом, из (2.3) и (2.4) вытекает следующая цепочка равенств:

$$(1 + |y|^2)^n \partial_y^\alpha F[\varphi](y) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha \varphi(x) (1 + |y|^2)^n e^{-i(x,y)} \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha \varphi(x)[1-\Delta_x]^n e^{-i(x,y)}\, dx =$$

$$= \{\text{интегрирование по частям}\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} [1-\Delta_x]^n \left[(-ix)^\alpha \varphi(x)\right] dx.$$

Отсюда получим следующую цепочку неравенств:

$$\left|\left(1+|y|^2\right)^n \partial_y^\alpha F[\varphi](y)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|[I-\Delta_x]^n (-ix)^\alpha \varphi(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left[\left(1+|x|^2\right)^s | \left|[I-\Delta_x]^n x^\alpha \varphi(x)\right|\right] \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1+|x|^2]^s}\, dx,$$

где

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_N \leqslant 2m, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}.$$

Для сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1+|x|^2]^s}\, dx$$

достаточно потребовать, чтобы $s > N/2, \quad s \in \mathbb{N}$.

□ Действительно, переходом к сферической системе координат получим следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1+|x|^2]^s}\, dx = S_N \int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^s}\, dr =$$

$$= S_N \int\limits_0^1 \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^s}\, dr + S_N \int\limits_1^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^s}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant S_N \int\limits_0^1 r^{N-1}\, dr + S_N \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{r^{2s+1-N}}\, dr = \frac{S_N}{N} + \frac{S_N}{2s-N} < +\infty$$

при достаточном условии, что $s > N/2$, $s \in \mathbb{N}$, где S_N — это площадь единичной N-мерной сферы. ⊠

Заметим, что имеет место следующее равенство, вытекающее из бинома Ньютона:

$$[I-\Delta_x]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-\Delta_x)^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (-\Delta_x)^k.$$

Поэтому имеет место следующее равенство:

$$[I - \Delta_x]^n \left(x^\alpha \varphi(x)\right) = \sum_{|\beta| \leqslant 2n} c_\beta P_\beta(x) \partial^\beta \varphi(x), \tag{2.5}$$

где $P_\beta(x)$ — это сумма одночленов вида $x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_N^{\gamma_N}$ с некоторыми коэффициентами, причём имеет место следующая оценка:

$$|P_\beta(x)| \leqslant M \left(1 + |x|^2\right)^{|\alpha|/2} \leqslant M \left(1 + |x|^2\right)^m, \tag{2.6}$$

поскольку $|\alpha| \leqslant 2m$. В силу формул (2.5) и (2.6) следующая оценка:

$$\max_{|\alpha| \leqslant 2m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| \left(1 + |x|^2\right)^s [I - \Delta_x]^n x^\alpha \varphi(x) \right| \leqslant$$
$$\leqslant a(n, m) \max_{|\beta| \leqslant 2n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| (1 + |x|^2)^{m+s} |\partial^\beta \varphi(x)| \right|. \tag{2.7}$$

Отсюда сразу же получаем оценку

$$\|F[\varphi]\|_{nm} \leqslant a(N, s, n, m) \|\varphi\|_{s+m\,n}, \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad s > \frac{N}{2}, \tag{2.8}$$

где, напомним,

$$\|F[\varphi](x)\|_{nm} = \max_{|\alpha| \leqslant 2m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial_x^\alpha F[\varphi](x)|,$$

$$\|\varphi\|_{s+m\,n} = \max_{|\beta| \leqslant 2n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^{s+m} \left|\partial_x^\beta \varphi(x)\right|.$$

В силу произвольности $n, m \in \mathbb{N}$ мы из (2.8) получаем, что если

$$\varphi_k \xrightarrow{\tau} \vartheta \Leftrightarrow \|\varphi_k\|_{nm} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$ фиксированных, то и

$$\|F[\varphi_k]\|_{nm} \to \vartheta \Leftrightarrow F[\varphi_k] \xrightarrow{\tau} \vartheta \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

§ 3. Операторы Фурье F и F^{-1} на пространстве $\mathcal{S}$

Теорема 2. *Операторы Фурье F и F^{-1} являются взаимно обратными операторами на $\mathcal{S}$.*

Доказательство.

Шаг 1. Для доказательства утверждения теоремы сначала докажем следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y)f(x+y)\,dy. \tag{3.1}$$

□ Действительно, имеет место цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dyg(y)\int\limits_{\mathbb{R}^N} dze^{-i(z-x,y)}f(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dzf(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N} dyg(y)e^{-i(z-x,y)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dzf(z)\widehat{g}(z-x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dyf(x+y)\widehat{g}(y). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Возьмём теперь в качестве функции $g(y)$ функцию $g(\varepsilon y)$.

$$g_\varepsilon(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g(\varepsilon x).$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\widehat{g_\varepsilon}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dze^{-i(y,z)}g(\varepsilon z) = \{w = \varepsilon z\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dw\,e^{-i(y/\varepsilon,w)}g(w) = \frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right). \tag{3.2}$$

С учётом равенств (3.1) и (3.2) приходим к следующему равенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g_\varepsilon}(y)f(x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f(x+y)\,dy = \left\{z = \frac{y}{\varepsilon}\right\}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(z)f(x+\varepsilon z)\,dz. \tag{3.3}$$

Шаг 3. Теперь возьмём в равенстве (3.3) в качестве функции $g(x)$ следующую:
$$g(x) = e^{-|x|^2/2} \Rightarrow g_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon^2|x|^2/2}.$$
Тогда переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (3.3), получим следующее равенство:
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y)\,dy. \tag{3.4}$$
Справедливы следующие свойства введённой функции $g(x)$:
$$\widehat{g}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}}e^{-i(z,y)}\,dy = e^{-|z|^2/2},\ ^{1)}$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2/2}\,dz = 1.$$
С учётом этого из равенства (3.4) приходим к следующему равенству:
$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = f(x),$$
которое иначе можно переписать как
$$F^{-1}\left[F[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Шаг 4. Аналогично доказывается и равенство
$$F\left[F^{-1}[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теорема доказана.

§ 4. Свёртка

Введем операцию свёртки основных функций. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Определим свёртку функций $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ следующим образом:
$$\varphi * \psi \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{4.1}$$
Прежде всего отметим, что интеграл в правой части равенства (4.1) определён для всех $x \in \mathbb{R}^N$, поскольку обе функции — из $\mathcal{S}$.

[1]) Этот интеграл вычисляется методами ТФКП.

Кроме того, можно ввести оператор сдвига с отражением $\mathcal{T}_z$:

$$\mathcal{T}_z u(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x-z),$$

с помощью которого легко преобразовать выражение (4.1):

$$\varphi * \psi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{T}_y \varphi(x) \psi(y)\, dy.$$

Теперь попробуем определить свёртку основной и обобщённой функций. Пусть сначала обобщённая функция $f^* \in \mathcal{S}'$ является регулярной с представителем $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Тогда её свёртку с произвольной основной функцией $\varphi \in \mathcal{S}$ можно представить в следующем виде:

$$f^* * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(y) \mathcal{T}_y \varphi(x)\, dy.$$

Но это выражение нам подсказывает, как определить свёртку произвольной обобщённой функции с основной функцией. Дадим следующее определение.

Определение 3. *Свёрткой обобщённой функции $f^* \in \mathcal{S}'$ с основной функцией $\varphi \in \mathcal{S}$ называется следующая конструкция*:

$$f^* * \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*(y), \mathcal{T}_y \varphi(x) \rangle .$$

Справедливы следующие свойства:

Свойство 1. Докажем, что операция свёртки (которая, очевидно, является нелинейной операцией) не выводит нас за рамки пространства $\mathcal{S}$.

□ Итак, пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, тогда воспользуемся следующим неравенством:

$$\left[1+|x|^2\right] \leqslant 2\left[1+|x-y|^2\right]\left[1+|y|^2\right],$$

которое имеет место, поскольку

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| \Rightarrow |x|^2 \leqslant (|x-y|+|y|)^2 = \\ = |x-y|^2 + 2|x-y||y|| + |y|^2 \leqslant 2|x-y|^2 + 2|y|^2.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left[1+|x|^2\right]^n \partial_x^\alpha (\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[1+|x|^2\right]^n \partial_x^\alpha \varphi(x-y) \psi(y)\, dy = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{\left[1+|x|^2\right]^n}{\left[1+|x-y|^2\right]^n \left[1+|y|^2\right]^n} \times$$

$$
\times\left[1+|x-y|^2\right]^n \partial^\alpha_{x-y}\varphi(x-y)\left[1+|y|^2\right]^n\psi(y)\leqslant
$$
$$
\leqslant 2^n\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n|\partial^\alpha_z\varphi(z)|\int\limits_{\mathbb{R}^N}dy\left[1+|y|^2\right]^n\psi(y)\leqslant
$$
$$
\leqslant 2^n\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n|\partial^\alpha_z\varphi(z)|\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[1+|y|^2\right]^{n+s}|\psi(y)|\times
$$
$$
\times\int\limits_{\mathbb{R}^N}dw\,\frac{1}{\left[1+|w|^2\right]^s},\quad s>N/2,\quad s\in\mathbb{N}.
$$

Тогда из этой цепочки приходим к следующему неравенству:

$$
\max_{|\alpha|\leqslant 2m}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left[1+|x|^2\right]^n\left|\partial^\alpha_x\left(\varphi*\psi\right)(x)\right|\leqslant
$$
$$
\leqslant c\max_{|\alpha|\leqslant 2m}\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n|\partial^\alpha_z\varphi(z)|\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[1+|y|^2\right]^{n+s}|\psi(y)|\leqslant
$$
$$
\leqslant cp_{nm}(\varphi)p_{n+s\,0}(\psi),
$$

и получаем в результате неравенство:

$$
\|\varphi*\psi\|_{nm}\leqslant c(m,n)\|\varphi\|_{nm}\|\psi\|_{n+s\,0}<+\infty\quad\text{при}\quad s\in\mathbb{N},\quad s>\frac{N}{2}.
$$

Стало быть, $\varphi*\psi\in\mathcal{S}$ для всех $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$. ⊠

Свойство 2. Теперь применим оператор преобразования Фурье к свёртке двух функций:

$$
F\left[\varphi*\psi\right](y)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}dx\,e^{-i(x,y)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}dz\varphi(x-z)\psi(z)=
$$
$$
=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}dz\psi(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N}dx\varphi(x-z)e^{-i(y,x-z)}e^{-i(y,z)}=
$$
$$
=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}dze^{-i(y,z)}\psi(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N}dx\varphi(x-z)e^{-i(y,x-z)}=
$$
$$
=(2\pi)^{N/2}\widehat{\psi}(y)\widehat{\varphi}(y).
$$

Свойство 3. Докажем теперь равенство

$$
F[f(x)g(x)]=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\widehat{f}*\widehat{g}. \tag{4.2}
$$

□ Ранее мы доказали равенство

$$
F\left[f*g\right]=(2\pi)^{N/2}\widehat{f}\widehat{g}. \tag{4.3}
$$

Возьмём в этой формуле вместо функций f и g функции $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ соответственно. Тогда из формулы (4.3) получим следующее равенство:

$$F\left[\widetilde{f} * \widetilde{g}\right] = (2\pi)^{N/2}\widehat{\widetilde{f}} \cdot \widehat{\widetilde{g}} = (2\pi)^{N/2} fg.$$

Но непосредственным вычислением может быть проверена справедливость следующего равенства:

$$F\left[\widetilde{f} * \widetilde{g}\right] = F^{-1}\left[\widehat{f} * \widehat{g}\right].$$

Поэтому имеем

$$F^{-1}\left[\widehat{f} * \widehat{g}\right] = (2\pi)^{N/2} fg.$$

И в результате приходим к равенству (4.2). ☒

§ 5. Транспонированный оператор

Теперь мы приступим к изучению транспонированного оператора F^t к оператору Фурье F:

$$F^t : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}',$$

$$\left\langle F^t\left[f^*\right], \varphi\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, F[\varphi]\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{S},\ f^* \in \mathcal{S}'. \qquad (5.1)$$

Рассмотрим сначала случай регулярной обобщённой функции из $\mathcal{S}'$, т. е. такой, что найдётся такая локально интегрируемая функция $f \in$ $\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, что для скобок двойственности имеет явное представление:

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx f(x)\varphi(x).$$

Тогда правая часть равенства (5.1) примет следующий вид:

$$\langle f^*, F[\varphi]\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy e^{-i(x,y)}\varphi(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \varphi(y) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx e^{-i(x,y)} f(x) = \left\langle F\left[f^*\right], \varphi\right\rangle. \qquad (5.2)$$

Так что для случая регулярных обобщённых функций из $\mathcal{S}'$ мы пришли к выводу, что оператор $F^t \equiv F$. Следовательно, для всех элементов из $\mathcal{S}'$ за определение транспонированного оператора F^t нужно взять равенство (5.1), в котором следует положить $F^t = F$.

Определение 4. *Преобразованием Фурье обобщённых функций $f^* \in \mathcal{S}'$ называется линейный оператор*

$$F^t : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}',$$

определённый следующей формулой:

$$\left\langle F^t\left[f^*\right], \varphi\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, F[\varphi]\rangle \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{S},\ f^* \in \mathcal{S}', \tag{5.3}$$

который на регулярных обобщённых функциях формально совпадает с оператором прямого преобразования Фурье F.

§ 6. Фундаментальные решения

Решение уравнения в смысле пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \ni \mathcal{E}$

$$\langle D_x \mathcal{E}(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ называется фундаментальным решением некоторого дифференциального оператора D_x.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим волновой оператор

$$D \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Найдём его фундаментальное решение.

□ Рассмотрим следующее уравнение в смысле распределений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathcal{E}(x,t) = \delta(x)\delta(t).$$

Применим преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^1$. Получим равенство в смысле пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$\frac{d^2\widehat{\mathcal{E}}}{dt^2} + k^2\widehat{\mathcal{E}} = \delta(t).$$

Его решение

$$\widehat{\mathcal{E}}(k,t) = \frac{\vartheta(t)}{(2\pi)^{1/2}}\frac{\sin(kt)}{k},$$

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \vartheta(t)\frac{\sin(kt)}{k}e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2}\vartheta(t - |x|). \quad \boxtimes$$

Семинар–Лекция 9

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В $\mathcal{D}'$

§ 1. Фундаментальные решения линейного дифференциального оператора

Определение 1. *Линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами (порядка m) будем называть оператор вида*

$$P(D) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha, \quad где \quad a_\alpha = \text{const}, \quad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha| > 0.$$

Определение 2. *Фундаментальным решением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами будем называть любую обобщённую функцию $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющую условию*

$$P(D)\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Замечание 1. Очевидно, сформулированное определение оставляет произвол в выборе фундаментального решения: его можно изменить на любое решение соответствующего однородного уравнения. Мы не будем здесь обсуждать конкретные примеры, но отметим, что такой произвол оказывается полезен с точки зрения использования фундаментального решения в свёртке с правой частью (см. ниже): для различных видов правых частей можно пытаться выбирать фундаментальные решения по-разному так, чтобы свёртка существовала.

Принципиальное значение имеет следующая теорема, которую мы приводим без доказательства. (См., например [3], с. 182.)

Теорема Мальгранжа–Эренпрайса. *Всякий линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами* (*отличный от нулевого оператора*) *имеет фундаментальное решение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

ПРИМЕР 1. Фундаментальным решением (одним из возможных!) оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$

$$\Delta \equiv D^{(2,0,0)} + D^{(0,2,0)} + D^{(0,0,2)}$$

является функция

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi r} \equiv -\frac{1}{4\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

□ Докажем этот факт. Требуется доказать, что

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(x)$$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, т. е. что для любой основной функции φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ верно соотношение

$$\left\langle \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right), \varphi(x)\right\rangle = \varphi(O). \tag{1.1}$$

1. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и докажем, что (1.1) действительно выполняется. Используя определение суммы обобщённых функций и производной обобщённой функции, получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right), \varphi(x)\right\rangle \equiv \\
&\equiv \left\langle D^{(2,0,0)}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) + D^{(0,2,0)}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) + D^{(0,0,2)}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right), \varphi(x)\right\rangle = \\
&= \left\langle -\frac{1}{4\pi r}, D^{(2,0,0)}\varphi(x) + D^{(0,2,0)}\varphi(x) + D^{(0,0,2)}\varphi(x)\right\rangle \equiv \\
&\equiv \left\langle -\frac{1}{4\pi r}, \Delta\varphi(x)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

2. Заметим, что в скобке двойственности в правой части цепочки стоит регулярная обобщённая функция, поэтому интеграл понимается в классическом смысле как интеграл Лебега или даже как несобственный интеграл Римана. Теперь введём в рассмотрение ограниченную область Ω (зависящую от φ), удовлетворяющую следующим условиям:
1) $O(0;0;0) \in \Omega$;
2) $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset \Omega$.
Тогда в последнем интеграле можно заменить интегрирование по всему пространству интегрированием по Ω:

$$\langle \mathcal{E}(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{\Omega} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx.$$

(Мы включили начало координат в область интегрирования, чтобы избежать рассмотрения различных случаев; теперь дальнейшие рассуждения будут верны независимо от включения $O \in \operatorname{supp}\varphi$.) Далее, построим шар O_ε с центром в начале координат, выбрав ε из условия $\overline{O_\varepsilon} \subset \Omega$, и положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{O_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \partial O_\varepsilon$. (Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$.)

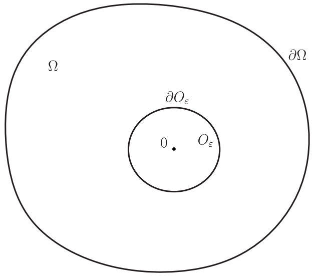

Рис. 4. Область Ω с выколотой окрестностью.

3. Очевидно, в области Ω_ε вместе с границей обе функции $\frac{1}{r}$ и $\varphi(x)$ бесконечно гладкие, что позволяет применить к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx$$

вторую формулу Грина

$$\int\limits_{V}(u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int\limits_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Необходимо учесть, что:
1) всюду, кроме начала координат, функция $\frac{1}{r}$ является гармонической;
2) всюду на $\partial\Omega$ верны равенства $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ (в силу условия $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$);
3) внешняя нормаль к области Ω_ε на S_ε направлена в сторону убывания r.
Тогда имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\right)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial r} - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial r} + \varphi(x) \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \right) \right) d\sigma =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x''(\varepsilon)) + \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \varphi(x'(\varepsilon)), \quad (1.2)$$

где в последнем равенстве мы применили формулу среднего значения для интегрирования гладких функций $\varphi(x)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ по сфере S_ε, $x'(\varepsilon), x''(\varepsilon) \in S_\varepsilon$.

4. Заметим теперь, что в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для функции $-\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ верно предельное соотношение

$$\int\limits_{O_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x)\, dx \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \quad (1.3)$$

Далее, в силу непрерывности $\varphi(x)$ и ограниченности $\nabla\varphi(x)$ имеем

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x''(\varepsilon)) + \varphi(x'(\varepsilon)) \to 0 + \varphi(O), \quad \varepsilon \to +0. \quad (1.4)$$

5. С учётом (1.3), (1.4) из (1.2) окончательно получаем путём предельного перехода при $\varepsilon \to +0$:

$$\int\limits_{\Omega} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x)\, dx = \varphi(O), \quad (1.5)$$

что и означает (1.1). ⊠

Основополагающую роль фундаментальных решений выявляет

Теорема 1. *Если* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *и существует свёртка* $\mathcal{E}(x) * f(x)$, *где* $\mathcal{E}(x)$ *— фундаментальное решение линейного дифференциального оператора* $P(D)$, *то уравнение*

$$P(D)u = f(x)$$

имеет (в смысле обобщённых функций) частное решение

$$u(x) = \mathcal{E}(x) * f(x).$$

Доказательство. Пользуясь свойством линейности дифференциального оператора $P(D)$, а также задачей 1, имеем

$$P(D)(\mathcal{E}(x) * f(x)) = (P(D)\mathcal{E}(x)) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x). \quad (1.6)$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Пусть $P(D) = \Delta$. Тогда в силу вышесказанного имеем частное решение

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * f(x).$$

$\square$ Так, в том случае, когда $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, получаем классический ньютонов потенциал:

$$\left\langle -\frac{1}{4\pi|x|} * f(x), \varphi(x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle -\frac{1}{4\pi|\xi|} \cdot f(\eta), \varphi(\xi+\eta) \right\rangle = -\iint\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{f(\eta)}{4\pi|\xi|}\varphi(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \{\tau = \xi + \eta,\ \xi = \tau - \eta\} = -\iint\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{f(\eta)}{4\pi|\tau-\eta|}\varphi(\tau)\, d\tau\, d\eta =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\tau\, \varphi(\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\eta)}{4\pi|\tau-\eta|}\, d\tau,$$

или

$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\eta)\, d\eta}{4\pi|x-\eta|}. \quad \boxtimes$$

Рассмотрим теперь случай обыкновенного линейного дифференциального оператора

$$L \equiv \frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n.$$

Как известно из классической теории дифференциальных уравнений, существует *функция Коши оператора* L — решение задачи Коши

$$\begin{cases} Lz(t) = 0, \\ z(0) = 0, \ldots, z^{(n-2)}(0) = 0,\ z^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

(Строго говоря, функцией Коши будет называться функция $K(t,s) = z(t-s)$.)

$\square$ Докажем, что в этом случае $\mathcal{E}(t) = z(t)\vartheta(t)$ — фундаментальное решение оператора L. (Заметим, что поскольку $z(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, то речь идёт об умножении обобщённой функции $\vartheta(t)$ на бесконечно гладкую функцию.)

