

УДК 517.926

ЗАДАЧИ ОБРАЩЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Е.И. Атамась

*Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова,
кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления*

Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК

E-mail: eatamas@gmail.com

А.В. Ильин

*Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова,
кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления*

Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК

E-mail: iline@cs.msu.su

В.В. Фомичев

*Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова,
кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления*

Россия, 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК

E-mail: fomichev@cs.msu.su

Ключевые слова: обращение систем, наблюдатели, системы с запаздыванием, нулевая динамика, гипервыходные системы

Аннотация: Рассматриваются задачи обращения и наблюдения для линейных стационарных систем с запаздыванием. Для них получены специальная форма с выделением нулевой динамики и условия приводимости к ней. Предложен метод построения наблюдателей и инверторов, позволяющих получить оценки (с наперед заданной точностью) неизвестных входа и фазового вектора в случае квадратных и гипервыходных систем.

1. Введение

Рассматриваются классические задачи теории управления: задача наблюдения, т.е. восстановления фазового вектора динамической системы, и задача обращения, т.е. восстановления ее неизвестного входа, по измерениям ее выхода в реальном времени. Различным постановкам этих задач, отличающимся рассматриваемыми классами систем и требованиями, предъявляемыми к качеству полученных оценок, посвящено

множество исследований [1–7].

В данной работе изучаются задачи наблюдения и обращения для линейной стационарной системы дифференциальных уравнений с постоянными соизмеримыми запаздываниями. В данной работе предложенные ранее подходы для скалярных систем [7] обобщаются на системы с векторными входом и выходом.

Перейдем к формальной постановке задачи. Задана динамическая система

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \sum_{i=0}^k A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^k B_i \xi(t - i\tau), \\ y = \sum_{i=0}^k C_i x(t - i\tau), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор систем, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход системы, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$ ($l \geq m$) – неизвестный вход, A_i , B_i и C_i – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей, $\tau, 2\tau, \dots, k\tau$ – постоянные (соизмеримые) запаздывания, $k\tau$ – максимальная величина запаздывания по фазовому вектору, входу и выходу. Начальные функции $x(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$ определены при $\Theta \in [-k\tau, 0]$ и такие, что решение системы (1) существует и единственно при $t \in (0, +\infty)$, однако сами эти начальные функции считаются неизвестными.

Требуется по измерениям выхода $y(t)$ ($t \geq 0$) построить наблюдатель, формирующий оценку $\hat{x}(t)$ фазового вектора, и инвертор, формирующий оценку $\hat{\xi}(t)$ неизвестного входа системы (1) такие, что погрешность оценивания не превосходит заданного $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого момента времени $t^* > 0$. При этом оценки $\hat{x}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$ формируются в режиме реального времени на основании текущих значений $y(t)$ и значений $y(\Delta)$ при $\Delta \in [0, t]$ (т.е. “памяти” о предыдущих значениях выхода).

Введем следующее обозначение для оператора запаздывания: $d(f(t)) = f(t - \tau)$. Поскольку он перестановочен с оператором дифференцирования, систему (1) можно переписать в виде

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(d)x + B(d)\xi, \\ y = C(d)x, \end{cases}$$

где $A(d)$, $B(d)$, $C(d)$ – полиномиальные матрицы,

$$A(d) = \sum_{i=0}^k d^i A_i, \quad B(d) = \sum_{i=0}^k d^i B_i, \quad C(d) = \sum_{i=0}^k d^i C_i.$$

2. Приведение системы к специальному виду

Перейдем от фазового вектора $x(t)$ к вектору $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, где $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход, $x'(t) \in \mathbb{R}^{n-l}$ – оставшаяся часть фазового вектора. Так как $y(t) = C(d)x(t)$, то такое преобразование координат осуществляется с помощью матрицы $T(d) = \begin{pmatrix} T'(d) \\ C(d) \end{pmatrix}$, где $T'(d) \in \mathbb{R}^{(n-l) \times n[d]}$ – матрица из полиномов от d . Для того чтобы замена была обратима, требуется, чтобы матрица $T(d)$ была унимодулярной (т.е. ее определитель $\det T(d) = \text{const} \neq 0$). Таким образом, возникает задача: по

заданной полиномиальной матрице $C(d) \in \mathbb{R}^{l \times n}[d]$ подобрать полиномиальную матрицу $T'(d)$ такую, что матрица $T(d)$ унимодулярна.

Лемма 1. Система (2) обратимым преобразованием координат приводится к виду, в котором часть фазового вектора является измеримым выходом, тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель миноров максимального порядка l ($l < n$) матрицы $C(d)$ равен единице.