1. Заметим (задача 2), что производные обобщённых функций можно вычислять последовательно, а также (задача 3), что для дифференцирования произведения обобщённой функции и бесконечно гладкой верна обычная формула дифференцирования произведения. Тогда с учётом начальных условий из задачи Коши (1.7) получаем

$$(z(t)\vartheta(t))' = z'(t)\vartheta(t) + z(t)\vartheta'(t) =$$
$$= z'(t)\vartheta(t) + z(t)\delta(t) = z'(t)\vartheta(t) + z(0)\delta(t) = z'(t)\vartheta(t), \tag{1.8}$$

$$(z(t)\vartheta(t))'' = (z'(t)\vartheta(t))' = z''(t)\vartheta(t) + z'(t)\delta(t) = \\ = z''(t)\vartheta(t) + z'(0)\delta(t) = z''(t)\vartheta(t), \quad (1.9)$$

$\ldots,$

$$(z(t)\vartheta(t))^{(n-1)} = \Big((z(t)\vartheta(t))^{(n-2)}\Big)' = \Big(z^{(n-2)}(t)\vartheta(t)\Big)' = \\ = z^{(n-1)}(t)\vartheta(t) + z^{(n-2)}(0)\delta(t) = z^{(n-1)}(t)\vartheta(t), \quad (1.10)$$

$$(z(t)\vartheta(t))^{(n)} = \Big(z^{(n-1)}(t)\vartheta(t)\Big)' = \\ = z^{(n)}(t)\vartheta(t) + z^{(n-1)}(0)\delta(t) = z^{(n)}(t)\vartheta(t) + \delta(t). \quad (1.11)$$

2. Подставляя найдённые производные в оператор $L(D)$, получаем

$$L(D)\mathcal{E}(t) = (L(D)z(t))\vartheta(t) + \delta(t) = \delta(t),$$

что и требовалось. ⊠

ПРИМЕР 3. Докажем, что функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!}\vartheta(t)$$

является фундаментальным решением оператора $\dfrac{d^k}{dt^k} - a$. (Здесь $a \neq = 0$ — константа.)

□ Действительно,

1. В силу предыдущего достаточно доказать, что функция

$$z(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!}$$

является решением соответствующего однородного уравнения с граничными условиями, аналогичными таковым из задачи (1.7).

2. Нетрудно установить, что

$$z(0) = \ldots = z^{(k-2)}(0) = 0,$$

$$z^{(k-1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{(n-1)k}}{((n-1)k)!}, \quad z^{(k-1)}(0) = 1,$$

$$\frac{d^k}{dt^k}z(t) = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{nk-k-1}}{(nk-k-1)!} = \sum_{l=1}^{\infty} a^{l}\frac{t^{lk-1}}{(lk-1)!} = az(t).$$

Отсюда следует, что (1.7) для оператора $L = \dfrac{d^k}{dt^k} - a$ выполнено. ⊠

§ 2. Обобщённая задача Коши

Рассмотрим классическую задачу Коши для неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = f(t), \quad t > 0, \\ u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ f(t) \in C[0; +\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

Продолжим f и решение u (существование которого следует из классической теории) нулём при $t < 0$ и обозначим полученные функции соответственно через $\widetilde{f}$, $\widetilde{u}$.

Тогда (см. задачу 4) имеем

$$\widetilde{u}^{(k)}(t) = \{\widetilde{u}^{(k)}\}\vartheta(t) + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-1-j)}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

где фигурные скобки означают, что мы берём (поточечно) значение классической производной, а в точках, где она не определена, берём, например, нулевые значения. (Заметим, что здесь речь не идёт об умножении обобщённой функции на бесконечно дифференцируемую, но это не мешает нам установить корректность обобщённой функции в правой части «вручную».)

Подставляем в уравнение. С учётом (2.2), собирая коэффициенты, имеем

$$\begin{gathered} L\widetilde{u} = \{Lu\}\vartheta(t) + u_0\delta^{(n-1)}(t) + (a_1 u_0 + u_1)\delta^{(n-2)}(t) + \ldots \\ \ldots + (a_{n-1}u_0 + a_{n-2}u_1 + \ldots + u_{n-1}) \equiv \\ \equiv f(t)\vartheta(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t) \equiv \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t), \end{gathered}$$

где (считая $a_0 = 1$)

$$\begin{gathered} c_0 = a_{n-1}u_0 + \ldots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}, \ldots, \\ c_{n-2} = a_1 u_0 + u_1, \quad c_{n-1} = u_0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Итак, $\widetilde{u}(t)$ удовлетворяет в смысле обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнению

$$L\widetilde{u} = \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t) \equiv \widetilde{\widetilde{f}}(t). \tag{2.4}$$

Заметим, что в уравнении (2.4) уже содержатся (посредством коэффициентов c_k) начальные условия задачи (2.1). Поэтому задача (2.4) называется *обобщённой задачей Коши.* В то же время, носители обобщённых функций $\mathcal{E}(t) \equiv z(t)\vartheta(t)$ и $\widetilde{\widetilde{f}}(t)$ — правой части уравнения (2.4) — ограничены с одной стороны, а поэтому (см. замечание в предыдущей лекции) определена их свёртка $\widetilde{\widetilde{u}}(t) \equiv \mathcal{E}(t) * \widetilde{\widetilde{f}}(t)$, которая в силу теоремы 2 является решением задачи (2.4).

Ранее мы исходили из классического решения задачи (2.1). Мы «упаковали» её (уравнение и граничные условия) в одно-единственное уравнение относительно функции $\widetilde{u}(t) \equiv u(t)\vartheta(t)$ и нашли решение последнего $\widetilde{\widetilde{u}}(t)$. Если удастся показать, что $\widetilde{\widetilde{u}}(t) = u(t)$ при $t > 0$, то можно будет и в самом деле говорить о сведении классической задачи Коши (2.1) к обобщённой (2.4).

Заметим прежде всего, что

$$\widetilde{\widetilde{u}}(t) = \mathcal{E}(t) * \widetilde{\widetilde{f}}(t) = \mathcal{E}(t) * (\widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t)) =$$
$$= \mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathcal{E}^{(k)}(t) = \left(\int_0^t z(t-s) f(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)}(t) \right) \vartheta(t), \tag{2.5}$$

где мы воспользовались соотношениями (1.8)—(1.11) и тождеством

$$L\left(z^{(k)}\right) = (Lz)^{(k)},$$

верным для оператора L как для оператора с постоянными коэффициентами. (Равенство $\mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) = \int_0^t z(t-s) f(s)\,ds\,\vartheta(t)$ будет доказано ниже.)

Далее можно рассуждать двояко. Можно явно проверить, что функция, стоящая в правой части (2.5), после ограничения на $[0; +\infty)$ удовлетворяет задаче Коши (2.1). А можно заметить, что задачу (2.4) мы получили как задачу, которой удовлетворяет функция $\widetilde{u}(t)$, являющаяся продолжением классического решения, и показать, что решение задачи (2.4) среди обобщённых функций, *носитель которых ограничен слева*, единственно, а поэтому с необходимостью $\widetilde{\widetilde{u}} = \widetilde{u}$. (Задачи 5, 6.)

Итак, наш подход позволил построить решение произвольной классической задачи Коши вида (2.1) исходя только из функции Коши уравнения.

Осталось доказать лишь, что $\mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) = \int_0^t z(t-s) f(s)\,ds\,\vartheta(t)$. Имеем при любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t), \varphi(t) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathcal{E}(\xi) \cdot \widetilde{f}(\eta), \varphi(\xi + \eta) \right\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\xi) \widetilde{f}(\eta) \varphi(\xi + \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\xi \int\limits_0^{+\infty} d\eta\, z(\xi) f(\eta) \varphi(\xi + \eta) = \{\tau = \xi + \eta\} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} d\tau \int\limits_0^{\tau} d\eta\, z(\tau - \eta) f(\eta) \varphi(\tau)\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \vartheta(\tau) \int\limits_0^{\tau} d\eta\, z(\tau - \eta) f(\eta) \varphi(\tau)\, d\eta =$$

$$= \left\langle \vartheta(\tau) \int\limits_0^{\tau} z(\tau - \eta) f(\eta)\, d\eta, \varphi(\tau) \right\rangle.$$

Рассмотрим примеры.

П Р И М Е Р 4.

$$\begin{cases} \dot{u} + bu = f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

□ Имеем $z(t) = e^{-bt}$, $c_0 = a_0 u_0 = u_0$, откуда

$$u(t) = u_0 e^{-bt} + \int\limits_0^t e^{-b(t-s)} f(s)\, ds. \quad \boxtimes$$

П Р И М Е Р 5.

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1. \end{cases}$$

□ Имеем $z(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $c_0 = 0 \cdot u_0 + u_1 = u_1$, $c_1 = u_0$, откуда

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{u_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega (t - s) f(s)\, ds. \quad \boxtimes$$

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Сравнить формулы (2.2) и (2.5) и объяснить, почему во втором случае при дифференцировании разрывной функции $\mathcal{E}(t)$ не появились члены вида $\alpha\delta^{(m)}(t)$.

Задача 1. 1) Доказать, что если для $f, g \in \mathcal{D}'$ существуют свёртки $f * g$, $(D^\alpha f) * g$, $f * (D^\alpha g)$, то верны равенства

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g).$$

2**) Доказать, что из существования свёртки $f * g$ следует существование остальных фигурирующих здесь свёрток. 3) Привести контрпример к обратному следствию.

Задача 2. Доказать, что производные обобщённых функций можно вычислять последовательно, т. е. для любой $f \in \mathcal{D}'$ и любых мультииндексов α, β верно

$$D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f,$$

где мультииндексы складываются покоординатно.

Задача 3. Показать, что для k-й производной произведения обобщённой функции $f(x)$ на бесконечно гладкую функцию $a(x)$ верна формула Лейбница (в которой производные обобщённый функций понимаются в соответствующем смысле.)

Задача 4. Доказать формулу (2.2).

Задачи 5*, 6*. Провести намеченные в основном тексте рассуждения, обосновывающие равенства $\widetilde{\widetilde{u}} = \widetilde{u}$, $\widetilde{\widetilde{u}} = u$ при $t > 0$ в классическом смысле.

Тематическая лекция IV

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

Лекция 7

СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. Слабая производная

Напомним определение пространств Лебега $L^p_{loc}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое множество.

Определение 1. *Говорят, что функция $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ при $p \geqslant 1$, если для всякого компакта* [1] *$K \subset \Omega$ измеримая на Ω функция $u \in \in L^p(K)$.*

Дадим определение слабой производной.

Определение 2. *Функцию $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ называют слабой производной ∂^α_x функции $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ и пишут*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ имеет место равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)\partial^\alpha_x \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Слабая частная производная ∂^α_x порядка α функции u, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u\partial^\alpha_x \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_1\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_2\varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

[1] т. е. ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^N$.

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0, 2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

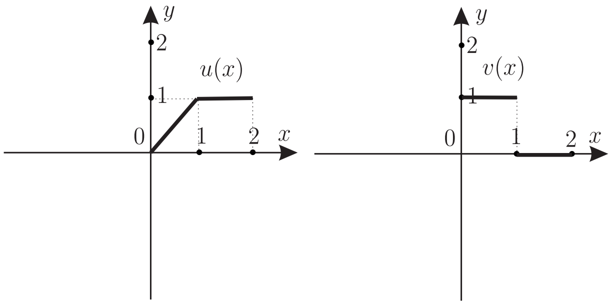

Рис. 5. Слабая производная $v(x)$ функции $u(x)$.

Покажем, что $u' = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Надо показать, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx + \int_1^2 \varphi'\,dx = x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(x)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= -\int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\,dx,$$

где мы воспользовались тем, что

$$\varphi(x) \in C_0^\infty(0, 2) \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(2) = 0.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = (0, 2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

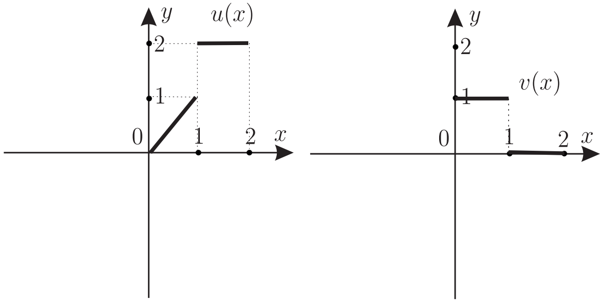

Рис. 6. Отсутствие слабой производной $v(x)$ функции $u(x)$.

Мы покажем, что производная u' не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\int\limits_0^2 u\varphi'\,dx = -\int\limits_0^2 v\varphi\,dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Предположим противное. Пусть (1.2) выполняется для некоторой функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ и всех функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$-\int\limits_0^2 v\varphi\,dx = \int\limits_0^2 u\varphi'\,dx = \int\limits_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int\limits_1^2 \varphi'\,dx =$$

$$= x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int\limits_0^1 \varphi\,dx + 2\varphi(x)\Big|_{x=1}^{x=2} = -\int\limits_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1), \tag{1.3}$$

где мы воспользовались тем, что $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$. Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ гладких функций таким образом, чтобы

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (1.3) и полагая $m \to +\infty$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе получим предельное равенство

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty}\left[\int\limits_0^2 v\varphi_m\,dx - \int\limits_0^1 \varphi_m\,dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

§ 2. Сильная производная

Определение 3. *Функция $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ при $p \geqslant 1$ называется сильной производной ∂^α_x порядка $|\alpha|$ от функции $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, если найдётся такая последовательность $\{u_n\} \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, что*

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad L^p(K), \quad \partial^\alpha_x u_n \to v \quad \textit{сильно в} \quad L^p(K) \tag{2.1}$$

при $n \to +\infty$ для любого компакта $K \subset \Omega$.

Докажем теорему о связи слабой и сильной производных.

Теорема 1. *Пусть граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ достаточно гладкая. Тогда определения слабой и сильной производной равносильны.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $v(x)$ — это сильная производная функции $u(x)$. Значит, существует такая последовательность $\{u_n\} \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(K), \quad \partial^\alpha_x u_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(K)$$

при $n \to +\infty$ для любого компакта $K \subset \Omega$. Заметим, что для каждой функции $u_n \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ справедливо равенство:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_n(x)\partial^\alpha_x \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega \partial^\alpha_x u_n(x)\varphi(x)\, dx \text{ [1)]} \tag{2.2}$$

для всех $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$. Поскольку из сильной сходимости в $L^p(K)$ вытекает слабая сходимость в этом же пространстве и $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ для некоторого компакта $K \subset \Omega$, то переходя к пределу в равенстве (2.2) при $n \to \infty$ мы получим следующее равенство:

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)\partial^\alpha_x \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C^\infty_0(\Omega),$$

т. е. пришли к определению слабой производной функции

$$u \in L^p_{loc}(\Omega).$$

Шаг 2. Теперь докажем, что из определения слабой производной вытекает определение сильной производной. Введём следующее обозначение:

$$\Omega_{\varepsilon_0} := \{x \in \Omega : \ \text{distance}(x, \partial\Omega) > \varepsilon_0\} \neq \varnothing$$

при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ — это слабая производная ∂^α_x функции $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, т. е. выполнено равенство:

[1)] Здесь ∂^α_x в обеих частях равенства понимается в классическом смысле.

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x^{\alpha}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} v(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi\in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (2.3)$$

Рассмотрим сглаживание функции $u(x)$ с параметром сглаживания $\varepsilon = 1/n$ при $n \geqslant n_0$ при достаточно большом $n_0 = n_0(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}$. Итак,

$$u_n(x) = n^N\int\limits_{\Omega}\omega(n|x-y|)u(y)\,dy \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon_0}).$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\partial_x^{\alpha}u_n(x) = n^N\int\limits_{\Omega}\partial_x^{\alpha}\omega(n|x-y|)u(y)\,dy =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}n^N\int\limits_{\Omega}\partial_y^{\alpha}\omega(n|x-y|)u(y)\,dy =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}n^N(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega}\omega(n|x-y|)v(y)\,dy \quad (2.4)$$

для всех $x\in\Omega_{\varepsilon_0}$ при достаточно малом фиксированном $\varepsilon_0 > 0$ и при достаточно большом $n_0 = n_0(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}$.

Важный момент!!! При переходе к последнему равенству мы воспользовались формулой (2.3), поскольку функция $\omega(n|x-y|)\in C_0^{\infty}(\Omega)$ при $x\in\Omega_{\varepsilon_0}$ и при достаточно большом $n_0\in\mathbb{N}$. Теперь осталось воспользоваться тем, что из свойств сглаживания вытекает

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(K) \quad \text{при} \quad n\to+\infty,$$

а из равенства (1.9) и свойств сглаживания вытекает, что

$$\partial^{\alpha}u_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(K) \quad \text{при} \quad n\to+\infty$$

для любого компакта $K\subset\Omega$, т. е. мы пришли к определению сильной производной.

Теорема доказана.

§ 3. Слабая производная произведения функций

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть функции* $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$ *имеют слабые производные* $\partial_x u, \partial_x v \in L^p_{loc}(\Omega)$ *при* $p \geqslant 2$ *и граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула*:

$$\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u \ ^{1)}, \tag{3.1}$$

понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_\Omega \partial_x(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_\Omega v(x)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $v \in C^1(\Omega)$, а функция $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ имеет слабую производную $\partial_x u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Тогда из теоремы 1 и определения 3 мы получим, что существует такая последовательность $\{u_n\} \in C^1(\Omega)$, для которой имеют место следующие предельные свойства:

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(K) \quad \text{и} \quad \partial_x u_n \to \partial_x u \quad \text{сильно в} \quad L^p(K)$$

при $n \to +\infty$ для каждого компакта $K \subset \Omega$. Тогда справедлива классическая формула дифференцирования произведения двух функций $u_n v$. Действительно,

$$\partial_x(u_n v) = u_n\partial_x v + v\partial_x u_n \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Шаг 2. Умножим это равенство на произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int\limits_\Omega \partial_x(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u_n(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + {} \\ + \int\limits_\Omega v(x)\partial_x u_n(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Рассмотрим отдельно оба слагаемых в правой части равенства (3.2). Действительно,

$$\int\limits_\Omega u_n(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega \left[u_n(x) - u(x)\right]\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx +$$

1) Символом ∂_x мы обозначаем какую-либо частную производную $\partial/\partial x_k$ при $k \in \overline{1, N}$.

$$+\int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx := \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Рассмотрим интеграл I_1. Справедлива следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_1| \leqslant \int\limits_{K} |u_n(x) - u(x)|\,|\partial_x v(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{K} |u_n(x) - u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{K} |\partial_x v(x)\varphi(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant [\mathrm{meas}(\Omega)]^{1/p'} \sup_{x\in \mathrm{K}} |\partial_x v(x)\varphi(x)| \left(\int\limits_{K} |u_n(x) - u(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

где $\operatorname{supp}\varphi \subset K \Subset \overline{\Omega}$.

Замечание 1. Отметим здесь следующий тонкий момент. Функция $\partial_x v \in C(\Omega)$ и, очевидно, функции из этого класса могут быть неограниченными в окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω, но функция φ имеет компактный носитель $K \Subset \overline{\Omega}$ и $\partial_x v \in C_b(K)$.

Теперь осталось заметить, что из сильной сходимости $u_n \to u$ в $L^p(K)$ интеграл в конце цепочки неравенств для $|\mathrm{I}_1|$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx = \mathrm{I}_2 = \int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} v(x)\partial_x u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} v(x)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \partial_x(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = -\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, из (3.2) предельным переходом при $n \to +\infty$ мы получим равенство:

$$-\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} [u(x)\partial_x v(x) + v(x)\partial_x u(x)]\,\varphi(x)\,dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, т.е. имеет место равенство

$$\partial_x(u(x)v(x)) = u(x)\partial_x v(x) + v(x)\partial_x u(x) \tag{3.3}$$

для функции $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $\partial_x u \in L^p_{loc}(\Omega)$ и $v \in C^1(\Omega)$.

Шаг 3. Для того чтобы распространить формулу (3.3) на случай функций $v \in L^p_{loc}(\Omega)$, $\partial_x v \in L^p_{loc}(\Omega)$ надо снова взять существующую в силу теоремы 1 последовательность $\{v_n\} \in C^1(\Omega)$ такую, что

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(K) \quad \text{и} \quad \partial_x v_n \to \partial_x v \quad \text{сильно в} \quad L^p(K)$$

при $n \to +\infty$ для любого компакта $K \subset \Omega$. И далее воспользоваться той же схемой, что и ранее в доказательстве этой леммы, с учётом полученного равенства (3.3).

Лемма доказана.

§ 4. Слабая производная сложной функции

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая. Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть функция $f \in C^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ и $f' \in L^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ и функция $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ имеет слабую производную $\partial_x u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial_x f(u)(x) = f'(u)\partial_x u(x) \ ^{1)}. \tag{4.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{u_m\} \in C^1(\Omega)$ и

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(K), \quad \partial_x u_m \to \partial_x u \quad \text{сильно в} \quad L^p(K)$$

при $m \to +\infty$ для любого компакта $K \subset \Omega$. Для каждой функции $u_m \in C^1(\Omega)$ справедлива формула производной (классической) сложной функции

$$\partial_x f(u_m)(x) = f'(u_m)\partial_x u_m(x).$$

Шаг 2. Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int\limits_\Omega \partial_x f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega f'(u_m)\partial_x u_m(x)\varphi(x)\,dx.$$

Рассмотрим отдельно эти два интеграла. Имеет место следующая цепочка равенств:

---

1) Символом ∂_x мы обозначаенм какую-либо частную производную ∂_{x_k} при $k = \overline{1, N}$.

$$\int\limits_{\Omega} \partial_x f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} f(u_m)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial_x\varphi(x)\,dx - \int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx. \qquad (4.2)$$

Заметим, что справедливо неравенство для почти всех $x \in \Omega$:

$$|f(u_m)(x) - f(u)(x)| \leqslant c\,|u_m(x) - u(x)|\,, \quad c = \operatorname*{ess.sup}_{t\in\mathbb{R}^1} |f'(t)|,$$

поскольку $f' \in L^\infty(\mathbb{R}^1)$. Поэтому имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial\varphi(x)\,dx\right| \leqslant c\int\limits_{\Omega} |u_m(x) - u(x)|\,|\partial_x\varphi(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_{K} |\partial_x\varphi(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{K} |u_m(x) - u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \to 0$$

при $m \to +\infty$ по построению последовательности $\{u_m\}$, где

$$\operatorname{supp}\{\varphi\} = K \Subset \overline{\Omega}.$$

Поэтому из (4.2) вытекает, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \partial_x f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx. \qquad (4.3)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f'(u_m)\partial u_m(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[f'(u_m)\partial_x u_m(x) - f'(u)\partial_x u(x)\right]\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} f'(u)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (4.4)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left[f'(u_m)\partial_x u_m(x) - f'(u)\partial_x u(x)\right]\varphi(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{K} |f'(u_m) - f'(u)|\,|\partial_x u_m(x)|\,dx +$$

$$+ c_1 \int\limits_K |\partial_x u_m(x) - \partial_x u(x)| \, |f'(u)(x)| \, dx := \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \quad (4.5)$$

где

$$c_1 = \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

Шаг 3. Справедлива следующая цепочка неравенств для I_2 :

$$\mathrm{I}_2 \leqslant c_1 \left(\int\limits_K |\partial_x u_m(x) - \partial_x u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_K |f'(u)|^{p'} \right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \left(\int\limits_K |\partial_x u_m(x) - \partial_x u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Шаг 4. Теперь заметим, что последовательность $\{u_m\} \in C^1(\Omega)$ и, поэтому для любого компакта $K \Subset \Omega$ имеем $\{u_m\} \in C^1(K)$ и, в частности, $\partial_x u_m \in L^\infty(K)$. В следующих оценках мы будем использовать этот факт.

Рассмотрим теперь I_1 из (4.5)

$$\mathrm{I}_1 = c_1 \int\limits_K |f'(u_m) - f'(u)| \, |\partial_x u_m(x)| \, dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left(\int\limits_K |\partial_x u_m|^{p'} \, dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_K |f'(u_m) - f'(u)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Поскольку последовательность $\{u_m\}$ сильно сходится к u в $L^p(K)$ с $p \in [1, +\infty]$, поэтому найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_n}\} \subset \subset \{u_m\}$, что u_{m_n} сходится почти всюду к u на K.

Шаг 5. Поскольку $f' \in C\left(\mathbb{R}^1\right) \cap L^\infty(\mathbb{R}^1)$, то приходим к выводу, что

$$f'\left(u_{m_n}\right) \to f'(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для почти всех} \quad x \in K.$$

Следовательно, по теореме Лебега приходим к выводу, что

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_1(u_{m_n}) = 0.$$

Таким образом, из (4.4) вытекает, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_\Omega f'(u_{m_n}) \partial_x u_{m_n}(x) \varphi(x) \, dx = \int\limits_\Omega f'(u) \partial_x u(x) \varphi(x) \, dx.$$

Значит, пришли к следующему равенству

$$-\int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} f'(u)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

А отсюда и вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Замечание 1. Заметим, что формально под условия леммы 3 не попадает сложная функция

$$f = f(t) = t^n, \quad f(u(x)) = u^n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

но тем не менее

$$\partial_x f(u(x)) = f'(t)\Big|_{t=u(x)} \partial_x u(x),$$

если существует слабая производная $\partial_x u \in L^p_{loc}(\Omega)$ функции $u \in \in L^p_{loc}(\Omega)$. Действительно, достаточно $(n-1)$ раз применить формулу слабой производной произведения функций (3.1).

Лекция 8

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА $W^{1,P}(\Omega)$, $W_0^{1,P}(\Omega)$ И $W^{-1,P'}(\Omega)$

В этой лекции мы рассмотрим пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ и их частный случай при $p = 2$.

§ 1. Пространства $H^1(D)$ и $H_0^1(D)$

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вещественные пространства С. Л. Соболева:

$$H_0^1(D) \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(D), \quad H^1(D) \stackrel{\text{def}}{=} W^{1,2}(D),$$

$$H^{-1}(D) \stackrel{\text{def}}{=} W^{-1,2}(D) = (W_0^{1,2}(D))^*.$$

Дадим определение пространства Соболева $H^1(D)$.

Определение 1. *Если $u \in L^2(D)$, а её слабые частные производные $v_i \in L^2(D)$ при всех $i = \overline{1, N}$, то пополнение соответствующего линейного пространства относительно нормы* [1]

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_D \left[|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N |v_i(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2}$$

обозначается символом $H^1(D)$.

Дадим определение пространства Соболева $H_0^1(D)$.

Определение 2. *Пополнение векторного пространства $C_0^\infty(D)$ по норме банахового пространства $H^1(D)$ называется банаховым пространством $H_0^1(D)$.*

Замечание 1. Отметим, что нормой на векторном пространстве $C_0^\infty(D)$ является также величина:

$$\||D_x u|\|_2, \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}),$$

где ∂_{x_k} — это соответствующие слабые частные производные по переменной x_k. И если рассмотреть пополнение $C_0^\infty(D)$, мы получим

[1] Это согласуется с определением слабой производной, поскольку $L^2(D) \subset \subset L^2_{loc}(D)$.

банахово пространство $\mathcal{D}^{1,2}(D)$ относительно указанной нормы. Оказывается, как было доказано в семинаре-лекции 10 настоящего тома, в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_2 \leqslant c_1 \| |D_x u| \|_2 \quad \text{для всех} \quad u \in H^1_0(D)$$

пространство $\mathcal{D}^{1,2}(D)$ совпадает с банаховым пространством $H^1_0(D)$ в случае ограниченной в некотором направлении области D.

Далее мы изучим свойства пространства $H^{-1}(D)$, сопряжённого к банаховому пространству $H^1_0(D)$. Введём следующие обозначения:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(D) \times H^1_0(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1_0(D)$ и

$$H^{-1}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (H^1_0(D))^*;$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : (H^1(D))^* \times H^1(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1(D)$ и $(H^1(D))^*$. Величина

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathcal{D}'(D) \times \mathcal{D}(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(D)$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(D)$.

Рассмотрим формальный вид эллиптического оператора $\mathcal{L}$, определённого следующей формулой:

$$\mathcal{L}u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \quad (1.1)$$

Пусть $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(D)$. Причём частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N}$$

в слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$$

понимается в слабом смысле (точнее из $L^2(D) \subset L^1_{loc}(D)$). Тогда при $u \in H^1_0(D)$ имеем

$$a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(D). \quad (1.2)$$

Теперь введём функционал, порождаемый функцией $f \in L^2(D)$, обозначаемый, так же, как и частная производная, символом

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$ [1]

причём это не слабая производная, а производная регулярной обобщённой функции, порождённой функцией $f \in L^2(D) \subset \mathcal{D}'(D)$, стандартной формулой

$$\left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\left\langle\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle\right\rangle = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \qquad (1.3)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(D) \subset H_0^1(D)$ и, в частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(D)$$

— это слабая производная функции $\varphi \in \mathcal{D}(D) \subset H_0^1(D)$.

Лемма 1. *Функционал* (1.3) *для всякой функции* $f \in L^2(D)$ *является линейным и непрерывным в сильной топологии пространства* $H_0^1(D)$. *Иначе говоря,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(D). \qquad (1.4)$$

Доказательство.

Действительно, для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H_0^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(D) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

имеем, в частности,

$$|||D_x\varphi_m - D_x\varphi|||_{L^2(D)} \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_D f(x)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right] dx\right| \leqslant \int\limits_D |D_x\varphi_m - D_x\varphi|\,|f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_D |D_x\varphi_m - D_x\varphi|^2\, dx\right)^2 \left(\int\limits_D |f(x)|^2\, dx\right)^2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

[1] Недоразумений это не должно вызвать, потому что в каждом конкретном случае понятно, какая производная имеется в виду: слабая или обобщённая в смысле обобщённых функций.

Стало быть, по формуле

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_D f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx$$

определён линейный и непрерывный функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{над пространством} \quad H^1_0(D) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \bigl(H^1_0(D)\bigr)^* = H^{-1}(D).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 2. *Всякий функционал над банаховым пространством $H^1(D)$ порождается функциями $f_j \in L^2(D)$ при $j = \overline{0, N}$ по формуле*

$$\langle f^*, \varphi \rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D f_0(x)\varphi(x)\, dx, \tag{1.5}$$

причём для некоторого однозначно определённого элемента $g \in$ $\in H^1(D)$ имеет место равенство:

$$f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\ ^{1)}, \quad f_0(x) = g(x).$$

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, пространство $H^1(D)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(g(x), \varphi(x))_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\, dx$$

для всех $\varphi, g \in H^1(D)$. С другой стороны, для всякого элемента $f^* \in$ $\in \bigl(H^1(D)\bigr)^*$ согласно теореме Рисса—Фреше найдётся такой единственный элемент $g \in H^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi \rangle = (g, \varphi)_1 = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\, dx,$$

где

$$f_j = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(D), \quad j = \overline{1, N}.$$

[1] В данном случае мы, как обычно, символом $\partial/\partial x_j$ обозначили слабую производную.

Шаг 2. Наконец, для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в} \quad H^1(D) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

имеем [1])

$$\|\varphi_m - \varphi\|_{L^2(D)} \to +0, \quad \||D_x\varphi_m - D_x\varphi|\|_{L^2(D)} \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_D f_j(x)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_j}\right]dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_D \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_D f_j^2(x)\,dx\right)^{1/2} \to +0,$$

$$\left|\int\limits_D g(x)[\varphi_m(x) - \varphi(x)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_D |\varphi_m(x) - \varphi(x)|^2\,dx\right)^2 \left(\int\limits_D |g(x)|^2\,dx\right)^2 \to +0$$

при $m \to +\infty$. Следовательно, формулой (1.5) задаётся линейный и непрерывный функционал над пространством $H^1(D)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для всякого элемента $f^* \in H^{-1}(D)$ найдётся такой единственный элемент $g \in H_0^1(D)$, что имеет место явное представление*

$$\langle f^*, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D f_j(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx, \quad f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\ {}^{2)}, \quad g \in H_0^1(D) \quad (1.6)$$

для всех $\varphi \in H_0^1(D)$.

Дадим эквивалентное определение банахова пространства $(H^1(D))^*$.

Определение 3. *Множество всех линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством $H^1(D)$ обозначим*

---

[1]) В дальнейшем будем использовать обозначение: $\|\cdot\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\cdot\|_{L^2(D)}$.

[2]) Это слабая производная.

символом $(H^1(D))^*$, причём это пространство является банаховым относительно нормы [1]

$$\|f^*\|_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\||D_x\varphi|\|_2=1} \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{D} f_j^*(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{D} f_0(x)\varphi(x)\, dx \right|,$$

где

$$f_j^* = \frac{\partial g}{\partial x_j}\ ^{2)}, \quad f_0 = g, \quad g \in H^1(D), \quad j = \overline{0, N}$$

— это функции, порождающие функционал.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Для любого $f^* \in (H^1(D))^*$ найдётся такое $g \in H^1(D)$, что имеют место следующие равенства*:

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2}=1} |\langle f^*, \varphi\rangle_1| = \left(\|g\|_2^2 + \||D_x g|\|_2^2\right)^{1/2}, \quad (1.7)$$

где $\varphi \in H^1(D)$. Для любого $f^* \in H^{-1}(D)$ найдётся такое $g \in H_0^1(D)$, что справедливы следующие равенства:

$$\|f^*\|_* = \sup_{\||D_x\varphi|\|_2=1} |\langle f^*, \varphi\rangle| = \||D_x g|\|_2, \quad g(x) \in H_0^1(D), \quad (1.8)$$

где $\varphi \in H_0^1(D)$.

Доказательство.

Докажем, например, равенство (1.7). Действительно, во-первых, имеет место следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left[\sum_{j=1}^{N} \|\partial_j g\|_2 \|\partial_j \varphi\|_2 + \|g\|_2 \|\varphi\|_2 \right]. \quad (1.9)$$

Заметим, что справедливо арифметическое неравенство:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^{1/2} b_j^{1/2} + a_0^{1/2} b_0^{1/2} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} a_j + a_0 \right) \left(\sum_{j=1}^{N} b_j + b_0 \right)$$

для всех $a_j \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$ при $j = \overline{0, N}$. Поэтому из (1.9) мы получим следующее неравенство:

[1] Стандартная $*$-норма.

[2] Опять слабая производная.

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left(\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\||D_x\varphi|\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2\right)^{1/2} = \left(\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, заметим, что имеет место неравенство

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left|\sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx\right|$$

для всех $\varphi \in H^1(D)$ таких, что $\left(\|\varphi\|_2^2 + \||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2} = 1$. Возьмём в этом неравенстве

$$\varphi = \frac{g}{\sqrt{\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2}}$$

и получим оценку снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \sqrt{\||D_x g|\|_2^2 + \|g\|_2^2}\,.$$

Равенство (1.7) доказано.

Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение оператора $\mathcal{L}$, определённого формулой (1.1). Причём в слагаемом

$$b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

производная понимается в слабом смысле, а производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

применённая к выражению

$$L^2(D) \ni a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u \in H_0^1(D), \quad a_{ij} \in L^\infty(D),$$

понимается уже как функционал из $H^{-1}(D)$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что

$$a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} : H_0^1(D) \to L^2(D), \quad a_{ij} \in L^\infty(D), \tag{1.10}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : H_0^1(D) \to H^{-1}(D), \tag{1.11}$$

$$b_i \frac{\partial}{\partial x_i} : H_0^1(D) \to L^2(D), \quad cI : H_0^1(D) \to L^2(D), \tag{1.12}$$

где $b_i, c \in L^\infty(D)$. Теперь заметим, что имеют место плотные вложения

$$H_0^1(D) \overset{ds}{\subset} L^2(D) \Rightarrow L^2(D) = \Big(L^2(D)\Big)^* \overset{ds}{\subset} \big(H_0^1(D)\big)^* = H^{-1}(D).$$

Таким образом, такое обобщение оператора $\mathcal{L}$, формально записанного как и ранее, действует следующим образом:

$$\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + cI: \; H_0^1(D) \to H^{-1}(D). \tag{1.13}$$

Наконец, мы можем определить так называемое слабое решение следующей однородной краевой задачи Дирихле:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial D. \tag{1.14}$$

Определение 4. *Слабым решением однородной краевой задачи Дирихле* (1.14) *называется функция $u \in H_0^1(D)$, удовлетворяющая равенству*

$$\langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in H_0^1(D), \tag{1.15}$$

причём это равенство эквивалентно равенству:

$$\int_D \Bigg[\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \\ - \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \varphi(x) - c(x)u(x)\varphi(x) \Bigg] dx = 0 \tag{1.16}$$

для всех $\varphi \in H_0^1(D)$.

Рассмотренные пространства $H^1(D)$, $H_0^1(D)$ и соответствующие сопряженные используются при рассмотрении и нелинейных краевых задач с главным линейным оператором эллиптического типа второго порядка. Однако при рассмотрении нелинейных в главном дифференциальных уравнений (например, для p-лапласиана $\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u)$) используются банаховы пространства $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ с показателем $p > 2$. Рассмотрением этих пространств мы займемся в параграфе 4. А сейчас мы изучим вопрос о явном виде оператора Рисса—Фреше для гильбертова пространства Соболева $H_0^1(D)$.

§ 2. Оператор Рисса—Фреше для гильбертового пространства $H_0^1(D)$

Пункт 1. Для построения явного вида оператора Рисса—Фреше нам нужно рассмотреть вопрос о существовании и единственности слабого решения краевой задачи, имеющей в классической постановке следующий вид:

$$-\Delta u(x) = f^*(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u|_{\partial D} = 0. \tag{2.1}$$

В слабом смысле задача ставится так:

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f^*, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H_0^1(D), \quad f^* \in H^{-1}(D). \tag{2.2}$$

Эта задача эквивалентна следующей:

$$B(u, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H_0^1(D), \quad f^* \in H^{-1}(D), \tag{2.3}$$

где билинейная форма $B(u, \varphi)$ определена равенством

$$B(u, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx. \tag{2.4}$$

Для билинейной формы справедливы выражения

$$B(u, \varphi) \leqslant \||D_x u|\|_2 \||D_x \varphi|\|_2, \quad B(u, u) = \||D_x u|\|_2^2. \tag{2.5}$$

Пункт 2. Согласно лемме Лакса—Мильграма существует единственный оператор $A \in \mathcal{L}(H_0^1(D), H_0^1(D))$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(H_0^1(D), H_0^1(D))$ такой, что

$$B(u, \varphi) = (Au, \varphi) \quad \text{для всех} \quad u,\, \varphi \in H_0^1(D), \tag{2.6}$$

где $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $H_0^1(D)$ вида

$$(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i}\, dx, \quad v_1,\, v_2 \in H_0^1(D).$$

Поэтому этот оператор A — это единичный оператор. Однако, далее мы проведём рассуждения общего содержания.

Пункт 3. Кроме того, в силу теоремы Рисса-Фреше для всякого $f^* \in H^{-1}(D)$ найдётся такая функция $w \in H_0^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi(x) \rangle = (w, \varphi). \tag{2.7}$$

Поскольку $\operatorname{Im} A = H_0^1(D)$, то для этого w найдётся такая функция $u \in H_0^1(D)$, что для этой функции u и для всех $\varphi \in H_0^1(D)$ выполнена цепочка равенств

$$Au = w \Rightarrow B(u, \varphi) = (Au, \varphi) = (w, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle,$$

из которой следует, что $u \in H_0^1(D)$ — это слабое решение исходной задачи.

Пункт 4. Единственность слабого решения следует из следующих соображений. Пусть слабых решений два: $u_1, u_2 \in H_0^1(D)$, тогда имеем:

$$B(u_1, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle, \quad B(u_2, \varphi) = \langle f^*, \varphi \rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(u_1 - u_2, \varphi) = 0 \Rightarrow B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow \||D_x(u_1 - u_2)|\|_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_0^1(D) \ni u_1 - u_2 = constant \Rightarrow constant = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Пункт 5. Таким образом, для всякого $f^* \in H^{-1}(D)$ существует единственное слабое решение $u \in H_0^1(D)$ уравнения (2.2), т. е. определён линейный изоморфизм

$$u = Jf^*, \quad J = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(D) \to H_0^1(D),$$

причём справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \langle -\Delta u, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx = (u, \varphi).$$

Пункт 6. Докажем, что оператор $J = (-\Delta)^{-1}$ является изометрическим. Действительно,

$$\|f^*\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\||D_x \varphi|\|_2 = 1} |\langle -\Delta u, \varphi \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\||D_x \varphi|\|_2 = 1} \||D_x u|\|_2 \||D_x \varphi|\|_2 = \||D_x u|\|_2 = \|u\|_{H_0^1(D)} = \|Jf^*\|_{H_0^1(D)},$$

$$\|f^*\|_* \geqslant |\langle -\Delta u, \varphi \rangle| \geqslant \left| \left\langle -\Delta u, \frac{u}{\||D_x u|\|_2} \right\rangle \right| =$$
$$= \||D_x u|\|_2 = \|u\|_{H_0^1(D)} = \|Jf^*\|_{H_0^1(D)},$$

$$\|f^*\|_* = \|Jf^*\|_{H_0^1(D)} \quad \text{для всех} \quad f^* \in H^{-1}(D).$$

Отсюда вытекает, что оператор Рисса—Фреше имеет следующий явный вид:

$$J = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(D) \to H_0^1(D), \quad u = Jf^*.$$

§ 3. Пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$

Дадим определение пространства Соболева $W^{1,p}(D)$ при $p > 2$.

Определение 5. *Если $u \in L^p(D)$ и её слабые частные производные $\partial_{x_i} u \in L^p(D)$ при всех $i = \overline{1, N}$, то пополнение соответствующего линейного пространства по норме*

$$\|u\|_{1,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_D \left[|u(x)|^p + \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i} u(x)|^p \right] dx \right)^{1/p}$$

обозначается символом $W^{1,p}(D)$.

Дадим определение пространства Соболева $W_0^{1,p}(D)$.

Определение 6. *Пополнение векторного пространства $C_0^\infty(D)$ по норме банахова пространства $W^{1,p}(D)$ называется банаховым пространством $W_0^{1,p}(D)$.*

Замечание 2. Отметим, что норма на пространстве $W_0^{1,p}(D)$ в случае ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^N$ эквивалентна норме [1])

$$\|D_x u\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_D |D_x u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}).$$

Введем обозначения.

$$W^{-1,p'}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (W_0^{1,p}(D))^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : W^{-1,p'}(D) \times W_0^{1,p}(D) \to \mathbb{R}^1.$$

Кроме того, мы используем обозначение $(W^{1,p}(D))^*$ для линейных и непрерывных функционалов над $W^{1,p}(D)$ со скобками двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1*} : (W^{1,p}(D))^* \times W^{1,p}(D) \to \mathbb{R}^1.$$

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 4. *Всякая функция $f^* \in (W^{1,p}(D))^*$ представима в следующем виде*:

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = \sum_{j=1}^N \int\limits_D g_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \, dx + \int\limits_D g_0(x) u(x) \, dx \tag{3.1}$$

для всех $u \in W^{1,p}(D)$, где $g_j \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{0, N}$.

---

[1]) В силу обобщения неравенства Фридрихса.

Доказательство.

Шаг 1. Банахово пространство $W^{1,p}(D)$ можно отождествить с подпространством

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{w = (u, D_1 u, ..., D_N u) : \ u \in W^{1,p}(D)\bigr\} \subset \\ \subset \underbrace{L^p(D) \times L^p(D) \times \cdots \times L^p(D)}_{N+1},$$

где $D_k = \partial_{x_k}$ — это соответствующие слабые производные. Причём это банахово пространство относительно нормы

$$\|w\|_W \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|D_j u\|_p = \|u\|_{W^{1,p}(D)} \ ^{1)},$$

где мы используем обозначение

$$\|u\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_D |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Шаг 2. Введём оператор

$$P : u \in W^{1,p}(D) \to w = (u, D_1 u, ..., D_N u) \in W.$$

Очевидно, что этот оператор является изометрией между банаховыми пространствами $W^{1,p}(D)$ и W при наделении пространства $W^{1,p}(D)$ такой же нормой:

$$\|Pu\|_W = \|u\|_{W^{1,p}(D)} \quad \text{для всех} \quad u \in W^{1,p}(D).$$

Шаг 3. В силу существования $P^{-1} \in \mathcal{L}(W, W^{1,p}(D))$ любой элемент $f^* \in (W^{1,p}(D))^*$ представим в виде

$$f^* = L^* P, \quad L^* = f^* P^{-1} \in W^*.$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = ((L^*, Pu)) \ ^{2)},$$

[1] Здесь мы выбрали норму на банаховом пространстве $W^{1,p}(D)$ равной выражению $\|u\|_p + \sum\limits_{j=1}^{N} \|D_j u\|_p$.

[2] Здесь мы записали последовательное действие операторов $L^* P$.

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\|u\|_{W^{1,p}(D)}=1} |\langle f^*, u\rangle_{1*}| = \\ = \sup_{\|Pu\|_W = \|u\|_{W^{1,p}(D)}=1} |((L^*, Pu))| = \|L^*\|_{W^*},$$

где $((\cdot,\cdot))$ — скобки двойственности между W и W^*. Поэтому имеет место следующее неравенство:

$$|((L^*, Pu))| \leqslant \|L^*\|_{W^*}\|Pu\|_W = \|f^*\|_{1*}\|w\|_{L^p(D)\times L^p(D)\times\cdots\times L^p(D)} = p(w)$$

при $w \in W$, где

$$p(w) = \|f^*\|_{1*}\|w\|_{L^p(D)\times L^p(D)\times\cdots\times L^p(D)}.$$

Согласно теореме Хана—Банаха существует продолжение $\widehat{L^*}$ функционала L^* с подпространства W на все банахово пространство

$$(L^p(D))^{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{L^p(D) \times L^p(D) \times \cdots \times L^p(D)}_{N+1},$$

таким образом, что

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = ((L^*, Pu)) = \langle \widehat{L^*}, w\rangle_p, \quad w \in W \subset (L^p(D))^{N+1},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ — скобки двойственности между банаховым пространством $(L^p(D))^{N+1}$ и банаховым пространством $\bigl((L^p(D))^{N+1}\bigr)^*$

$$\bigl((L^p(D))^{N+1}\bigr)^* = (L^{p'}(D))^{N+1} = \underbrace{L^{p'}(D) \times L^{p'}(D) \times \cdots \times L^{p'}(D)}_{N+1}.$$

Стало быть, найдутся такие функции $g_j \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{0, N}$, что имеют место равенства

$$\langle \widehat{L^*}, w\rangle_p = \sum_{j=1}^{N} \int_D g_j(x) w_j(x)\, dx + \int_D g_0(x) w_0(x)\, dx = \\ = \sum_{j=1}^{N} \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x)\, dx + \int_D u(x) g_0(x)\, dx.$$

Таким образом,

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = \sum_{j=1}^{N} \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x)\, dx + \int_D u(x) g_0(x)\, dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Всякий элемент* $f^* \in W^{-1,p'}(D)$ *представим, возможно, неединственным образом в следующем виде*:

$$\langle f^*, u\rangle_* = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D g_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dx \quad \text{для любого} \quad u \in W^{1,p}_0(D), \tag{3.2}$$

где $g_j \in L^{p'}(D)$ *при* $j = \overline{1,N}$.