Доказательство. Любая полиномиальная матрица $C(d)$ может быть приведена к форме Смита [8], т.е. для $C(d)$ существуют такие унимодулярные матрицы $L(d) \in \mathbb{R}^{l \times l}[d]$ и $R(d) \in \mathbb{R}^{n \times n}[d]$, что

$$L(d)C(d)R(d) = \tilde{C}(d), \quad \tilde{C}(d) = (0, \bar{C}(d)),$$

$\bar{C}(d) = \text{diag}[\bar{C}_1(d), \dots, \bar{C}_l(d)] \in \mathbb{R}^{l \times l}[d]$ ($\bar{C}(d)$ – диагональная $l \times l$ -матрица). Полиномы $\bar{C}_i(d)$, стоящие на диагонали, – инвариантные многочлены матрицы $C(d)$, причем $\bar{C}_i(d)$ является делителем $\bar{C}_{i+1}(d)$ ($i = \overline{1, l-1}$).

Пусть $D_i(d)$ – наибольший общий делитель всех миноров i -го порядка матрицы $C(d)$. Тогда

$$\bar{C}_i(d) = \frac{D_i(d)}{D_{i-1}(d)}, \quad D_0(d) = 1.$$

Ясно, что для существования матрицы $T'(d)$, требуется, чтобы в форме Смита матрицы $C(d)$ диагональная матрица $\bar{C}(d)$ была единичной, т.е. $\bar{C}_i(d) = 1$ при всех $i = \overline{1, l}$. Так как матрица $\bar{C}_l(d)$ делится на все элементы $\bar{C}_i(d)$, то для того, чтобы матрица $\bar{C}(d)$ была единичной, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{C}_l(d) = 1$. Но так как $\bar{C}_l(d) = D_l(d)/D_{l-1}(d)$, то для этого достаточно, чтобы $D_l = 1$, т.е. наибольший общий делитель всех миноров максимального порядка l матрицы $C(d)$ был полиномом, равным единице.

Покажем, что это же условие является и необходимым. Действительно, если $\bar{C}_l(d) = 1$, то $\bar{C}_i(d) = 1$, $i = \overline{1, l}$, а значит, $D_l(d) = D_{l-1}(d)$, $D_{l-1}(d) = D_{l-2}(d)$, $\dots$, $D_1(d) = D_0(d) = 1$, т.е. $D_l(d) = 1$. $\square$

Пусть матрица $C(d)$ приведена к форме Смита $\tilde{C}(d)$. Выберем матрицу $\tilde{T}'(d)$ в виде $\tilde{T}'(d) = (I, 0)$, где $I \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}$ – единичная матрица. Тогда $\begin{pmatrix} \tilde{T}'(d) \\ \tilde{C}(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ – унимодулярная матрица.

Так как $\tilde{C}(d) = L(d)C(d)R(d)$, то

$$T(d) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L^{-1}(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}'(d) \\ \tilde{C}(d) \end{pmatrix} (R^{-1}(d)) = \begin{pmatrix} \tilde{T}'(d)R^{-1}(d) \\ C(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T'(d) \\ C(d) \end{pmatrix}$$

– унимодулярная матрица. Таким образом, для системы (2) преобразование координат к виду, в котором часть фазового вектора является измеряемым выходом, осуществляется матрицей

$$T(d) = \begin{pmatrix} T'(d) \\ C(d) \end{pmatrix}, \quad T'(d) = (I, 0)R^{-1}(d),$$

$R(d)$ – правое преобразование для приведения матрицы $C(d)$ к форме Смита. Учитывая явный вид матрицы $T'(d)$, можно найти и обратную матрицу $T^{-1}(d)$.

Обозначим $\tilde{L}(d) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L(d) \end{pmatrix}$. Тогда $\tilde{L}^{-1}(d) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & L^{-1}(d) \end{pmatrix}$, и, так как

$T(d) = \tilde{L}^{-1}(d)R^{-1}(d)$, то $T^{-1}(d) = R(d)\tilde{L}(d)$.

После замены переменных система (2) примет вид

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}' = A_{11}(d)x' + A_{12}(d)y + B_1(d)\xi, \\ \dot{y} = A_{21}(d)x' + A_{22}(d)y + B_2(d)\xi, \end{cases}$$

где $B_2(d) = C(d)B(d)$, $B_1(d) = T'(d)B(d)$, $T(d)A(d)T^{-1}(d) = (A_{ij})_{i,j=1,2}$.

Избавимся от влияния возмущения в первой подсистеме (3). Если матрица $B_2(d) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ такова, что $B_1(d) = Q(d)B_2(d)$, где $Q(d) \in \mathbb{R}^{(n-l) \times l}[d]$, то, перейдя от координат (x', y) к координатам $(\tilde{x}', y)$, где $\tilde{x}' = x' - Q(d)y$ (преобразование, очевидно, обратимо), получаем систему вида

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}' = \tilde{A}_{11}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}_{12}(d)y, \\ \dot{y} = \tilde{A}_{21}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}_{22}(d)y + B_1(d)\xi, \end{cases}$$

в случае в случае $l = m$ или вида

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}' = \tilde{A}_{11}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}'_{12}(d)\tilde{y}' + \tilde{A}''_{12}(d)\tilde{y}'', \\ \dot{\tilde{y}}' = \tilde{A}'_{21}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}'_{22}(d)\tilde{y}' + \tilde{A}''_{22}(d)\tilde{y}'' + \tilde{\xi}, \\ \dot{\tilde{y}}'' = \tilde{A}'_{21}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}'_{22}(d)\tilde{y}' + \tilde{A}''_{22}(d)\tilde{y}'', \end{cases}$$

в случае $l > m$, где $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}' \\ \tilde{y}'' \end{pmatrix}$, $\tilde{y}' \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{y}'' \in \mathbb{R}^{l-m}$ — компоненты преобразованного измеряемого выхода, а соответствующие полиномиальные матрицы однозначно определяются указанными преобразованиями координат.