Теперь рассмотрим вопрос об инъективном операторе, который действует из пространства $W^{1,p}_0(D)$ при $p>2$ на всё пространство $W^{-1,p'}(D)$. В отличие от случая $p=2$ этот оператор является **нелинейным оператором p-лапласиана.**

□ Действительно, рассмотрим оператор p—лапласиана:

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u), \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}). \tag{3.3}$$

При этом мы будем рассматривать этот оператор в расширенном смысле. Оператор D_x понимается в слабом смысле.

Пункт 1. В качестве области определения возьмём

$$\operatorname{dom} \Delta_p = W^{1,p}_0(D),$$

тогда

$$D_x : W^{1,p}_0(D) \to \underbrace{L^p(D) \times \cdots \times L^p(D)}_{N}.$$

Рассмотрим векторную нелинейную функцию

$$\eta = (\eta_1, ..., \eta_N) = \\ = |\xi|^{p-2}\xi : \underbrace{L^p(D) \times \cdots \times L^p(D)}_{N} \to \underbrace{L^{p'}(D) \times \cdots \times L^{p'}(D)}_{N},$$

где $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N)$. Теперь определим функционал $\operatorname{div}\eta \in W^{-1,p'}(D)$ над пространством $W^{1,p}_0(D)$ следующим образом: [1])

$$\langle \operatorname{div}\eta, \varphi\rangle_* \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \eta_j(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx$$

[1]) Можно проверить непрерывность в сильной топологии банахова пространства $W^{1,p}_0(D)$ линейного функционала $\operatorname{div}(\eta(x))$ для любой вектор-функции $\eta \in \underbrace{L^{p'}(D) \times \cdots \times L^{p'}(D)}_{N}$.

для всех $\varphi \in W_0^{1,p}(D)$ и заданной функции

$$\eta = (\eta_1, ..., \eta_N) \in \underbrace{L^{p'}(D) \times \cdots \times L^{p'}(D)}_{N}.$$

Тогда оператор Δ_p представим в следующем виде

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} \eta, \quad \eta = |\xi|^{p-2}\xi, \quad \xi = D_x u \text{ [1]}$$

при $u \in W_0^{1,p}(D)$ и получим, что этот оператор действует

$$\Delta_p : \ W_0^{1,p}(D) \to W^{-1,p'}(D).$$

Пункт 2. В дальнейшем в курсе М. О. Корпусова, А. А. Панина «Нелинейный функциональный анализ» будет доказано, что слабое решение $u \in W_0^{1,p}(D)$ задачи

$$\langle -\Delta_p u, \varphi \rangle_* = \langle f^*, \varphi \rangle_* \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(D)$$

при любом $f^* \in W^{-1,p'}(D)$ существует и единственно.

Пункт 3. Докажем теперь, что для Δ_p выполнено следующее равенство:

$$\|\Delta_p u\|_* = \||D_x u|\|_p^{p-1} \quad \text{для всех} \quad u \in W_0^{1,p}(D).$$

Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_p u\|_* = \sup_{\|D_x\varphi\|_p=1} |\langle \Delta_p u, \varphi\rangle| = \\
= \sup_{\||D_x\varphi|\|_p=1} \left| \sum_{j=1}^N \int_D |D_x u(x)|^{p-2} D_{x_j} u(x) D_{x_j}\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \\
\leqslant \sup_{\||D_x\varphi|\|_p=1} \int_D |D_x u(x)|^{p-2} \sum_{j=1}^N |D_{x_j} u(x)||D_{x_j}\varphi(x)|\, dx \leqslant \\
\leqslant \sup_{\||D_x\varphi|\|_p=1} \int_D |D_x u(x)|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^N |D_{x_j} u(x)|^2 \right)^{1/2} \times \\
\times \left(\sum_{j=1}^N |D_{x_j}\varphi(x)|^2 \right)^{1/2} dx \leqslant
\end{aligned}$$

[1] Это слабый градиент.

$$\leqslant \sup_{|||D_x\varphi|||_p=1} \int\limits_D |D_x u(x)|^{p-1} |D_x\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|||D_x\varphi|||_p=1} |||D_x u|||_p^{p-1} |||D_x\varphi|||_p = |||D_x u|||_p^{p-1}.$$

Теперь заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\|\Delta_p u\|_* \geqslant \left| \sum_{j=1}^N \int\limits_D |D_x u(x)|^{p-2} D_{x_j} u(x) D_{x_j}\varphi(x)\, dx \right| \quad \text{при} \quad |||D_x\varphi|||_p = 1,$$

в котором возьмём

$$\varphi = \frac{u}{|||D_x u|||_p}$$

и получим следующее неравенство:

$$\|\Delta_p u\|_* \geqslant |||D_x u|||_p^{p-1}. \quad \boxtimes$$

Семинар–Лекция 10

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

§ 1. Неравенство Фридрихса

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. Тогда существует такая константа C_Ω, что для всех $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ верно неравенство Фридрихса*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала это неравенство для бесконечно гладких функций u с носителем, вложенным в область Ω. Очевидно, продолжив любую из таких функций нулём всюду вне Ω, получим бесконечно гладкую функцию на всём $\mathbb{R}^N$. Пусть $a = \inf\{x_N \mid x \equiv (x_1, \ldots, x_N) \in \in \Omega\}$, $b = \sup\{x_N \mid x \in \Omega\}$. Тогда, очевидно, для каждой из рассматриваемых функций и любой точки $x \equiv (x_1, \ldots, x_N)$ верно (с учётом неравенства Коши — Буняковского)

$$\begin{aligned}|u(x_1, \ldots, x_N)|^2 = \left|\int_a^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\, dt\right|^2 \leqslant \\ \leqslant \int_a^{x_N} 1^2\, dt \cdot \int_a^{x_N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\right|^2 dt \leqslant \\ \leqslant d(\Omega) \int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\right|^2 dt \leqslant \\ \leqslant d(\Omega) \int_a^b |\nabla u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)|^2\, dt,\end{aligned}$$

где $d(\Omega)$ — диаметр области Ω. Интегрируя по области Ω, имеем

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant d(\Omega) \int\limits_a^b dx_N \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \left(\int\limits_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 \, dt \right) =$$

$$= d(\Omega) \int\limits_a^b dx_N \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \int\limits_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 \, dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant d^2(\Omega) \| |\nabla u| \|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Итак, для бесконечно гладких функций с носителем внутри Ω выполняется (1.1) с $C_\Omega = d(\Omega)$.

Шаг 2. Рассмотрим общий случай произвольной функции $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. По самому определению пространства $W_0^{1,2}(\Omega)$ функции, рассмотренные в п. 1 доказательства, плотны в нём. Поэтому существует последовательность $\{u_k\}$ такая, что

$$\|u - u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \to 0. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что и левая, и правая части неравенства Фридрихса мажорируются нормой в $W_0^{1,2}(\Omega)$, поэтому в силу (1.2) и неравенства треугольника имеем $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \to \|u\|_{L^2(\Omega)}$, $\||\nabla u_k|\|_{L^2(\Omega)} \to \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$. А поскольку (1.1) с общей константой C_Ω выполнено для всех u_k, то это неравенство выполнено и для u с той же константой.

Лемма доказана.

Следствие 1. Неравенство Фридрихса позволяет ввести на пространстве $W_0^{1,2}(\Omega)$ (где Ω — ограниченная область) эквивалентную норму

$$\|u\|'_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{\int\limits_\Omega \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx}\,,$$

что удобно в тех задачах математической физики, где старшая часть эллиптического дифференциального оператора представляет собой оператор Лапласа. (См. § 5 настоящей лекции и книгу [16].)

§ 2. Ортогональные дополнения в соболевских пространствах

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству (здесь и далее используется обозначение $H^1 \equiv W^{1,2}$)

$$\left\{ y \in H^1[a;b], \ \int\limits_a^b y(x)\,dx = 0 \right\}.$$

□ Действительно,

Пункт 1. Заметим прежде всего, что L — замкнутое подпространство в $H^1[a;b]$. Действительно, если $\|y_n - y\|_{H^1[a;b]} \to 0$, то с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем

$$\left|\int_a^b (y_n - y)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (y_n - y)^2\,dx} \cdot \sqrt{b-a} \leqslant \|y_n - y\|_{H^1[a;b]}\sqrt{b-a} \to 0.$$

Пункт 2. Построим ортогональное дополнение в $H^1[a;b]$ к подпространству L. Для этого заметим, что оператор

$$Q : z(x) \mapsto z(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(x)\,dx$$

является ортопроектором на L. В самом деле, очевидно, что Q — проектор (т. е. $Q^2 = Q$) и что его образ совпадает с L. ($\operatorname{Im} Q \subset L$, как можно проверить; $\operatorname{Im} Q \supset L$, поскольку функции из L оператор Q оставляет без изменений.)

Пункт 3. Осталось доказать, что Q — самосопряжённый оператор. Имеем при произвольных $z, w \in H^1[a;b]$:

$$(z, Qw)_{H^1[a;b]} = \int_a^b \left[z(x)\cdot(Qw)(x) + z'(x)\cdot(Qw)'(x)\right]dx =$$

$$= \int_a^b \left[z(x)\left(w(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)\,dt\right) + \right.$$

$$\left. + z'(x)\left(w(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)\,dt\right)'\right]dx =$$

$$= \int_a^b \left[z(x)w(x) + z'(x)w'(x)\right]dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b w(t)\,dt\int_a^b z(x)\,dx;$$

$$(Qz, w)_{H^1[a;b]} = \int_a^b \left[(Qz)(x)\cdot w(x) + (Qz)'(x)\cdot w'(x)\right]dx =$$

$$= \int_a^b \left[\left(z(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt\right)w(x) + \right.$$

$$\left. + \left(z(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\,dt\right)' w'(x)\right]dx =$$

$$= \int_a^b [z(x)w(x) + z'(x)w'(x)]\, dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b z(t)\, dt \int_a^b w(x)\, dx.$$

Пункт 4. Итак, $(z, Qw)_{H^1[a;b]} = (Qz, w)_{H^1[a;b]}$. Но если Q — ортопроектор на L, то

$$L^\perp = \operatorname{Im}(I - Q) = \left\{ \frac{1}{b-a}\int_a^b z(x)\, dx \mid z(x) \in H^1[a;b] \right\}.$$

Нетрудно видеть, что в $L^\perp$ содержатся все константы и только они. Итак, $L^\perp$ состоит в точности из всех элементов $H^1[a;b]$, имеющих представителя-константу. ⊠

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству

$$L = \left\{ y \in H^1[a;b],\;\; y(a) = y(b) = 0 \right\}.$$

Такое условие ставится корректно, поскольку, как следует из соответствующей теоремы вложения (теорема 2 лекции 9), каждая функция из $H^1[a;b]$ имеют непрерывный представитель.

□

Пункт 1. Заметим, что L — замкнутое подпространство в $H^1[a;b]$. Это верно в силу непрерывности вышеупомянутого вложения, т. е. оценки $\|y\|_{C[a;b]} \leqslant C\|y\|_{H^1[a;b]}$ с некоторой константой C, общей для всех функций $y \in H^1[a;b]$. Действительно, из $\|y_n - y\|_{H^1[a;b]} \to 0$ следует $\|y_n - y\|_{C[a;b]} \to 0$, а поэтому если $y_n(a) = y_n(b) = 0$, то $y(a) = y(b) = 0$.

Пункт 2. Для построения ортогонального дополнения $L^\perp$ подпространства L рассмотрим сначала достаточно гладкие функции (скажем, $z \in \mathbb{C}^{(2)}[a;b]$). Выбирая y равными всевозможным гладким функциям из L, имеем

$$0 = \int_a^b (yz + y'z')\, dx = \int_a^b (yz - yz'')\, dx + yz'\big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (yz - yz'')\, dx, \tag{2.1}$$

где внеинтегральные члены при интегрировании по частям равны нулю в силу условия $y(a) = y(b) = 0$. В силу основной леммы вариационного исчисления из (2.1) имеем $z - z'' = 0$, или

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{2.2}$$

Пункт 3. Итак, все $\mathbb{C}^2$-гладкие функции из $L^\perp$ образуют линейную оболочку функций e^x, e^{-x}. Остаётся вопрос, нет ли в $L^\perp$ негладких функций, не входящих в (2.2). Можно опираться на задачу 8 и заметить, что подпространство L задано как ядро линейного оператора $A(y) = (y(a), y(b))^T$, $A : H_0^1(a;b) \to \mathbb{R}^2$. Тогда можно утверждать, что $\dim L^{\perp} = \dim \operatorname{Im} A = 2$, откуда следует, что никаких элементов, линейно независимых с e^x, e^{-x}, в пространстве $L^{\perp}$ нет.

Пункт 4. Заметим, что мы только что описали отличие $H_0^1(\Omega)$ от $H^1(\Omega)$ в случае $\Omega = (a;b)$. ⊠

Замечание 1. Может показаться, что если гладкие функции плотны в $H_0^1(a;b)$, то они плотны в любом его подпространстве. На самом деле a priori этого утверждать нельзя: подпространство банахова пространства B может даже *вовсе не пересекаться* с множеством, всюду плотным в B. Простой пример: прямая $y = \sqrt{2}\,x$ не пересекается с всюду плотным на плоскости множеством $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0,0)\}$.

§ 3. Пример неограниченной функции из $W^{1,2}(\Omega)$

Как было отмечено выше, из первой теоремы вложения следует, что при размерности пространства $N = 1$ для функций из $W_0^{1,2}(\Omega)$ гарантируется существование непрерывного представителя. В случае высших размерностей это уже не так, что нетрудно продемонстрировать на примере функции

$$u(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \varepsilon \in (0;1/2), \tag{3.1}$$

которую нельзя сделать непрерывной никаким переопределением на множестве меры нуль. Для определённости будем рассматривать область Ω, представляющую собой единичную сферу с центром в начале координат, и докажем, что функция (3.1) принадлежит пространству $W^{1,2}(\Omega)$.

С помощью частного признака сравнения несобственных интегралов легко видеть, что эта функция принадлежит $L^2(\Omega)$, т. к. $\varepsilon < 1/2 < 3$. Осталось доказать, что её частные производные по переменным x, y, z

1) принадлежат $L^2(\Omega)$;

2) действительно являются её обобщёнными производными.

Первый факт доказывается просто. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \cdot \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \left|\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\right|^2 \leqslant \frac{r^2}{r^{4+2\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{r^{2+2\varepsilon}},$$

где мы воспользовались сферическими координатами. В силу $2 + 2\varepsilon < 3$ полученная оценка показывает, что производная u_x принадлежат $L^2(\Omega)$. Аналогичная оценка имеет место и для остальных производных. Второй факт рекомендуется доказать самостоятельно (см. задачу 4), используя технику «вырезания особенности», подобно тому, как это было сделано при рассмотрении фундаментального решения в лекции 5г.

§ 4. Пространства Соболева с отрицательными индексами

Напомним, что пространства с отрицательными индексами определяются как сопряжённые к соответствующим «обычным» пространствам:
$$W^{-k,p'}(\Omega) = \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$
Введя эти пространства, можно рассматривать дифференциальные операторы, определённые на всём исходном пространстве Соболева. Для примера рассмотрим пространство $H_0^1[a;b]$ с «усечённым» скалярным произведением
$$(u,v)_{H_0^1[a;b]} = \int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx \tag{4.1}$$
и пространство
$$H^{-1}[a;b] = \left(H_0^1[a;b]\right)'.$$
Это позволяет определить оператор второй производной
$$D^2 : H_0^1[a;b] \to H^{-1}[a;b]$$
следующим образом: пусть при каждом $u \in H_0^1[a;b]$ элемент $w \equiv D^2 u \in \left(H_0^1[a;b]\right)'$ есть ограниченный линейный функционал, действующий по правилу
$$\langle w, v\rangle = -\int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx, \tag{4.2}$$
где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между $H_0^1[a;b]$ и $H^{-1}[a;b]$. Легко видеть, что правая часть соотношения (4.2) действительно задаёт ограниченный линейный функционал на $H_0^1[a;b]$, поэтому такое определение корректно. Его мотивировка также понятна: если $u \in \mathbb{C}^{(2)}[a;b]$, то из (4.2) с помощью интегрирования по частям с учётом граничных условий получаем:
$$\langle w, v\rangle = -\int\limits_a^b u'(x)v'(x)\,dx = \int\limits_a^b u''(x)v(x)\,dx,$$
то есть для $u \in C^{(2)}[a;b]$ функционал w представляется в виде
$$\langle w, v\rangle = \int\limits_a^b U(x)v(x)\,dx,$$

где $U(x) = u''(x)$, причём функция $U(x)$ не может быть равна никакой другой непрерывной функции (почему?).

Вычислим теперь норму w как элемента $H^{-1}[a;b]$. По определению нормы функционала с учётом выбранного в $H_0^1[a;b]$ скалярного произведения (4.1) имеем

$$\|w\| = \sup_{v\neq\vartheta} \frac{\left|\int_a^b u'v'\,dx\right|}{\|v\|_{H^1[a;b]}} \leqslant \sup_{v\neq\vartheta} \frac{\sqrt{\int_a^b (u')^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b (v')^2\,dx}}{\sqrt{\int_a^b (v')^2\,dx}} = \|u\|_{H^1[a;b]},$$

причём, как показывает выбор $v = u$, равенство достигается. Итак,

$$\|D^2u\|_{H^{-1}[a;b]} = \|u\|_{H^1[a;b]},$$

и на первый взгляд трудно вычисляемая норма в «странном» пространстве оказывается очевидной в том случае, где она естественным образом возникает.

В данном случае мы привели пример элемента $w \in H^{-1}[a;b]$ как результата применения дифференциального оператора. Оказывается, все элементы пространств с отрицательными индексами носят подобный характер. Именно, верна

Теорема 1. (См. [14], с. 324, теорема 34.) *Всякий элемент* $f^* \in \in W^{-k,p'}(\Omega)$ *может быть представлен в виде*

$$f^* = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \partial^\alpha g_\alpha(x), \quad \text{где} \quad g_\alpha(x) \in L^{p'}(\Omega).$$

Рекомендуется сравнить этот результат с теоремой о представлении обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$.

§ 5. Применение пространств Соболева

Рассмотрим на примере простой ситуации, как можно провести исследование линейной задачи математической физики с использованием несколько другого подхода, чем изложен в предыдущем параграфе. Он не требует введения пространств отрицательного индекса, но существенно опирается на факты из теории гильбертовых пространств.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, \quad f \in L^2(\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

с числовым параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ в ограниченной области Ω.

Известно, что существование классического решения этой задачи, вообще говоря, нельзя гарантировать без требования гёльдеровости правой части f и некоторых условий гладкости на границу области. (См., напр., [6].) Однако можно ослабить требования и искать обобщённое решение в смысле Соболева, т. е. элемент $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий задаче (5.1) в некотором обобщённом смысле.

Чтобы обеспечить «обратную совместимость», т. е. гарантировать, что классическое решение (если оно существует) удовлетворяет обобщённой задаче, поступим при построении последней следующим образом. Умножим уравнение из (5.1) на $\overline{w}$, где w — произвольная функция из $\mathbb{C}_0^{(2)}(\Omega)$, черта означает комплексное сопряжение. После интегрирования по частям получим:

$$(u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2},$$

где учтены граничные условия $w \in C_0^{(2)}(\Omega)$ и выбор «усечённого» скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$. (В данном параграфе мы используем комплексные пространства; при этом скалярные произведения выбираем линейными по первому аргументу и сопряжённо-линейными по второму.)

Заметим теперь, что в силу плотности множества $C_0^{(2)}(\Omega)$ (и даже $C_0^\infty(\Omega)$) в пространстве $H_0^1(\Omega)$ можно заменить $w \in C_0^{(2)}(\Omega)$ на $w \in H_0^1(\Omega)$ (проведите эти рассуждения самостоятельно; аналогичное уже было сделано выше). В итоге получаем задачу

$$\begin{cases} \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (u, w)_{H^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2}, \\ \hfill u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{5.2}$$

где условие $u \in H_0^1(\Omega)$ задаёт не только функциональное пространство, в котором ищется решение, но и граничные условия.

Как мы покажем, результаты относительно разрешимости задачи (5.2) непосредственно следуют из теории вполне непрерывных линейных операторов.

Для этого перепишем задачу (5.2) в операторном виде. Заметим, что при $f \in L^2(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega)$ выражения

$$(f, w)_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{и} \quad (u, w)_{L^2(\Omega)}$$

задают соответственно сопряжённо-линейный функционал и полуторалинейную форму в $H_0^1(\Omega)$ (проверьте это, пользуясь нашим определением скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$ и информацией из параграфа 0).

Поэтому в силу теорем Рисса—Фреше (о представлении лениейного функционала в гильбертовом пространстве) и Лакса—Мильграма (о представлении полуторалинейной формы) для случая комплексного гильбертова пространства можно утверждать, что существуют такие функция $F \in H_0^1(\Omega)$ и линейный ограниченный оператор $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, что

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega) \quad (v, w)_{L^2(\Omega)} = (Av, w)_{H_0^1(\Omega)}, \;\; (f, w)_{L^2(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Тогда (5.2) можно переписать в виде

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(Au, w)_{H_0^1(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

В силу произвольности $w \in H_0^1(\Omega)$ и свойств скалярного произведения последнее равенство эквивалентно задаче

$$(E + \lambda A)u = F, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{5.4}$$

Из (5.4) сразу видно, что при $\lambda = 0$ (уравнение Пуассона) решение существует и единственно, $u = F$. (Конечно, не стоит удивляться «лёгкости» получения этого результата: во-первых, мы использовали мощные результаты теории гильбертовых и соболевских пространств, а во-вторых, мы рассматриваем обобщённые, «ослабленные» решения.) Рассмотрим случай $\lambda \neq 0$.

Докажем, что оператор A является вполне непрерывным.

□ Для этого (см. задачу 9) докажем, что он переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Итак, пусть $v_n \rightharpoonup v$ в $H_0^1(\Omega)$. Тогда, во-первых, $v_n \to v$ в $L^2(\Omega)$ в силу теорем о компактных вложениях, а во-вторых, $Av_n \rightharpoonup Av$ в $H_0^1(\Omega)$, поскольку непрерывный оператор непрерывен и в смысле слабой сходимости. Снова используя теорему о компактном вложении, получаем $Av_n \to Av$ в $L^2(\Omega)$. Далее, с учётом определения оператора A (см. (5.3)) имеем

$$\begin{aligned}
&(Av_n - Av, Av_n - Av)_{H_0^1(\Omega)} = (v_n - v, Av_n - Av)_{L^2(\Omega)} = \\
&\quad = (v_n, Av_n)_{L^2(\Omega)} - (v_n, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av_n)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} \to \\
&\qquad \to (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} = 0,
\end{aligned}$$

где мы использовали непрерывность скалярного произведения по отдельным аргументам и по их совокупности. Итак, $Av_n \to Av$ в $H_0^1(\Omega)$, что и требовалось. ⊠

Установим также, что оператор A самосопряжён. Имеем

$$(Av, w)_{H_0^1(\Omega)} = (v, w)_{L^2(\Omega)} = \overline{(w, v)_{L^2(\Omega)}} = \overline{(Aw, v)_{H_0^1(\Omega)}} = (v, Aw)_{H_0^1(\Omega)}.$$

Теперь дальнейшие результаты следуют из теории вполне непрерывных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. (См., напр., [12].) Мы получаем:

1) существует не более чем счётное число значений $\lambda = \lambda_k$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$, для которых задача (5.4) имеет нетривиальное решение при $f \equiv 0$;

2) все такие значения (которыми мы будем называть *собственными значениями задачи Дирихле для оператора Лапласа в области* Ω) действительны;

3) при $\lambda \neq \lambda_k$ задача (5.4) имеет единственное решение.

Можно рассмотреть и случай более общего эллиптического оператора. Если он будет содержать и производные первого порядка, то оператор, роль которого в нашем рассуждении играет A, окажется, вообще говоря, несамосопряжённым (см., например, упомянутую выше книгу [16]) и придётся использовать более общую теорию вполне непрерывных (компактных) операторов (см., напр., [1]).

§ 6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по тексту.

Задача 1*. Улучшить константу в неравенстве Фридрихса, используя (с обоснованием!) экстремальное свойство первой собственной функции задачи Дирихле для оператора Лапласа. Показать на примере, что новая оценка действительно лучше (а по её смыслу, очевидно, является неулучшаемой).

Задача 2*. Доказать неравенство Фридрихса для неограниченных областей Ω, «вложенных в слой», т. е. таких, что для некоторой координаты x_k существуют такие d_1 и d_2, что $d_1 \leqslant \inf_{x\in\Omega} x_k \leqslant d_2$.

Задача 3. Для пространства $H_0^1(-1;1)$ с «усечённым» скалярным произведением указать «представление дельта-функции», т. е. найти такую функцию $y \in H_0^1(-1;1)$, что

$$\forall z \in H_0^1(-1;1) \ \ (y,z)_{H_0^1} = z(0), \quad (y,z)_{H_0^1} = \int\limits_{-1}^{1} y'(x)z'(x)\,dx.$$

Задача 4. Завершить рассмотрение примера с $u(x,y,z) = 1/\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\varepsilon/2}$, доказав, что частные производные этой функции, существующие почти всюду в единичном шаре, являются обобщёнными производными этой функции в смысле Соболева. (*Указание*: необходимую для этого формулу «интегрирования по частям» можно получить из формулы Остроградского — Гаусса, применяя последнюю к вектор-функции $\{u(x)\varphi(x);0;0\}$.)

Задача 5. Доказать, что функция-«ступенька»

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x \in [1;2] \end{cases}$$

имеет классическую производную всюду, кроме одной точки, но не имеет обобщённой производной в смысле С. Л. Соболева. (Ср. с результатом предыдущей задачи!)

Задача 6. Перенести рассуждения § 4 на случай более общего эллиптического оператора

$$Du = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

сформулировав некоторые условия на коэффициенты a_{ij}, b_i, c.

Задача 7*. Доказать, что семейство собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа всегда счётно (тогда как общая теория вполне непрерывных самосопряжённых операторов гарантирует лишь не более чем счётное количество характеристических чисел).

Задача 8*. Назовём *факторпространством* B/L банахова пространства B по его (замкнутому) подпространству L линейное пространство классов эквивалентности элементов пространства B, где x y тогда и только тогда, когда $x - y \in L$. Размерность пространства B/L называется *коразмерностью* подпространства L и обозначается $\operatorname{codim} L$.

1) Завершить определение, доказав, что введённое отношение действительно является отношением эквивалентности, и введя на B/L линейные операции. Доказать, что полученное пространство действительно является линейным.

2) Пусть $A : B_1 \to B_2$ — линейный оператор, определённый на всём пространстве B_1. Доказать, что

$$\operatorname{codim} \ker A \equiv \dim(B_1/\ker A) = \dim \operatorname{Im} A.$$

(Размерности могут быть и бесконечными!)

3) Доказать, что в гильбертовом пространстве $\operatorname{codim} L = \dim L^{\perp}$.

Задача 9. Доказать, что для линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве, достаточным условием полной непрерывности является следующее: для любой последовательности $\{x_n\}$ слабая сходимость $x_n \rightharpoonup x$ влечёт сильную сходимость $Ax_n \to Ax$. *Указание.* Учесть, что в рефлексивном банаховом пространстве из любой ограниченной последовательности можно извлечь слабо сходящуюся.

Лекция 9

ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВА $W_0^{1,P}(\Omega)$

§ 1. Случай $N > p$

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет гладкую границу $\partial\Omega$.

Теорема 1. *Пусть $N > p$. Тогда имеет место непрерывное вложение*: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\||D_x u|\|_p, \quad p^* = \frac{Np}{N-p}. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем неравенство (1.1) для функций $u \in C_0^{(1)}(\Omega)$. [1]) Заметим, что эту функцию можно продолжить нулём вне области $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ с сохранением класса гладкости, т. е. продолженная функция будет принадлежать классу $C_0^{(1)}(\mathbb{R}^N)$. Продолженную функцию будем обозначать также $u(x)$.

Справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{x_i} dy_i \, |\partial_{x_i} u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \, |D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|, \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}).$$

N раз перемножим это неравенство и получим следующее неравенство:

$$|u(x)|^N \leqslant \prod_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \, |D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|.$$

[1]) Индекс «0» внизу означает, что носитель произвольной функции из этого класса имеет компактный носитель, принадлежащий Ω.

Теперь возведем обе части этого неравенства в степень $(N-1)^{-1}$ и получим неравенство

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \ |D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)}. \tag{1.2}$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x_1 и тогда получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)} \ dx_1 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_1 |D_x u(y_1, x_2, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_1 \prod_{i=2}^{N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \ |D_x u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)}. \tag{1.3}$$

Шаг 2. Сейчас воспользуемся обобщённым неравенством Гёльдера. Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |f_2(x) \cdots f_N(x)| \ dx_1 \leqslant \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3} \cdots \|f_N\|_{p_N}, \tag{1.4}$$

где

$$\|f_j\|_{p_j} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |f_j|^{p_j} \ dx_1\right)^{1/p_j}, \quad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots \frac{1}{p_N} = 1, \quad j = \overline{2, N}. \tag{1.5}$$

Теперь воспользуемся этим неравенством для того, чтобы оценить правую часть неравенства (1.3), положив в обобщённом неравенстве Гёльдера (1.4)

$$p_2 = N-1, ..., p_N = N-1, \quad \underbrace{\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} + \cdots \frac{1}{N-1}}_{N-1} = 1,$$

а в качестве $f_k(x)$ возьмём следующие функции:

$$f_k(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_N) :=$$
$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_k \, |D_x u(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, ..., x_N)|\right)^{1/(N-1)}, \quad k = \overline{2, N}.$$

Из выражения (1.3) и обобщённого неравенства Гёльдера вытекает цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1\right)^{1/(N-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_2(x) f_3(x) \cdots f_N(x)\, dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1\right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_N\right)^{1/(N-1)} \tag{1.6}$$

Теперь проинтегрируем неравенство (1.6) по переменной x_2 и получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |D_x u(x)|\, dx_1\right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1\, dx_3\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_N\right)^{1/(N-1)}.$$

Воспользовавшись опять обобщённым неравенством Гёльдера, конкретный вид которого аналогичен неравенству (1.4), получим отсюда неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_3\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 dx_2 dx_N \right)^{1/(N-1)} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \right)^{2/(N-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_4 \right)^{1/(N-1)} \times \cdots$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_N \right)^{1/(N-1)}$$

На следующем шаге мы получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^{N/(N-1)} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^4} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 \right)^{1/(N-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \right)^{3/(N-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_5 \right)^{1/(N-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D_x u(x)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_N \right)^{1/(N-1)}$$

Продолжая дальше интегрирование по следующей переменной с последующим применением обобщённого неравенства Гёльдера, на N-м шаге получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)} \, dx \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \, |D_x u(x)| \right)^{N/(N-1)} .$$

Отсюда приходим к следующему неравенству:

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u| \, dx. \tag{1.7}$$

Следовательно, неравенство (1.1) при $p = 1$ доказано.

Шаг 3. Для доказательства этого неравенства при $p > 1$ вместо функции u в (1.7) надо подставить функцию $|u|^\beta$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, получим цепочку неравенств [1])

$$\||u|^\beta\|_{N/(N-1)} \leqslant \beta \int\limits_\Omega |u|^{\beta-1}\,|D_x u|\,dx \leqslant \\ \leqslant \beta \left\||u|^{\beta-1}\right\|_{p'} \||D_x u|\|_p, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \quad (1.8)$$

Относительно $\beta > 1$ потребуем, чтобы

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1)\,\frac{p}{p-1} \Rightarrow \beta = \frac{p(N-1)}{N-p}, \quad N > p.$$

Можно доказать, что при $p > 1$ величина $\beta > 1$. Кроме того, для

$$\beta = \frac{p(N-1)}{N-p}$$

имеет место выражения:

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1)\,\frac{p}{p-1} = p^* := \frac{Np}{N-p} \quad \text{при} \quad N > p.$$

Поэтому

$$\||u|^\beta\|_{N/(N-1)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{\beta N/(N-1)}\,dx\right)^{(N-1)/N} = \\ = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{\beta/p^*} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(N-1)/N},$$

$$\||u|^{\beta-1}\|_{p'} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{(\beta-1)p/(p-1)}\,dx\right)^{(p-1)/p} = \\ = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(\beta-1)/p^*} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(p-1)/p}.$$

[1]) Заметим, что в слабом смысле имеет место равенство $D_x|u|^\beta = \beta|u|^{\beta-2}uD_x u$ при $\beta > 1$.

Следовательно, из (1.8) приходим к неравенству:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(N-1)/N} \leqslant \beta \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(p-1)/p} \||D_x u|\|_p,$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(N-1)/N-(p-1)/p} \leqslant \beta\||D_x u|\|_p,$$

из которого сразу же вытекает неравенство (1.1), поскольку

$$\frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p} = \frac{N-p}{Np} = \frac{1}{p^*}.$$

Шаг 4. Докажем теперь неравенство (1.1) для функций из $W_0^{1,p}(\Omega)$. Пусть последовательность

$$\{u_m\} \subset C_0^{(1)}(\Omega)$$

такова, что она сходится сильно к u в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Возьмём $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство (1.1) к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$ и получим

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\,\||D_x u_{m_1} - D_x u_{m_2}|\|_p\,, \quad p^* = \frac{Np}{N-p}. \tag{1.9}$$

Поскольку последовательность $\{u_m\}$ сходится в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то она фундаментальна в этом пространстве, следовательно, из неравенства (1.9) вытекает, что эта последовательность фундаментальна и в $L^{p^*}(\Omega)$ и в силу полноты этого пространства сходится сильно к тому же элементу $u \in L^{p^*}(\Omega)$. [1]

Таким образом, мы можем перейти к пределу при $m_1 \to +\infty$ в неравенстве (1.9) и получить следующее неравенство:

$$\|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\,\||D_x u - D_x u_{m_2}|\|_p\,. \tag{1.10}$$

Тем самым, отсюда вытекает неравенство

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \|u_{m_2}\|_{p^*} + \|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\||D_x u_{m_2}|\|_p + c\||D_x u - D_x u_{m_2}|\|_p,$$

в котором можно перейти к пределу при $m_2 \to +\infty$ и, воспользовавшись очевидным неравенством

[1] Для доказательства этого факта нужно рассмотреть банахово пространство $B = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega)$, которое полно относительно нормы $\|u\| = \||D_x u|\|_{p^*} + \|u\|_p$, а пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ — локально выпуклое ВТП.

$$\left| |||D_x u_{m_2}|||_p - |||D_x u|||_p \right| \leqslant |||D_x u - D_x u_{m_2}|||_p \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{m_2 \to +\infty} |||D_x u_{m_2}|||_p = |||D_x u|||_p,$$

получить следующее неравенство:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c|||D_x u|||_p \quad \text{для всех} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Теорема доказана

Таким образом, мы рассмотрели случай $N > p$.

§ 2. Случай $N < p$

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ является ограниченной с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Теорема 2. *Пусть $N < p$. Тогда имеет место непрерывное вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$:*

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leqslant c \left(\operatorname{meas}\Omega\right)^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} |||D_x u|||_p. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in C_0^{(1)}(\Omega)$.

Шаг 1. Приступим теперь к доказательству неравенства (2.1). Область Ω будем считать ограниченной. В неравенстве (1.8), которое напомним имеет вид

$$\||u|^\beta\|_{N/(N-1)} \leqslant \beta \left\||u|^{\beta-1}\right\|_{p'} |||D_x u|||_p,$$

перейдем от функции $u(x)$ к функции $\overline{u}(x)$, связанной с $u(x)$ выражением

$$\overline{u}(x) = \frac{u(x)}{|||D_x u|||_p}. \tag{2.2}$$

После подстановки получим следующее неравенство:

$$|||D_x u|||_p^\beta \||\overline{u}|^\beta\|_{N'} \leqslant \beta |||D_x u|||_p |||D_x u|||_p^{\beta-1} \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p'}, \quad N' = \frac{N}{N-1}.$$

Откуда сразу же приходим к неравенству

$$\||\overline{u}|^\beta\|_{N'} \leqslant \beta \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p'}, \tag{2.3}$$

которое для удобства перепишем в следующем виде:

$$\left(\int_\Omega |\overline{u}|^{\beta N'}\, dx\right)^{1/N'} \leqslant \beta \left(\int_\Omega |\overline{u}|^{p'(\beta-1)}\, dx\right)^{1/p'}.$$

Отсюда получим следующее неравенство:

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'}^{\beta} \leqslant \beta\|\overline{u}\|_{p'(\beta-1)}^{\beta-1} \Rightarrow \|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta}\|\overline{u}\|_{p'(\beta-1)}^{1-1/\beta}. \tag{2.4}$$

Шаг 2. Теперь сделаем важное предположение, от которого мы затем в конце доказательства избавимся, — пусть

$$|\Omega| = 1.\ ^{1)}$$

Полезность этого предположения заключается в том, что если $p_1 > p_2$, то справедливо неравенство

$$\|v\|_{p_2} \leqslant \|v\|_{p_1} \quad \text{для всех} \quad v \in L^{p_1}(\Omega).$$

□ Действительно, в силу неравенства Гёльдера справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} = \left(\int\limits_{\Omega} 1 \cdot |u|^{p_2}\,dx\right)^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_{\Omega} 1^{q'}\,dx\right)^{1/q'} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_1}\,dx\right)^{p_2/p_1}\right)^{1/p_2} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1},$$

где

$$q' = \frac{q}{q-1}, \quad q = \frac{p_1}{p_2}. \quad \boxtimes$$

С учетом этого предположения из неравенства (2.4) получим

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta}\|\overline{u}\|_{p'\beta}^{1-1/\beta}, \tag{2.5}$$

здесь мы воспользовались очевидным неравенством $p'(\beta-1) < p'\beta$.

Шаг 3. Теперь введем обозначение:

$$\varepsilon := \frac{N'}{p'} > 1, \quad \beta = \varepsilon^m, \quad N' = \frac{N}{N-1}, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

поскольку $p > N$. Отсюда сразу же приходим к равенству.

$$\beta p' = \varepsilon^{m-1} N'.$$

Из (2.5) с учётом введённых обозначений вытекает следующее неравенство:

$$\|\overline{u}\|_{\varepsilon^m N'} \leqslant \varepsilon^{m/\varepsilon^m}\|\overline{u}\|_{\varepsilon^{m-1}N'}^{1-1/\varepsilon^m} \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

[1]) Символом $|\Omega|$ мы обозначили меру Лебега множества Ω.

Возьмём в этом неравенстве $m = 1$ и получим оценку

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon} \|\overline{u}\|_{N'}^{1-1/\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Шаг 4. С другой стороны, из неравенства (1.7) и нашего предположения, что $|\Omega| = 1$, получим неравенства

$$\|u\|_{N'} \leqslant \||D_x u|\|_1 \leqslant \||D_x u|\|_p.$$

Отсюда с учетом (2.2) сразу же приходим к неравенству

$$\|\overline{u}\|_{N'} \leqslant 1.$$

Значит из (2.7) приходим к неравенству:

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (2.6) при $m = 2$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2} \left(\varepsilon^{1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} = \varepsilon^{2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon - 1/\varepsilon^3} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 1.$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (2.6) при $m = 3$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^3} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3} \left(\varepsilon^{2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3 + 2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}.$$

Следовательно, на m-м шаге мы получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^m} \leqslant \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{m} k/\varepsilon^k} \leqslant a := \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k/\varepsilon^k}, \quad \varepsilon > 1.$$

Перейдя к пределу при $m \to +\infty$, получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{\infty} \leqslant a.$$

Отсюда с учетом определения функции $\overline{u}(x)$ получим неравенство:

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leqslant a \||D_x u|\|_p.$$

Шаг 5. Теперь избавимся от требования $|\Omega| = 1$. Поскольку $u \in C_0^{(1)}(\Omega)$, то для продолженной нулём функции $u \in C_0^{(1)}(\mathbb{R}^N)$ справедлива следующая цепочка выражений:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x)| \leqslant a \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_x u|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Применим это неравенство к функции $u\left(|\Omega|^{1/N}x\right) \in C_0^{(1)}(\Omega_1)$. Тогда, делая в этом неравенстве замену

$$y_i = |\Omega|^{1/N} x_i \quad \text{при} \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in \Omega_1 = \frac{1}{|\Omega|^{1/N}}\Omega, \quad |\Omega_1| = 1,$$

получим следующее неравенство:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} |u(y)| \leqslant a|\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_y u(y)|^p \, dy \right)^{1/p}.$$

Далее нужно воспользоваться компактностью носителя функции $u \in \in C_0^{(1)}(\Omega)$ для уже любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Шаг 6. Мы доказали наши неравенства для случая функции $u \in \in C_0^{(1)}(\Omega)$. Теперь нужно продолжить эти результаты для функций из $W_0^{1,p}(\Omega)$. Это проводится точно так же, как и на шаге 4 теоремы 1.

Теорема доказана.

Л е к ц и я 10

ТЕОРЕМЫ О ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВА $W_0^{1,P}(\Omega)$

§ 1. Случай $N > p$: теорема Реллиха—Кондрашова

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Т е о р е м а 1. *Имеет место вполне непрерывное вложение*: [1)]

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \textit{при} \quad p < N \tag{1.1}$$

для всех $q \in [1, p^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Заметим, что в силу неравенства (1.1) теоремы вложения 1 из лекции 9 в случае $p < N$ и ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывное вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ при $q \in [1, p^*]$.

Шаг 2. В силу неравенства (1.1) лекции 9, которое имеет вид

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant c\||D_x u|\|_{L^p(\Omega)}, \quad p^* = \frac{Np}{N-p}, \tag{1.2}$$

и неравенства Гёльдера ($|\Omega| < +\infty$) вытекает неравенство

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant c_1 \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant c_2\||D_x u|\|_{L^p(\Omega)}, \quad q \in [1, p^*).$$

Поэтому нам достаточно доказать, что для всякой последовательности $\{u_m\}$, ограниченной в $W_0^{1,p}(\Omega)$, найдется подпоследовательность $\{u_{m_m}\}$, сходящаяся сильно в $L^q(\Omega)$. Причем в предположении гладкости границы $\partial\Omega$ можно построить продолжение функций $\{u_m\}$ нулем на множество $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ таким образом, чтобы при этом

$$\{u_m\} \subset W^{1,p}(U), \quad \operatorname{supp} u_m \Subset \overline{U}, \text{ [2)]}$$

где $\Omega \subset U \subset \mathbb{R}^N$ и U — это некоторая ограниченная область с гладкой границей ∂U. Продолженные функции будем обозначать также через $u_m(x)$.

[1)] Непрерывное и компактное вложение (линейный инъективный оператор) называется вполне непрерывным.

[2)] Подчеркнём, что найдётся такой компакт $K \Subset \overline{U}$, что носитель каждой функции u_m содержится в K.

Шаг 3. Итак, пусть последовательность $\{u_m\}$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. В частности, можно предположить, что

$$\sup_m \| |D_x u_m| \|_{L^p(U)} \leqslant c < +\infty. \tag{1.3}$$

Рассмотрим сглаживание последовательности $\{u_m\}$:

$$u_m^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_U \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\, dy, \quad \operatorname{supp} u_m \Subset \overline{U}, \tag{1.4}$$

где $\omega(z)$ — это нормированная функция-«шапочка»:

$$\frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) dz = 1.$$

Шаг 4. Сначала докажем неравенство

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(U)} \leqslant c\varepsilon,$$

где $c > 0$ не зависит от ε и от m.

□ Для удобства сделаем в (1.4) замену переменной

$$z_i = \frac{y_i - x_i}{\varepsilon} \quad i = \overline{1, N}.$$

После этой подстановки мы придем к следующему равенству:

$$u_m^\varepsilon(x) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} \omega(z) u_m(x + \varepsilon z)\, dz.$$

Теперь учтем, что

$$\int\limits_{|z|\leqslant 1} \omega(z)\, dz = 1.$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(y_1, ..., y_N) &= \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_N} \frac{\partial y_N}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_1} \varepsilon z_1 + \dots + \frac{\partial u_m(y)}{\partial y_N} \varepsilon z_N = \varepsilon(z, D_y) u_m(y), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$y = (y_1, ..., y_N), \quad y_k = x_k + \varepsilon t z_k.$$

Тогда сразу же получим следующую цепочку равенств:

$$u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} \omega(z)\,[u_m(x+\varepsilon z) - u_m(x)]\,dz =$$

$$= \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz\,\omega(z) \int\limits_0^1 dt\,\frac{du_m(x+\varepsilon tz)}{dt} =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz\,\omega(z) \int\limits_0^1 dt\,\,(z, D_y)\,u_m(x+\varepsilon zt),$$

где в конце цепочки равенств мы воспользовались полученным выше равенством (1.5). Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_U |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\,dx \leqslant \varepsilon \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz\,\omega(z)|z| \int\limits_0^1 dt \int\limits_U dx\,\,|D_y u_m(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{|z|\leqslant 1} dz\,\omega(z)|z| \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\,\,|D_y u_m(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\,\,|D_y u_m(y)| = c_1\varepsilon \||D_x u_m|\|_{L^1(U)} \leqslant$$

$$\leqslant c_2\varepsilon \||D_x u_m|\|_{L^p(U)} \leqslant c_3\varepsilon, \quad (1.6)$$

поскольку выполнено неравенство (1.3). ⊠

Шаг 5. Докажем, что

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(U)} \leqslant c\varepsilon, \quad q \in [1, p^*),$$

где $c > 0$ — не зависит от ε и от m.

□ Действительно, воспользуемся интерполяционным неравенством для пространств Лебега. Справедливо неравенство,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(U)} \leqslant \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(U)}^{\vartheta} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(U)}^{1-\vartheta}, \qquad (1.7)$$

где

$$\frac{1}{q} = \vartheta + \frac{1-\vartheta}{p^*}$$

при $\vartheta \in (0, 1]$. Здесь остановимся. Условие, что $\vartheta > 0$, нам нужно для дальнейшего (случай $\vartheta = 0$ нам не подходит). Но это означает, что $q \in [1, p^*)$!!! Теперь воспользуемся неравенством вида (1.2), применённого к функциям из $W_0^{1,p}(U)$, и получим неравенства [1]

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(U)} \leqslant \||D_x u_m^\varepsilon - D_x u_m|\|_{L^p(U)} \leqslant \\ \leqslant 2\max\{\||D_x u_m^\varepsilon|\|_{L^p(U)}, \||D_x u_m|\|_{L^p(U)}\} \leqslant \\ \leqslant 2\||D_x u_m|\|_{L^p(U)} \leqslant 2\sup_m \||D_x u_m|\|_{L^p(U)} \leqslant c_6 < +\infty$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Тогда из (1.7) и (1.6) получим неравенство

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(U)} \leqslant c_6^{1-\vartheta} \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(U)}^\vartheta \leqslant c_7 \varepsilon^\vartheta,$$

где $c_7 > 0$ не зависит от ε и от m. Осталось переобозначить $\varepsilon^\vartheta \mapsto \varepsilon$ и получить неравенство

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(U)} \leqslant c_7 \varepsilon. \quad \boxtimes \tag{1.8}$$

Шаг 6. Докажем теперь, что последовательность $\{u_m^\varepsilon\}$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ является *равномерно ограниченной* и *равностепенно непрерывной* в области U.

□ Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_U dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |u_m(y)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \|u_m\|_{L^1(U)} \leqslant \frac{c_8}{\varepsilon^N}, \tag{1.9}$$

$$|D_x u_m^\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_U dy \left|\omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |D_x u_m(y)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon^N} \|\omega(z)\|_\infty \|D_x u_m\|_{L^1(U)} \leqslant \frac{c_9}{\varepsilon^N}, \tag{1.10}$$

что выполнено в силу следующих цепочек неравенств (см. (1.3)):

$$\|u_m\|_{L^1(U)} \leqslant c_1 \|u_m\|_{L^{p^*}(U)} \leqslant \\ \leqslant c_2 c_3 \|D_x u_m\|_{L^p(U)} \leqslant c_2 c_3 \sup_m \|D_x u_m\|_{L^p(U)} \leqslant c_4 < +\infty,$$

$$\|D_x u_m\|_{L^1(U)} \leqslant c_5 \|D_x u_m\|_{L^p(U)} \leqslant c_5 \sup_m \|D_x u_m\|_{L^p(U)} \leqslant c_6.$$

[1] Поскольку носители всех функций u_m содержатся в компакте $K \Subset \overline{U}$, то имеет место следующее неравенство: $\||D_x u_m^\varepsilon|\|_{L^p(U)} \leqslant \||D_x u_m|\|_{L^p(U)}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Из неравенств (1.9) и (1.10) вытекают следующие свойства последовательности $\{u_m^\varepsilon\}$:

$$\sup_{x\in U}|u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \frac{c_8}{\varepsilon^N}, \tag{1.11}$$

$$|u_m^\varepsilon(x) - u_m^\varepsilon(y)| \leqslant \sup_{x\in U}|D_x u_m^\varepsilon(x)|\,|x-y| \leqslant \frac{c_9}{\varepsilon^N}|x-y|, \tag{1.12}$$

для всех $x, y \in U$, где $c_8, c_9 > 0$ не зависят от m. Неравенства (1.11) и (1.12) означают, что для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ последовательность $\{u_m^\varepsilon(x)\}$ *равномерно ограничена* и *равностепенно непрерывна* в банаховом пространстве $C(\overline{U})$.

Следовательно, согласно теореме Асколи—Арцела существует равномерно на $\overline{U}$ сходящаяся подпоследовательность $\left\{u_{m_n}^\varepsilon\right\}$.

Шаг 7. Пусть теперь $\delta > 0$ — это произвольное фиксированное число. Тогда подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы в (1.8)

$$c_7\varepsilon < \frac{\delta}{3},$$

т. е. чтобы имело место неравенство

$$\|u_{m_n}^\varepsilon - u_{m_n}\|_{L^q(U)} \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{1.13}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{u_{m_n}^\varepsilon\}$ на $\overline{U}$ — эта последовательность равномерно фундаментальна:

$$\sup_{x\in U}\left|u_{m_i}^\varepsilon(x) - u_{m_j}^\varepsilon(x)\right| \leqslant \frac{1}{c_{10}}\frac{\delta}{3}$$

при достаточно больших $i, j \in \mathbb{N}$. Но тогда отсюда мы приходим к неравенству

$$\|u_{m_i}^\varepsilon - u_{m_j}^\varepsilon\|_{L^q(U)} \leqslant c_{10}\sup_{x\in U}\left|u_{m_i}^\varepsilon(x) - u_{m_j}^\varepsilon(x)\right| \leqslant \frac{\delta}{3}. \tag{1.14}$$

Следовательно, из неравенств (1.13) и (1.14) вытекает цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|u_{m_i} - u_{m_j}\|_{L^q(U)} \leqslant \|u_{m_i} - u_{m_i}^\varepsilon\|_{L^q(U)} + \|u_{m_j} - u_{m_j}^\varepsilon\|_{L^q(U)} +& \\ + \|u_{m_i}^\varepsilon - u_{m_j}^\varepsilon\|_{L^q(U)} \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.&\end{aligned} \tag{1.15}$$

Шаг 8. Теперь возьмем в неравенстве (1.15) величину δ как

$$\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

и выберем такую подпоследовательность $\{u_{m_m}\}$, что для нее

$$\lim_{l,n\to+\infty}\|u_{m_l}-u_{m_n}\|_{L^q(U)}=0. \tag{1.16}$$

т. е. построим фундаментальную последовательность в $L^q(U)$. Теперь заметим, что все функции $u_m(x)$ равны нулю при $x\in\mathbb{R}^N\backslash\Omega$, а $\Omega\subset U$, поэтому в силу (1.16) имеет место следующее предельное равенство:

$$0=\lim_{l,n\to+\infty}\|u_{m_l}-u_{m_n}\|_{L^q(U)}=\lim_{l,n\to+\infty}\|u_{m_l}-u_{m_n}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Итак, в силу полноты пространства $L^q(\Omega)$ получаем, что подпоследовательность $\{u_{m_n}\}$ сильно в $L^q(\Omega)$ сходится.

Теорема доказана.

§ 2. Случай $N<p$: неравенство Морри

Теорема 2. *Для функций* $u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *имеет место неравенство*: [1])

$$|u|_\lambda\leqslant c\|u\|_{1,p}\quad \text{при}\quad N<p\quad \text{и}\quad \lambda=1-\frac{N}{p}, \tag{2.1}$$

где

$$|u|_\lambda:=|u|_0+[u]_\lambda,\quad |u|_0:=\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x)|,\quad [u]_\lambda:=\sup_{x,y\in\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda},$$

$$\|u\|_{1,p}:=\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}+\||D_xu|\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем неравенство Морри для функций из

$$C^{(1)}(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

И прежде всего докажем следующее неравенство:

$$\frac{1}{R^N}\int\limits_{O(x,R)}|u(x)-u(y)|\,dy\leqslant\frac{1}{N}\int\limits_{O(x,R)}\frac{|D_yu(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy, \tag{2.2}$$

где

$$O(x,R):=\left\{y\in\mathbb{R}^N:\ |y-x|<R\right\}.$$

□ Итак, рассмотрим произвольную точку на границе единичного шара с центром в начале координат:

$$z\in\partial O(0,1)\Rightarrow|z|=1.$$

[1]) По поводу используемых обозначений смотри вторую лекцию.

Для каждой такой точки справедливо следующее равенство:

$$u(x+rz) - u(x) = \int\limits_0^r dt \frac{d}{dt} u(x+tz) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant R,$$

причём

$$\frac{d}{dt} u(x+tz) = (z, D_y) u(y), \quad y = x+tz,$$

из которого вытекает неравенство

$$|u(x+rz) - u(x)| \leqslant \int\limits_0^r dt \, |(z, D_y)\, u(x+tz)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^r dt |z| \, |D_y u(x+tz)| = \int\limits_0^r dt \, |D_y u(x+tz)| \,, \quad |z| = 1.$$

Теперь проинтегрируем по $z \in \partial O(0,1)$ последнее неравенство и получим

$$\int\limits_{\partial O(0,1)} |u(x+rz) - u(x)| \; dS_z \leqslant \int\limits_{\partial O(0,1)} \int\limits_0^r dt \, dS_z \, |D_y u(x+tz)| \,.$$

Поскольку $y = x + tz$, то $t = |x-y|$, так как $|z| = 1$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\partial O(0,1)} |u(x+rz) - u(x)| \; dS_z \leqslant \int\limits_{\partial O(0,1)} \int\limits_0^r dt \, dS_z \frac{t^{N-1}}{t^{N-1}} \, |D_y u(x+tz)| =$$
$$= \int\limits_{O(x,r)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} \, |D_y u(y)| \leqslant \int\limits_{O(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} \, |D_y u(y)| \,, \quad (2.3)$$

где мы воспользовались тем, что элемент объёма

$$dy = t^{N-1} dt \, dS_z, \quad |z| = 1.$$

Теперь умножим обе части последнего неравенства на r^{N-1} и проинтегрируем его по $r \in (0, R)$, тогда получим неравенство

$$\int\limits_{O(x,R)} |u(x) - u(y)| \; dy = \int\limits_0^R dr \, r^{N-1} \int\limits_{\partial O(0,1)} |u(x+rz) - u(x)| \; dS_z \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^N}{N} \int\limits_{O(x,R)} dy \frac{1}{|x-y|^{N-1}} \left|D_y u(y)\right|. \quad (2.4)$$

Итак, неравенство (2.2) доказано. ⊠

Шаг 2. Справедливо следующее неравенство треугольника:

$$|u(x)| \leqslant |u(x) - u(y)| + |u(y)|. \quad (2.5)$$

Из неравенства (2.4) вытекает следующее неравенство: [1])

$$\frac{1}{|O(x,1)|} \int\limits_{O(x,1)} |u(y) - u(x)|\, dy \leqslant \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{O(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \quad (2.6)$$

Проинтегрируем по шару $O(x,1)$ неравенство (2.5), тогда с учетом (2.6) получим неравенство

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{O(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy + \frac{1}{|O(x,1)|} \int\limits_{O(x,1)} |u(y)|\, dy. \quad (2.7)$$

С одной стороны, в силу неравенства Гёльдера справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{|O(x,1)|} \int\limits_{O(x,1)} |u(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|O(x,1)|} |O(x,1)|^{1/p'} \left(\int\limits_{O(x,1)} |u|^p\, dy \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|O(x,1)|^{1/p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\frac{N}{\omega_N}\right)^{1/p} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (2.8)$$

С другой стороны, снова в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\int\limits_{O(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \leqslant \left(\int\limits_{O(x,1)} |D_y u(y)|^p\; dy \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{O(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\, dy \right)^{1/p'}. \quad (2.9)$$

[1]) Заметим, что $|O(x,1)| = \omega_N / N$.

Оценим последний интеграл:

$$\int\limits_{O(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\,dy = \omega_N \int\limits_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr =$$

$$= \omega_N \int\limits_0^1 \frac{1}{r^\alpha}\,dr = \frac{\omega_N(p-1)}{p-N}, \quad \alpha = (N-1)(p'-1) = \frac{N-1}{p-1} < 1,$$

поскольку $N < p$. Следовательно, из (2.9) вытекает неравенство

$$\int\limits_{O(x,1)} \frac{|D_y u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\,dy \leqslant c_1 \||D_x u|\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad c_1 = \left(\frac{\omega_N(p-1)}{p-N}\right)^{1/p'}. \tag{2.10}$$

Из неравенств (2.7), (2.8) и (2.10) получим следующее неравенство:

$$|u(x)| \leqslant c_2 \|u\|_{1,p}, \quad \|u\|_{1,p} := \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \||D_x u|\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

где

$$c_2 = \max\left\{\left(\frac{N}{\omega_N}\right)^{1/p}, \left(\frac{\omega_N(p-1)}{(p-N)}\right)^{1/p'}\right\},$$

и отсюда сразу же получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| \leqslant c\|u\|_{1,p}. \tag{2.11}$$

Шаг 3. Теперь пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$ — это произвольные фиксированные точки и рассмотрим шары радиуса $R = |x-y|$ с центрами в этих точках:

$$O(x,R) \quad \text{и} \quad O(y,R).$$

Очевидно, они пересекаются. Введём множество

$$U := O(x,R) \cap O(y,R).$$

Справедливо следующее неравенство (дважды применённое неравенство треугольника):

$$|u(x)-u(y)| \leqslant |u(x)-u(z)| + |u(y)-u(z)|.$$

Умножим обе части этого равенства на $|U|^{-1}$ и проинтегрируем по переменной $z \in U$. Получим неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|U|} \int\limits_U |u(x)-u(z)|\,dz + \frac{1}{|U|} \int\limits_U |u(y)-u(z)|\,dz. \quad (2.12)$$

Воспользуемся теперь равенством

$$|U| = \alpha R^N,$$

где постоянная $\alpha = \alpha(N) > 0$ *не зависит* от R и от $x, y \in \mathbb{R}^N$. И тогда из (2.12) получим следующее неравенство:

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{1}{\beta\,|O(x,R)|} \int\limits_{O(x,R)} |u(x)-u(z)|\,dz + \\ + \frac{1}{\beta\,|O(y,R)|} \int\limits_{O(y,R)} |u(y)-u(z)|\,dz, \quad (2.13)$$

где мы воспользовались следующими равенствами:

$$|U| = \alpha R^N = \frac{N\alpha}{\omega_N}\frac{\omega_N}{N}R^N = \beta|O(x,R)|, \quad \beta = \frac{N\alpha}{\omega_N}.$$

Шаг 4. Рассмотрим, например, первое слагаемое в правой части неравенства (2.13). В силу оценки (2.2) и неравенства Гёльдера справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{|O(x,R)|} \int\limits_{O(x,R)} |u(x)-u(z)|\,dz = \frac{N}{\omega_N R^N} \int\limits_{O(x,R)} |u(x)-u(z)|\,dz \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{O(x,R)} \frac{|D_z u(z)|}{|x-z|^{N-1}}\,dz \leqslant \frac{1}{\omega_N} \left(\int\limits_{O(x,R)} |D_z u(z)|^p\,dz \right)^{1/p} \times \\ \times \left(\int\limits_{O(x,R)} \frac{1}{|x-z|^{(N-1)p'}}\,dz \right)^{1/p'} \leqslant \frac{1}{\omega_N} |||D_z u|||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\int\limits_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr \right)^{1/p'} \leqslant \\ \leqslant c_3 R^\lambda |||D_z u|||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant c_3 |x-y|^\lambda |||D_z u|||_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

где

$$\lambda = 1 - \frac{N}{p}, \quad c_3 = \frac{1}{\omega_N^{1/p}} \left(\frac{p-1}{p-N} \right)^{1/p'}$$

и мы воспользовались равенством:

$$\int\limits_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr = \frac{p-1}{p-N} R^{(p-N)/(p-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int\limits_0^R \frac{r^{N-1}}{r^{(N-1)p'}}\,dr \right)^{1/p'} = \left(\frac{p-1}{p-N} \right)^{1/p'} R^{1-N/p}.$$

Шаг 5. Таким образом, из (2.13) получим неравенство:

$$|u(x)-u(y)| \leqslant c_3 |x-y|^\lambda \| |D_z u| \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \lambda = 1 - \frac{N}{p}, \tag{2.14}$$

т.е.

$$[u]_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant c_3 \| |D_z u| \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Отсюда и из (2.11) вытекает утверждение теоремы для функций $u \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 6. Продолжим неравенство Морри на функции из класса $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Пересечение $C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ плотно в $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Поэтому для любого $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ найдётся сильно сходящаяся в $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ последовательность $\{u_m\} \subset C^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Возьмём произвольные натуральные числа $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство Морри к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$:

$$|u_{m_1} - u_{m_2}|_\lambda \leqslant c \|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{1,p}. \tag{2.15}$$

Отсюда сразу же получаем, что последовательность $\{u_m\} \subset C^\lambda(\mathbb{R}^N)$ является фундаментальной в $C^\lambda(\mathbb{R}^N)$. Следовательно,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad C^\lambda(\mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Теперь перейдём в неравенстве (2.15) к пределу при $m_1 \to +\infty$ и получим неравенство:

$$|u - u_{m_2}|_\lambda \leqslant c \|u - u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Но тогда имеет место неравенство:

$$|u|_\lambda \leqslant |u - u_{m_2}|_\lambda + |u_{m_2}|_\lambda \leqslant c\|u - u_{m_2}\|_{1,p} + c\|u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Заметим, что

$$\big| \|u_{m_2}\|_{1,p} - \|u\|_{1,p} \big| \leqslant \|u - u_{m_2}\|_{1,p}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|u_{m_2}\|_{1,p} \to \|u\|_{1,p} \quad \text{при} \quad m_2 \to +\infty.$$

Теперь перейдём к пределу при $m_2 \to +\infty$ и получим неравенство Морри, но уже для функций из $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим функции класса $W_0^{1,p}(\Omega)$. Для областей Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ функцию $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ можно продолжить нулём вне области Ω таким образом, чтобы $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Поэтому в силу неравенства Морри и вполне непрерывного вложения

$$C^\lambda(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^\mu(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad \mu \in [0, \lambda)$$

имеет место вполне непрерывное вложение

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^\mu(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad N < p \quad \text{и} \quad \mu < \lambda = 1 - \frac{N}{p}.$$

Тематическая лекция V

АБСТРАКТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Семинар–Лекция 11

АБСТРАКТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Абстрактные функции. Непрерывность, предел

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Для простоты будем считать это пространство вещественным. В качестве простого модельного примера на первых порах можно иметь в виду $B = \mathbb{R}^2$ с обычной евклидовой нормой. Однако следует иметь в виду, что в наиболее интересном для нас случае пространство B будет бесконечномерным, что повлечёт свои характерные черты, не имеющие аналогов в конечномерном и скалярном случаях. (Сказанное, конечно, не противоречит применимости всех изложенных результатов к случаю $B = \mathbb{R}$.)

Определение 1. *Абстрактной функцией будем называть функцию $x(t)$ числового аргумента t со значениями в банаховом пространстве B.*

Как правило, в дальнейшем областью определения функции будет числовой промежуток $\mathcal{T}$, так что мы будем рассматривать функции

$$x : \mathcal{T} \to B. \tag{1.1}$$

Можно проверить, что для каждого фиксированного $\mathcal{T}$ множество функций (1.1) образует линейное пространство (вещественное, если пространство B вещественное), если положить

$$(x + y)(t) := x(t) + y(t),$$
$$(\lambda x)(t) := \lambda x(t).$$

На абстрактные функции переносятся многие понятия теории обычных вещественных функций. Дадим соответствующие определения.

Определение 2. *Функция $x(t)$ называется ограниченной на множестве $\mathcal{T}$, если*

$$\exists M > 0 \ \forall t \in \mathcal{T} \ \|x(t)\| < M.$$

Определение 3. *Функция $x(t)$, определённая на промежутке $\mathcal{T}$, называется непрерывной в точке $t_0 \in \mathcal{T}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \mathcal{T} \ \|x(t) - x(t_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 4. *Функция $x(t)$ называется непрерывной на промежутке $\mathcal{T}$, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. При этом если промежуток не является открытым, то в точках $\mathcal{T} \cap \partial\mathcal{T}$ подразумевается односторонняя непрерывность.*

Определение 5. *Говорят, что функция $x(t)$, определённая на промежутке $\mathcal{T}$, имеет предел $x_0 \in B$ в точке $t_0 \in \overline{\mathcal{T}}$* [1], *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in \big((t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)\big) \cap \mathcal{T} \ \ \|x(t) - x_0\| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Как и в случае числовых функций, может оказаться так, что $x(t)$ не имеет предела в точке t_0, однако имеет в ней один или оба односторонних предела. (Соответствующие определения рекомендуется сформулировать самостоятельно.) Кроме того, понятия обычного и одностороннего пределов сливаются в одно, если функция $x(t)$ определена лишь в одной проколотой полуокрестности точки t_0.

На случай абстрактных функций обобщаются утверждения о пределе и непрерывности суммы и разности функций, о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке t_0 или имеющей в ней конечный предел [2], а также известные свойства функций, непрерывных на отрезке: их ограниченность, достижение точных граней и равномерная непрерывность. (Доказательство соответствующих утверждений входит в задачи.) Что касается умножения, то здесь ситуация несколько сложнее. Дело в том, что в произвольном банаховом пространстве умножение элементов не определено. Однако определено умножение на число и «умножение» линейного оператора на элемент. Кроме того, само рассматриваемое пространство может оказаться банаховой алгеброй, в которой умножение элементов определено. Чтобы описать все эти ситуации, рассмотрим некоторые банаховы пространства B_i, $i = 1, 2, 3$, и предположим, что на $B_1 \times B_2$ определена операция

$$(x, y) \mapsto xy \equiv x \cdot y \in B_3 \quad (x \in B_1,\ y \in B_2),$$

причём $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, x_1, x_2 \in B_1$, $\forall y, y_1, y_2 \in B_2$
1) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$;
2) $(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y$;
3) $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$;
4) $\|xy\|_{B_3} \leqslant \|x\|_{B_1} \|y\|_{B_2}$.
Легко видеть, что для перечисленных ранее «умножений» свойства 1)—4) выполняются. Всюду далее под умножением мы будем понимать операцию с описанными свойствами.

[1] Имеется в виду замыкание промежутка $\mathcal{T}$.

[2] О бесконечном пределе естественно говорить, если $\lim_{t \to t_0} \|y(t)\| = +\infty$.

Теорема 1. *Пусть функции* $x(t)$ *со значениями в* B_1 *и* $y(t)$ *со значениями в* B_2 *определены в некоторой окрестности (проколотой окрестности) точки* t_0, *а умножение между пространствами* B_1 *и* B_2 *обладает свойствами* 1)—4). *Тогда если эти функции непрерывны в точке* t_0, *то и их произведение непрерывно (если* $\lim_{t\to t_0} x(t) = x_1$, $\lim_{t\to t_0} y(t) = y_1$, *то* $\lim_{t\to t_0} x(t)y(t) = x_1y_1$). (*Аналогичное утверждение верно для полуокрестностей.*)

Нам будет важен случай, когда первый сомножитель — операторный или числовой.

§ 2. Дифференцирование абстрактных функций

Определение 5. *Пусть функция* $x(t)$ *определена на промежутке* $\mathcal{T}$, $t_0 \in \mathcal{T}$. *Если существует предел*

$$x_1 = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t - t_0}(x(t) - x(t_0)),$$

он называется производной функции $x(t)$ *в точке* t_0. (*В случае одностороннего предела говорят о соответствующей односторонней производной.*)

Замечание 2. Как и в случае числовых функций, $x(t)$ может не иметь производной в точке t_0, но иметь одну или обе односторонние производные.

Пользуясь свойствами пределов, нетрудно доказать свойства дифференцирования:
1) $(x + y)' = x' + y'$;
2) $(xy)' = x'y + xy'$.
Частными случаями второго свойства является правило вынесения числового или постоянного операторного множителя за знак дифференцирования, при этом оператор может быть линейным функционалом:

$$(\lambda \cdot x(t))' = \lambda \cdot x'(t), \quad (A \cdot x(t))' = A \cdot x'(t), \quad (\langle f, x(t)\rangle)' = \langle f, x'(t)\rangle\,.$$

§ 3. Интегрирование (по Риману)

Для построения римановского интеграла по отрезку $[a, b]$ от абстрактных функций действуем стандартным образом. Вводим *разбиение с отмеченными точками* $T = (\{t_i \mid i = \overline{0, N}, a = t_0 < \ldots < t_N = b\}, \{\tau_i \mid i = \overline{1, N}, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]\})$, *диаметр разбиения* $\Delta(T) = \max_{i=\overline{1,N}}(t_i - t_{i-1})$ и *интегральные суммы*

$$S(T, x) = \sum_{n=1}^{N} x(\tau_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Разбиение T диаметра δ будем для краткости называть δ-разбиением.

Определение 6. *Элемент $I \in B$ называется пределом интегральных сумм $S(T, x)$ функции $x(t)$ при диаметрах разбиения $\Delta(T)$, стремящихся к 0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения T с отмеченными точками при условии $\Delta(T) < \delta$ выполнено неравенство*

$$\|S(T, x) - I\| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Если такой элемент I существует, то он называется интегралом Римана от функции $x(t)$ по отрезку $[a, b]$.

Теорема 2. *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, отметим, что мы не можем ввести аналоги сумм Дарбу, поскольку в банаховом пространстве нет упорядочения. Однако можно рассуждать непосредственно. Мы отдельно сформулируем и докажем две леммы.

Лемма 1. *Если $\widetilde{T}$ есть измельчение δ-разбиения T, то при любом выборе отмеченных точек в каждом из этих разбиений*

$$\left\|S(\widetilde{T}, x) - S(T, x)\right\| \leqslant \omega(\delta)(b - a),$$

где

$$\omega(\delta) = \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta,\ t_1, t_2 \in [a, b]} \|x(t_1) - x(t_2)\|.$$

Доказательство.

1. Рассмотрим один из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ старого разбиения T. Предположим, на нём появились новые точки. Для наглядности рассмотрим случай добавления одной точки. Пусть новые номера точек суть k, $k+1$, т. е. $t_{k-1} = t_{i-1}$, $t_k \in (t_{i-1}, t_i), t_{k+1} = t_i$. Тогда для любого выбора отмеченных точек старого разбиения $\tau_i \in [t_i - 1, t_t]$ и нового разбиения $\eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\eta_{k+1} \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем

$$\begin{gathered}
\|(t_i - t_{i-1})x(\tau_i) - (t_k - t_{k-1})x(\eta_k) - (t_{k+1} - t_k)x(\eta_{k+1})\| = \\
= \|(t_{k+1} - t_{k-1})x(\tau_i) - (t_k - t_{k-1})x(\eta_k) - (t_{k+1} - t_k)x(\eta_{k+1})\| \leqslant \\
\leqslant \|(t_{k+1} - t_k)(x(\tau_i) - x(\eta_{k+1}))\| + \|(t_k - t_{k-1})(x(\tau_i) - x(\eta_k))\| \leqslant \\
\leqslant |t_{k+1} - t_k|\|x(\tau_i) - x(\eta_{k+1})\| + |t_k - t_{k-1}|\|x(\tau_i) - x(\eta_k))\| \leqslant \\
\leqslant |t_{k+1} - t_k|\omega(\delta) + |t_k - t_{k-1}|\omega(\delta) = (t_{k+1} - t_{k-1})\omega(\delta) = (t_i - t_{i-1})\omega(\delta).
\end{gathered}$$

2. Эту цепочку следует очевидным образом модифицировать, если добавилось больше одной точки разбиения или не добавилось ни одной точки, но поменялась отмеченная точка. Складывая (для этого нам снова нужно неравенство треугольника) подобные неравенства по всем отрезкам исходного разбиения, получаем

$$\left\|S(\widetilde{T}, x) - S(T, x)\right\| \leqslant \omega(\delta)(t_N - t_0) = \omega(\delta)(b - a),$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть T_1, T_2 — произвольные разбиения диаметров δ и ε соответственно, и пусть на них произвольным образом выбраны отмеченные точки. Тогда*

$$\|S(T_1, x) - S(T_2, x)\| \leqslant (\omega(\delta) + \omega(\varepsilon))(b - a). \tag{3.2}$$

Доказательство.

Рассмотрим разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$ с произвольным выбором отмеченных точек. Тогда разбиение T_3 есть измельчение каждого из разбиений T_1 и T_2. Следовательно, согласно предыдущей лемме имеем

$$\|S(T_3, x) - S(T_1, x)\| \leqslant \omega(\delta)(b - a),$$
$$\|S(T_3, x) - S(T_2, x)\| \leqslant \omega(\varepsilon)(b - a),$$

откуда с помощью неравенства треугольника получаем (3.2).

Лемма доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\delta_n \to 0$. Построим для каждого δ_n некоторое разбиение T_n с диаметром δ_n и произвольным выбором отмеченных точек. Поскольку $\omega(\delta_n) \to 0$ (в силу равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке), с помощью леммы 2 нетрудно установить, что последовательность соответствующих интегральных сумм фундаментальна. Следовательно, она сходится к некоторому пределу I (пространство B банахово, а значит, полно). Чтобы доказать, что последовательность интегральных сумм сходится к тому же пределу I в смысле определения 7, нам нужно для всякого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения T диаметра меньше δ выполнено неравенство (3.1). Для этого по заданному ε выберем такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_0$ верно

$$\|S(T_n, x) - I\| < \varepsilon/2. \tag{3.3}$$

При этом, очевидно,

$$\sigma := \sup_{n > N_0} \{\delta_n\} < +\infty. \tag{3.4}$$

Теперь, если понадобится, увеличим N настолько, что

$$\sup_{n > N_1} \{\delta_n\} \leqslant \sigma_1, \quad \sigma_1 : \ \omega(\sigma_1) < \frac{\varepsilon}{4(b - a)} \tag{3.5}$$

(такое σ_1 существует в силу равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке), т. е. выберем такое $N_1 \geqslant N_0$. Очевидно, неравенство (3.3) будет тем более выполнено для всех n начиная с N_1.

Тогда для любого разбиения T с диаметром меньше σ_1 независимо от выбора отмеченных точек получим

$$\|S(T_{N_1+1}, x) - S(T, x)\| < (\omega(\sigma_1) + \omega(\sigma_1))(b-a) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\|S(T_{N_1+1}, x) - I\| < \varepsilon/2.$$

Отсюда и будет следовать, что

$$\|S(T, x) - I\| < \varepsilon.$$

Таким образом, δ в определении предела интегральных сумм при данном ε следует выбрать равным σ_1.

Теорема доказана.

Перечислим основные свойства интеграла. Для простоты будем рассматривать лишь интегралы от непрерывных функций, поэтому вопрос о существовании интегралов, входящих в тождества, проблемы не представляет.

Свойство 1. $\int_a^b (x(t) + y(t))dt = \int_a^b x(t)dt + \int_a^b x(t)dt$.

Свойство 2. $\int_a^b \lambda x(t)dt = \lambda \int_a^b x(t)dt$, $\lambda = \mathrm{const}$.

Свойство 3. $\int_a^b x(t)dt = \int_a^c x(t)dt + \int_c^b x(t)dt$, $a \leqslant c \leqslant b$.

Для доказательства этих тождеств достаточно рассмотреть некоторые последовательности интегральных сумм с диаметрами разбиений, стремящимися к нулю. При этом для левой части тождества 3 следует брать только разбиения, содержащие точку c.

Свойство 4. $\left\|\int_a^b x(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|dt$.

Для доказательства этого свойства снова достаточно рассмотреть последовательность разбиений с диаметрами, стремящимися к нулю. Для каждой интегральной суммы аналогичное неравенство следует из неравенство треугольника. Переходя к пределу в числовом неравенстве, получаем требуемое.

Свойство 5. Для умножения, свойства которого оговорены выше, верны тождества

$$\int\limits_a^b x(t)y\,dt = \int\limits_a^b x(t)dt\,y, \quad \int\limits_a^b xy(t)dt = x\int\limits_a^b y(t)dt.$$

В частности,

$$\int\limits_a^b Ax(t)dt = A\int\limits_a^b x(t)dt, \quad \int\limits_a^b \langle f, x(t)\rangle dt = \left\langle f, \int\limits_a^b x(t)dt \right\rangle.$$

Это свойство предлагается доказать самостоятельно.

Свойство 6. Формула Ньютона—Лейбница. *Пусть* $x(t) \in C^{(1)}([a,b];B)$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a). \tag{3.6}$$

Доказательство.

Для любого линейного функционала $f \in B^*$ в силу ранее доказанных свойств дифференцирования и интегрирования имеем

$$\left\langle f, \int\limits_a^b x'(t)dt \right\rangle = \int\limits_a^b \langle f, x'(t)\rangle dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt}\langle f, x(t)\rangle = \langle f, x(b)\rangle - \langle f, x(a)\rangle,$$

где последнее равенство следует из формулы Ньютона—Лейбница для числовых функций. Поскольку, таким образом, равенство

$$\left\langle f, \int\limits_a^b x'(t)dt \right\rangle = \langle f, x(b) - x(a)\rangle$$

справедливо для всех $f \in B^*$, то, в силу следствия [1]) из теоремы Хана—Банаха, верно и равенство (3.6).

Формула доказана.

Ослабленная теорема конечных приращений. В силу свойств 6 и 4 *для всякой непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[a,b]$ *функции* $x(t)$ *имеем*

$$\|x(b) - x(a)\| \leqslant \int\limits_a^b \|x'(t)\|dt \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|x'(t)\|.$$

Замечание 3. Теорема Лагранжа (и Ролля) не переносятся на случай абстрактных функций непосредственно. Рекомендуется самостоятельно привести контример.

Интегрируемость непрерывной функции позволяет для любой функции $x \in C([a,b];B)$ рассмотреть *интеграл с переменным верхним пределом*

$$y(t) = \int\limits_a^t x(\tau)d\tau.$$

[1]) Следует применить формулу (3.2) § 3 лекции 13 тома 1 настоящего курса, взяв в качестве y разность левой и правой частей формулы (3.6).

Свойство 7. Пусть $x \in C([a,b];B)$. Тогда

$$y(t) \equiv \int\limits_a^t x(\tau)d\tau \in C^1([a,b];B), \quad \frac{d}{dt}y(t) = x(t),\ t \in [a,b]$$

(как и везде, в очевидных случаях подразумеваются односторонние производные).

□ Рассмотрим для наглядности лишь правую производную, т. е. $\Delta t > 0$. Имеем

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \int\limits_a^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau - \int\limits_a^t x(\tau)d\tau = \int\limits_t^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) - x(t) = \frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) - \frac{\Delta t}{\Delta t}x(t) = \\ = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} (x(\tau) - x(t))d\tau.$$

Поскольку функция $x(t)$ непрерывна на $[a,b]$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau \in [t, t+\delta)\ \ \|x(\tau) - x(t)\| < \varepsilon.$$

Но тогда при всех $0 < \Delta t < \delta$ имеем

$$\left\| \frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) - x(t) \right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} \|x(\tau) - x(t)\| d\tau \leqslant \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} \varepsilon d\tau = \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) = x(t) \quad \text{или} \quad y'_r = x(t),$$

где индекс r обозначает правую производную. Проведя аналогичные рассуждения для левой производной, получаем в итоге $y'(t) = x(t)$ всюду на $[a,b]$. ⊠

Замечание 4. В граничных точках отрезка подразумеваются соответствующие односторонние производные.

Замечание 5. На случай банаховозначных функций теорема о среднем значении для интеграла непосредственным образом не обобщается. Рекомендуется привести контрпример.

§ 4. Лемма о продолжении в точку

Лемма 3. *Пусть функция $x(t)$ определена и непрерывно дифференцируема в левой полуокрестности точки t_0, т. е.*

$$x \in C^1((t_0 - \gamma, t_0); B), \tag{4.1}$$

и пусть существует предел

$$x_1 = \lim_{t \to t_0 - 0} x'(t). \tag{4.2}$$

Тогда:
1) $x(t)$ *непрерывно продолжима до функции*

$$\widetilde{x} \in C((t_0 - \gamma, t_0]; B);$$

2) $\widetilde{x}'_l(t_0) = x_1$ (*где индекс l означает левую производную*).

Доказательство.

Шаг 1. Из существования левого предела производной следует, что эта производная ограничена в некоторой проколотой полуокрестности точки t_0:

$$\exists \zeta \in (0, \gamma], \ \ \exists L > 0 \ \forall t \in (t_0 - \zeta, t_0) \ \ \|x'(t)\| \leqslant L. \tag{4.3}$$

В силу ослабленной формулы конечных приращений отсюда вытекает липшиц-непрерывность функции $x(t)$ на $(t_0 - \zeta, t_0)$ с константой Липшица L. Следовательно, для функции $x(t)$ выполнено условие Коши существования левого предела в точке t_0 и

$$\exists x_0 = \lim_{t \to t_0 - 0} x(t). \tag{4.4}$$

Положим

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (t_0 - \gamma, t_0); \\ x_0, & t = t_0. \end{cases}$$

Очевидно, построенная функция непрерывна на $(t_0 - \gamma, t_0]$. Осталось доказать, что $\widetilde{x}'_l(t_0) = x_1$, т. е. что

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \frac{1}{t - t_0} (x(t) - x_0) = x_1,$$

или

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t} (x_0 - x(t_0 - \Delta t)) = x_1.$$

Чтобы воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница в той формулировке, которую мы ранее доказали, введём функцию

$$z(t) = \begin{cases} x'(t), & t \in (t_0 - \zeta, t_0); \\ x_1, & t = t_0. \end{cases}$$

В силу (4.1) и (4.2) функция $z(t)$ непрерывна на $(t_0-\zeta, t_0]$. (Мы пока не можем утверждать, что $\widetilde{x}'(t_0)=z(t_0)$; наша цель — доказать этот факт.)

Шаг 2. При каждом $\delta\in(0,\zeta)$ можем записать формулу Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0-\delta} z(t)dt = x(t_0-\delta)-x(t_0-\Delta t). \tag{4.5}$$

Устремим δ к нулю. Тогда, с одной стороны, $x(t_0-\delta)\to x_0$ (см. (4.4)). С другой стороны,

$$\int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0-\delta} z(t)dt \to \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0} z(t)dt,$$

поскольку

$$\left\|\int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0} z(t)dt - \int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0-\delta} z(t)dt\right\| = \left\|\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} z(t)dt\right\| \leqslant \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \|z(t)\|dt \leqslant \delta L \to 0.$$

Здесь использованы непрерывность функции $z(t)$, оценка (4.3) и вытекающая из последней в силу соотношения (4.2) оценка $\|z(t_0)\|\leqslant L$.

Шаг 3. Итак, переходя к пределу в обеих частях равенства (4.5), получаем

$$\int\limits_{t_0-\Delta t}^{t_0} z(t)dt = x_0 - x(t_0-\Delta t). \tag{4.6}$$

Тогда из соотношений (4.5), (4.6) имеем

$$\int\limits_{t_0-\Delta t}^{t} z(\tau)d\tau = \widetilde{x}(t)-\widetilde{x}(t_0-\Delta t)$$

при всех $t\in[t_0-\Delta t, t_0]$, причём подынтегральная функция непрерывна. Применяя теперь в точке $t=t_0$ утверждение о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (свойство 7 интеграла), получаем

$$\widetilde{x}'(t_0)=z(t_0)=x_1,$$

что и требовалось.

Лемма доказана.

§ 5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверить, что множество абстрактных функций $x : \mathcal{T} \to B$ (при фиксированных $\mathcal{T}$ и B) образует линейное пространство.

Задача 2. Сформулировать и доказать критерий Коши существования предела для абстрактных функций.

Задача 3. Доказать, что функция, имеющая предел в данной точке, ограничена в некоторой её окрестности.

Задача 4. Доказать теоремы о непрерывности и пределе суммы абстрактных функций.

Задача 5. Сформулировать и доказать теоремы о связи одностороннего и обычного предела, односторонней и обычной непрерывности, односторонней и обычной дифференцируемости.

Задача 6. Доказать, что функция, непрерывная на отрезке, ограничена, а её норма достигает своих точных граней. *Указание.* Это можно сделать либо непосредственно, либо сославшись на подходящую теорему семинара-лекции 12 тома 1 настоящего курса.

Задача 7. Доказать, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна. *Указание.* Это можно сделать либо непосредственно, либо сославшись на подходящую теорему семинара-лекции 12 тома 1 настоящего курса.

Задача 8. Доказать теорему 1.

Задача 9. Доказать свойства 1), 2) операции дифференцирования.

Задача 10. Доказать свойство 5 интеграла.

Задача 11. Привести контрпример, показывающих, что теорема Лагранжа о конечных приращениях и теорема о среднем для интеграла непосредственно не переносятся на случай абстрактных функций.

Лекция 11

АБСТРАКТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Интеграл Бохнера

Перейдём к построению интеграла Бохнера, являющегося обобщением интеграла Лебега на банаховозначные функции.

Как и в случае интеграла Лебега, пусть у нас имеется измеримое пространство $([0,T],\mathcal{A},\mu)$, состоящее из отрезка $[0,T]\subset\mathbb{R}^1_+$, σ-алгебры его подмножеств $\mathcal{A}$ и меры Лебега μ, определённой на $\mathcal{A}$. Конечно, как и интеграл Лебега, интеграл Бохнера можно строить и для множеств не только на прямой $\mathbb{R}^1$. Но нас в дальнейшем будет интересовать интеграл Бохнера на «временно́м» отрезке $[0,T]$. Дадим следующее определение. (В этой и следующей лекциях будем считать банахово пространство $\mathbb{B}$ *сепарабельным*.)

Определение 1. *Простой функцией $h(t)$ на сегменте $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ мы назовём следующую функцию*:
$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}\chi_i(t)b_i \quad b_i\in\mathbb{B}, \tag{1.1}$$
где для каждого $i=\overline{1,n}$ функция $\chi_i(t)$ — это характеристическая функция некоторого множества $S_i\in\mathcal{A}$:
$$\chi_i(t)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}1 & \text{при}\quad t\in S_i;\\ 0 & \text{при}\quad t\in[0,T]\backslash S_i,\end{cases}$$
причём $S_i\cap S_j=\varnothing$ при $i\neq j$.

Теперь мы можем дать определение интеграла Бохнера для простых функций.

Определение 2. *Интегралом Бохнера от простой функции $h(t)$ на отрезке $[0,T]$ называется следующая величина*:
$$\int\limits_0^T h(t)\,d\mu\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\mu(S_i)b_i. \tag{1.2}$$
Наконец, можно ввести интеграл Бохнера для произвольной $\mathbb{B}$-значной функции $f(t)$ следующим образом. Дадим определение.

Определение 3. *Интегралом Бохнера от произвольной $\mathbb{B}$-значной функции $f(t)$ называется следующая величина*:

$$\int\limits_0^T f(t)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^T h_n(t) d\mu, \tag{1.3}$$

где предел понимается в сильном смысле банахова пространства $\mathbb{B}$ при условии, что существует такая последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций, сходящаяся μ-почти всюду на $[0,T]$ сильно в $\mathbb{B}$ к функции $f(t)$, причём

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^T \|f(t) - h_n(t)\|\, d\mu = 0. \tag{1.4}$$

Здесь есть три тонких момента:

1. Мы пока не доказали, что скалярная функция $\|f(t) - h_n(t)\|$, стоящая под знаком интеграла Лебега (1.4), μ-измерима на отрезке $[0,T]$. Для ответа на этот вопрос мы немного углубимся в теорию измеримости $\mathbb{B}$-значных функций.

2. Нужно доказать, что существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^T h_n(t) d\mu,$$

понимаемый в сильном смысле банахова пространства $\mathbb{B}$.

3. Кроме того, необходимо доказать независимость предела (1.3) от выбора последовательности $\{h_n(t)\}$.

§ 2. Сильная и слабая измеримость

Дадим определения.

Определение 4. *$\mathbb{B}$-значная функция $f(t)$ называется μ-слабо измеримой на отрезке $[0,T]$, если для каждого $f^* \in \mathbb{B}^*$ функция*

$$\langle f^*, f(t)\rangle \tag{2.1}$$

является μ-измеримой на отрезке $[0,T]$.

Определение 5. *$\mathbb{B}$-значная функция $f(t)$ называется μ-сильно измеримой на отрезке $[0,T]$, если существует последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций на отрезке $[0,T]$, сильно сходящаяся в $\mathbb{B}$ к $f(t)$ μ-почти всюду на отрезке $[0,T]$, т. е.*

$$\|f(t) - h_n(t)\| \to +0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty \quad \textit{для почти всех} \quad t \in [0,T].$$

Справедлива следующая важная теорема Петтиса, доказательство которой приведено в [10].

Теорема 1. *При условии сепарабельности* $\mathbb{B}$ *из* μ*-слабой измеримости* $\mathbb{B}$*-значной функции* $f(t)$ *вытекает, что* $\|f(t)\|$ *является* μ*-измеримой на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим два множества:

$$\mathrm{A} := \{t : \ \|f(t)\| \leqslant c_1\} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}_{f^*} := \{t : \ |\langle f^*, f(t)\rangle| \leqslant c_1\}\,.$$

Заметим, что в силу μ-слабой измеримости функции $f(t)$ множество A_{f^*} является μ-измеримым на отрезке $[0,T]$. Поскольку

$$|\langle f^*, f(t)\rangle| \leqslant \|f^*\|_*\|f(t)\|,$$

то имеет место следующее вложение:

$$\mathrm{A} \subseteq \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}. \tag{2.2}$$

Шаг 2. Воспользуемся следствием из теоремы Хана–Банаха:

Следствие из теоремы Хана–Банаха [1]). *Для каждого элемента* $f \in \mathbb{B}$ *найдётся такой* $f^* \in \mathbb{B}^*$, *что*

$$\|f^*\|_* = 1 \quad \textit{и} \quad \|f\| = \langle f^*, f\rangle\,.$$

Поэтому для каждого $t \in [0,T]$ найдётся такой элемент $f^*(t) \in \mathbb{B}^*$, что имеет место равенство

$$\|f(t)\| = \langle f^*(t), f(t)\rangle\,, \quad \|f^*(t)\|_* = 1 \Rightarrow \|f^*(t)\|_* \leqslant 1.$$

Поэтому имеет место обратное вложение:

$$\mathrm{A} \supseteq \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}. \tag{2.3}$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка логических рассуждений:

$$t \in \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*} \Rightarrow t \in \left\{t : \sup_{\|f^*\|_* \leqslant 1} |\langle f^*, f(t)\rangle| \leqslant c_1\right\} =$$
$$= t \in \{t : \|f(t)\| \leqslant c_1\} = A. \quad \boxtimes$$

---

1) См. том 1 настоящего курса, лекция 13, § 3, теорема 3.

Следовательно, из (2.2) и (2.3) вытекает следующее равенство множеств:

$$\mathrm{A} = \bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}. \tag{2.4}$$

Шаг 3. Но этого пока недостаточно для доказательства требуемого результата, поскольку в пересечении

$$\bigcap_{\|f^*\|_* \leqslant 1} \mathrm{A}_{f^*}$$

участвует несчётное семейство множеств. Для того чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся сепарабельностью пространства $\mathbb{B}$.

Справедлива следующая вспомогательная лемма, которую мы приведём без доказательства (его можно найти в [10]).

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{B}$ — сепарабельное банахово пространство. Существует такая последовательность $\{f_n^*\} \subset \mathbb{B}^*$, $\|f_n^*\|_* \leqslant 1$, что для каждого $f^* \in \mathbb{B}^*$, $\|f^*\|_* \leqslant 1$, найдётся подпоследовательность*

$$\{f_{n'}^*\} \subset \{f_n^*\},$$

для которой

$$\lim_{n' \to +\infty} \langle f_{n'}^*, f\rangle = \langle f^*, f\rangle \quad \textit{при всех} \quad f \in \mathbb{B}. \tag{2.5}$$

С учётом этой леммы мы приходим к равенству

$$\mathrm{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_{f_n^*}, \tag{2.6}$$

где $\{f_n^*\}$ — последовательность из леммы 1.

□ Действительно, имеет место очевидное вложение

$$\mathrm{A} \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_{f_n^*}.$$

Докажем вложение в обратную сторону. Пусть

$$t \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_{f_n^*} \Rightarrow t \in \left\{ t : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f_n^*, f(t)\rangle| \right\}.$$

Предположим $f^* \in \mathbb{B}^*$ — это произвольный фиксированный функционал, такой что $\|f^*\|_* \leqslant 1$. Тогда найдётся такая подпоследовательность $\{f_{n'}^*\} \subset \{f_n^*\}$, что справедлива цепочка выражений

$$|\langle f^*, f\rangle| \leqslant \left|\left\langle f^* - f_{n'}^*, f\right\rangle\right| + \left|\left\langle f_{n'}^*, f\right\rangle\right| \leqslant \delta_{n'} + c_1,$$

где $\delta_{n'} \to +0$ при $n' \to +\infty$. В пределе получим, что

$$t: \; |\langle f^*, f\rangle| \leqslant c_1 \quad \text{для каждого} \quad \|f^*\|_* \leqslant 1 \Rightarrow t \in A. \quad \boxtimes$$

Но счётное пересечение μ-измеримых множеств является μ-измеримым множеством, и, следовательно, множество A является μ-измеримым.

Теорема доказана.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Сильно μ-измеримая функция на отрезке $[0,T]$ является слабо μ-измеримой на том же отрезке.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\mathbb{B}$-значная функция $f(t)$ является сильно μ-измеримой на отрезке $[0,T]$. Тогда существует последовательность $\mathbb{B}$-значных простых функций $\{h_n(t)\}$, сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся к функции $f(t)$ почти всюду по мере Лебега μ на $[0,T]$, т. е.

$$\|f(t) - h_n(t)\| \to +0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0,T] \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, эта последовательность μ-почти всюду на $[0,T]$ слабо в $\mathbb{B}$ сходится к функции $f(t)$, т. е. при любом $f^* \in \mathbb{B}^*$

$$\langle f^*, f(t) - h_n(t)\rangle \to 0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0,T] \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Из равенства

$$\langle f^*, h(t)\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle f^*, b_i\rangle \chi_{S_i}(t),$$

справедливого для простой функции

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i \chi_{S_i}(t),$$

вытекает слабая измеримость $h(t)$.

Шаг 2. Рассмотрим следующие множества:

$$\mathrm{A}(f^*) := \{t : |\langle f^*, f(t)\rangle| < c_1\} \quad \text{и} \quad \mathrm{A}_n(f^*) := \{t : |\langle f^*, h_n(t)\rangle| < c_1\}.$$

С точностью до множества меры 0 справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{A}(f^*) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \mathrm{A}_k(f^*). \tag{2.7}$$

□ Действительно, пусть $t \in A(f^*)$, тогда

$$|\langle f^*, f(t)\rangle| = \varepsilon < c_1.$$

Заметим, что найдётся такое достаточно большое $N_0 \in \mathbb{N}$, что

$$|\langle f^*, h_n(t)\rangle| \leqslant |\langle f^*, f(t) - h_n(t)\rangle| + |\langle f^*, f(t)\rangle| < \\ < |\langle f^*, f(t) - h_n(t)\rangle| + \varepsilon < c_1 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0.$$

Поэтому

$$t \in \bigcap_{n=N_0}^{+\infty} \mathrm{A}_k(f^*) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \mathrm{A}_k(f^*).$$

Докажем теперь вложение в обратную сторону. Пусть

$$t \in \bigcap_{n=N_0}^{+\infty} A_m(f^*)$$

для некоторого достаточно большого $N_0 \in \mathbb{N}$, т. е.

$$t \in \left\{t: \sup_{n \geqslant N_0} |\langle f^*, h_n(t)\rangle| < c_1\right\} \Rightarrow \sup_{n \geqslant N_0} |\langle f^*, h_n(t)\rangle| = \varepsilon < c_1.$$

Поэтому для достаточно большого N_0 имеем

$$|\langle f^*, f(t)\rangle| \leqslant |\langle f^*, f(t) - h_n(t)\rangle| + \\ + |\langle f^*, h_n(t)\rangle| = \varepsilon + |\langle f^*, f(t) - h_n(t)\rangle| < c_1 \Rightarrow t \in A(f^*). \quad \boxtimes$$

Следовательно, множество $\mathrm{A}(f^*)$ μ-измеримо в силу замкнутости семейства измеримых множеств относительно операций счётного объединения и счётного пересечения.

Лемма доказана.

Замечание 1. Теперь мы можем доказать, что *функция $\|f(t) - h_n(t)\|$ в определении 3 является μ-измеримой на отрезке* $[0, T]$.

□ Действительно, функция $f(t)$ является в силу определения 5 сильно μ-измеримой, значит, из леммы 2 вытекает, что она является слабо μ-измеримой. Понятно, что простые функции $h_n(t)$ слабо μ-измеримы. Далее, разность двух слабо измеримых функций $f(t) - h_n(t)$ является, очевидно, слабо измеримой функцией. Теперь достаточно воспользоваться теоремой 1. ⊠

Замечание 2. Сильный предел

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T h_n(t) d\mu$$

существует, поскольку имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\| \int_0^T h_n(t) d\mu - \int_0^T h_k(t) d\mu \right\| = \left\| \int_0^T (h_n(t) - h_k(t))\, d\mu \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T \|h_n(t) - h_k(t)\|\, d\mu,$$

где последнее неравенство вытекает из явного определения (1.2) интеграла Бохнера от простой функции.

□ Для простой функции

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{S_i}(t)$$

справедливы следующие равенства:

$$\left\| \int_0^T h(t)\, d\mu \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|b_i\| \mu(S_i), \quad \|h(t)\| = \sum_{i=1}^{n} \|b_i\| \chi_{S_i}(t).$$

Поэтому имеем

$$\left\| \int_0^T h(t)\, d\mu \right\| \leqslant \int_0^T \|h(t)\|\, d\mu.$$

Пусть у нас имеются две простые функции

$$h(t) = \sum_{j=1}^{N_1} b_j \chi_{B_j}, \quad g(t) = \sum_{k=1}^{N_2} a_k \chi_{A_k}.$$

Рассмотрим совместное разбиение на непересекающиеся множества:

$$h(t) = \sum_{l=1}^{N} \overline{b}_l \chi_{S_l}, \quad g(t) = \sum_{l=1}^{N} \overline{a}_l \chi_{S_l},$$

где

$$\overline{b}_l = \begin{cases} b_l, & \text{при} \quad S_l \in \bigcup\limits_{j=1}^{N_1} B_k; \\ 0, & \text{при} \quad S_l \notin \bigcup\limits_{j=1}^{N_1} B_k. \end{cases} \quad \overline{a}_l = \begin{cases} a_l, & \text{при} \quad S_l \in \bigcup\limits_{k=1}^{N_2} A_k; \\ 0, & \text{при} \quad S_l \notin \bigcup\limits_{k=1}^{N_2} A_k. \end{cases}$$

Тогда имеет место следующая цепочка неравенств

$$\left\| \int_0^T [g(t)+h(t)]\,d\mu \right\| = \left\| \sum_{l=1}^{N} (\overline{a}_l + \overline{b}_l)\mu(S_l) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{N} \|\overline{a}_l + \overline{b}_l\| \mu(S_l) = \int_0^T \|g(t)+h(t)\|\,d\mu. \quad \boxtimes$$

Теперь осталось воспользоваться неравенством

$$\int_0^T \|h_n(t) - h_k(t)\|\ d\mu \leqslant \int_0^T \|h_n(t) - f(t)\|\ d\mu + \int_0^T \|f(t) - h_k(t)\|\ d\mu \to +0$$

при $n, k \to +\infty$ в силу (1.4).

З а м е ч а н и е 3. Как мы уже отмечали, в определении 3 имеется ещё один тонкий момент — мы должны доказать, что *интеграл Бохнера от функции $f(t)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций $\{h_n(t)\} \subset \mathbb{B}$.*

$\square$ Действительно, пусть у нас имеются две последовательности простых функций, аппроксимирующих одну и ту же функцию $f(t)$, тогда из этих двух последовательностей можно организовать третью последовательность, аппроксимирующую функцию $f(t)$. $\boxtimes$

§ 3. Интегрируемость по Бохнеру

Теперь мы можем доказать важную теорему, принадлежащую Бохнеру.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы сильно μ-измеримая функция $f(t)$ была интегрируемой по Бохнеру на отрезке $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы числовая функция $\|f(t)\|$ была μ-интегрируемой на этом же отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Необходимость. Имеет место следующее неравенство треугольника:

$$\|f(t)\| \leqslant \|h_n(t)\| + \|f(t) - h_n(t)\|. \tag{3.1}$$

Отметим, что $\|h_n(t)\|$ являются μ-измеримыми на отрезке $[0, T]$. В силу замечания 1 функции $\|f(t) - h_n(t)\|$ являются μ-измеримыми.

Из неравенства (3.1) вытекает μ-интегрируемость функции $\|f(t)\|$.

$\square$ Действительно, нужно только доказать интегрируемость нормы произвольной простой функции. Итак, пусть

$$h(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{S_i}(t), \quad S_i \cap S_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Справедливо следующее равенство

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{S_i}(t)\right\| = \|b_j\| \quad \text{при} \quad t \in S_j \quad \text{при} \quad j \in \overline{1, n},$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{S_i}(t)\right\| = 0 \quad \text{при} \quad t \notin \bigcup_{i=1}^{m} S_i.$$

Из этих равенств вытекает следующее выражение:

$$\int\limits_0^T \|h(t)\|\, dt = \sum_{i=1}^{M} \|b_i\| \mu(S_i). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций, μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$ сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся к функции $f(t)$. Рассмотрим новую последовательность простых функций:

$$w_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_n(t) & \text{при} \quad \|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + n^{-1}\right); \\ 0 & \text{при} \quad \|h_n(t)\| > \|f(t)\| \left(1 + n^{-1}\right). \end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать [1], что

$$\|f(t) - h_n(t)\| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для почти всех} \quad t \in [0, T].$$

Заметим, что

$$\|h_n(t)\| \leqslant \|f(t) - h_n(t)\| + \|f(t)\| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|f(t)\|$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Ясно, что

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(t) - w_n(t)\| = 0$$

μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$. Кроме того,

$$\|f(t) - w_n(t)\| \leqslant 2\|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

[1] Если нужно можно перейти к подпоследовательности исходной последовательности $\{h_n(t)\}$.

Теперь в силу μ-интегрируемости функции $\|f(t)\|$ можно воспользоваться теоремой Лебега (см. часть 1 тома 1 настоящего курса, лекция 3, § 1) и установить, что

$$\int_0^T \|f(t) - w_n(t)\|\, d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим ещё некоторые свойства интеграла Бохнера. Во-первых, интеграл Бохнера обладает свойством линейности.

Лемма 3. *Пусть функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ интегрируемы по Бохнеру, тогда для любых постоянных $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1$ имеет место следующее равенство*:

$$\int_0^T [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]\, d\mu = \alpha_1 \int_0^T f_1(t)\, d\mu + \alpha_2 \int_0^T f_2(t)\, d\mu.$$

Для доказательства леммы достаточно взять соответствующие аппроксимирующие последовательности и перейти к пределу, поскольку для простых функций это равенство, очевидно, имеет место.

Лемма доказана.

Кроме того, имеет место важное в приложениях неравенство.

Лемма 4. *Пусть функция $f(t)$ является μ-интегрируемой по Бохнеру на отрезке $[0, T]$, тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\left\| \int_0^T f(t)\, d\mu \right\| \leqslant \int_0^T \|f(t)\|\, d\mu.$$

Доказательство.

Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^T f(t)\, d\mu \right\| &\leqslant \left\| \int_0^T f(t)\, d\mu - \int_0^T h_n(t)\, d\mu \right\| + \left\| \int_0^T h_n(t)\, d\mu \right\| \leqslant \\ &\leqslant \left\| \int_0^T f(t)\, d\mu - \int_0^T h_n(t)\, d\mu \right\| + \int_0^T \|h_n(t)\|\, d\mu \leqslant \\ &\leqslant \left\| \int_0^T f(t)\, d\mu - \int_0^T h_n(t)\, d\mu \right\| + \int_0^T \|f(t) - h_n(t)\|\, d\mu + \int_0^T \|f(t)\|\, d\mu.\end{aligned}$$

Теперь надо перейти к пределу при $n \to +\infty$, воспользовавшись определением 3.

Лемма доказана.

Наконец, справедлива следующая важная лемма, являющаяся обобщением теоремы 2 Лебега о дифференцировании из лекции 2 данного тома.

Лемма 5. *Пусть функция $f(t)$ интегрируема по Бохнеру на отрезке $[0, T]$, тогда функция $u(t)$, определённая формулой*

$$u(t) := \int\limits_{t_0}^{t} f(s) d\mu, \tag{3.2}$$

является сильно дифференцируемой для почти всех $t \in [0, T]$, причём в точках дифференцируемости верно равенство

$$u'(t) = f(t).$$

.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3, причём без ограничения общности можно предположить, что имеет место следующее неравенство (ср. с теоремой 2):

$$\|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

В силу определения 3

$$h_n(t) \to f(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, d\mu - f(t_0) = \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} [f(s) - h_n(s)]\, d\mu + \\ + \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\, d\mu - f(t_0).$$

Отсюда получаем следующую цепочку неравенств:

$$\left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, d\mu - f(t_0) \right\| \leqslant \frac{1}{|t - t_0|} \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s) - h_n(s)\|\, d\mu + \\ + \left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\, d\mu - h_n(t_0) \right\| + \|h_n(t_0) - f(t_0)\| =:$$

$$=: \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3. \quad (3.3)$$

Шаг 2. Прежде всего отметим, что в силу того, что $h_n(t)$ — простая функция, величина I_2 равна нулю μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$ при достаточно малой длине отрезка $|t - t_0|$.

Выражение для I_1 в пределе при $t \to t_0$ даёт:

$$\lim_{t \to t_0} \mathrm{I}_1 = \|h_n(t_0) - f(t_0)\|$$

μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$ в силу теоремы Лебега о дифференцировании (лекция 2 данного тома, теорема 2). Таким образом, из (3.3) получим в пределе при $t \to t_0$ следующее неравенство:

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, d\mu - f(t_0) \right\| \leqslant 2\, \|h_n(t_0) - f(t_0)\| \tag{3.4}$$

μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$.

Шаг 3. Теперь достаточно перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить из неравенства (3.4) следующее равенство:

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, d\mu - f(t_0) \right\| = 0$$

μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$.

Лемма доказана.

Имеет место такое утверждение.

Лемма 6. *Пусть $f(t)$ — функция, интегрируемая по Бохнеру. Тогда для каждого $f^* \in \mathbb{B}^*$ имеет место следующее равенство*:

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^T f(t)\, d\mu \right\rangle = \int\limits_0^T \langle f^*, f(t) \rangle \, d\mu. \tag{3.5}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3 для функции $f(t)$. Для каждой функции из этой последовательности выполнено доказываемое равенство (3.5):

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^T h_n(t)\, d\mu \right\rangle = \int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t) \rangle \, d\mu.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^T f(t)\,d\mu \right\rangle = \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\,d\mu \right\rangle + \left\langle f^*, \int\limits_0^T h_n(t)\,d\mu \right\rangle =$$

$$= \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\,d\mu \right\rangle + \int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t)\rangle\,d\mu =$$

$$= \left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\,d\mu \right\rangle + \int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle\,d\mu + \int\limits_0^T \langle f^*, f(t)\rangle\,d\mu. \tag{3.6}$$

Шаг 2. Справедливы следующие оценки:

$$\left|\left\langle f^*, \int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\,d\mu \right\rangle\right| \leqslant \|f^*\|_* \left\|\int\limits_0^T [f(t) - h_n(t)]\,d\mu\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^T \|f(t) - h_n(t)\|\,d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\left|\int\limits_0^T \langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_0^T |\langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^T \|h_n(t) - f(t)\|\,d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

С учётом этих оценок из (3.6) переходом к пределу при $n \to +\infty$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть*

$$u(t) := \int\limits_{t_0}^t f(s)\,d\mu, \quad t_0, t \in [0, T]. \tag{3.7}$$

Тогда если $f \in C([0,T];\mathbb{B})$, *то* $u \in C^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$.

Доказательство.

Из теоремы 2 вытекает интегрируемость функции $f(t)$ и, следовательно, корректность определения (3.7). Из леммы 5 вытекает, что функция $u(t)$ μ-почти всюду на отрезке $[0, T]$ сильно дифференцируема, причём $u'(t) = f(t)$. Но поскольку $f(t) \in C([0, T]; \mathbb{B})$, то после изменения на множестве из $[0, T]$ нулевой меры Лебега μ получим, что $u'(t) \in C([0, T]; \mathbb{B})$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Доказательство, основанное только на римановской теории интеграла от $\mathbb{B}$-значных функций, см. в семинаре-лекции 11.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Арсеньев А.А.* Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. — М.— Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. — 514 с.
2. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационые неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
3. *Владимиров В.С.* Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976. — 280 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
5. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. — 336 с.
6. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
7. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.
8. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. — 472 с.
9. *Зорич В.А.* Математический анализ. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
10. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
11. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
12. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — 544 с.
13. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Н.: Научная книга, 1998.
14. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Т. I. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. — М.: УРСС, 2010. — 420 с.
15. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
16. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Наука, 1992, т. 8., 664 с.
18. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 572 с.
19. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб.: «Лань», 1999.- 560 с.
20. *Осмоловский В. Г.* Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. — СПб.: 2003. — 260 с.

21. *Хатсон В., Пим Дж.*. Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 432 с.
22. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
23. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
24. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
25. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 832 с.
26. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. — 563 с.
27. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.

Учебное издание

КОРПУСОВ Максим Олегович
ПАНИН Александр Анатольевич

Лекции по линейному функциональному анализу

Том II. Функциональные пространства

ISBN 978-5-9729-2582-7

Подписано в печать 28.02.2025
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 16,04. Печать по требованию.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Издательство «Инфра-Инженерия»
160011, г. Вологда, ул. Козленская, д. 63
Тел.: 8 (800) 250-66-01
E-mail: booking@infra-e.ru
https://infra-e.ru