Лемма 2. Пусть для системы (2) выполнены условия Леммы 1 и наибольший общий делитель всех миноров порядка m матрицы $B_2(d) = C(d)B(d)$ равен единице. Тогда система (2) обратимым преобразованием приводима к виду (4) в случае $l = m$ или к виду (5) в случае $l > m$.

Доказательство. Для доказательства леммы заметим, что ее условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы форма Смита матрицы $C(d)B(d)$ имела вид $\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$. Но если $C(d)B(d) = B_2(d) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$, то, при условии $l \geq m$, найдется и подходящая матрица $Q(d)$.

Действительно, если $B_2(d) = \bar{L}(d) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \bar{R}(d)$, $\bar{L}(d) \in \mathbb{R}^{l \times l}[d]$, $\bar{R}(d) \in \mathbb{R}^{m \times m}[d]$ – унимодулярные матрицы, то $Q(d) = [B_1(d)(\bar{R}(d))^{-1}, 0](\bar{L}(d))^{-1}$, где $Q(d) \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (l-m)}$. $\square$

3. Случай квадратных систем

Рассмотрим сначала квадратные системы, т.е. $l = m$. В этом случае для приводимости системы к виду (4) в соответствии с Леммой 2 достаточно, чтобы матрица $B_2(d)$ была унимодулярной. Обозначим $B_2(d)\xi(t) = \tilde{\xi}(t)$, $\xi(t) = B_2^{-1}(d)\tilde{\xi}(t)$.

Тогда система (4) примет вид

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}' = \tilde{A}_{11}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}_{12}(d)y, \\ \dot{y} = \tilde{A}_{21}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}_{22}(d)y + \tilde{\xi}. \end{cases}$$

Напомним, что матрицей Розенброка системы (2) называется матрица

$$R(s, d) = \left[\begin{array}{c|c} sI - A(d) & -B(d) \\ \hline C(d) & 0 \end{array} \right],$$

а значения s , при которых происходит падение ее ранга, называются инвариантными нулями.

Так как инвариантные нули не изменяются при обратимых заменах координат входов и выходов, то они совпадают для исходной системы (4) и системы (6). Для системы (6) матрица Розенброка имеет вид

$$R(s, d) = \left[\begin{array}{c|c|c} sI - \tilde{A}_{11}(d) & -\tilde{A}_{12}(d) & 0 \\ \hline -\tilde{A}_{21}(d) & sI - \tilde{A}_{22}(d) & -I \\ \hline 0 & I & 0 \end{array} \right].$$

Отсюда следует, что инвариантные нули являются корнями полинома

$$\gamma(s) = \det[sI - \tilde{A}_{11}(e^{-s\tau})].$$

Необходимым условием обратимости системы является устойчивость квази полинома $\gamma(s)$, которую и будем предполагать в дальнейшем. При $y(t) \equiv 0$ первое уравнение системы (6) является уравнение ее нулевой динамики, таким образом форма (6) является формой с выделением нулевой динамики системы (2).

В силу устойчивости полинома $\gamma(s)$ для восстановления неизвестной части фазового вектора $\tilde{x}'(t)$ можно использовать наблюдатель

$$(7) \quad \dot{\hat{x}}' = \tilde{A}_{11}(d)\hat{x}' + \tilde{A}_{12}(d)y.$$

Ошибка наблюдения $e' = \tilde{x}' - \hat{x}'$ удовлетворяет уравнению с запаздыванием

$$\dot{e}' = \tilde{A}_{11}(d)e',$$

и при любых начальных функциях $e'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, нами получено решение задачи наблюдения.

Далее, для восстановления неизвестного входного сигнала $\tilde{\xi}(t)$ (а следовательно, и $\xi(t) = B_2^{-1}(d)\tilde{\xi}(t)$) можно использовать подход с управляемой моделью, который применяется для системы без запаздывания [2].

Рассмотрим систему

$$(8) \quad \dot{y} = \tilde{A}_{21}(d)\hat{x}' + A_{22}(d)y + u,$$

и выберем управление $u(t) \in \mathbb{R}^l$ так, чтобы $\varepsilon(t) = (\hat{y}(t) - y(t)) \rightarrow 0$. Ошибка $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(9) \quad \dot{\varepsilon}(t) = [u(t) - \tilde{\xi}(t)] - \tilde{A}_{21}(d)e',$$

последнее слагаемое правой части которого асимптотически стремится к нулю. Пусть неизвестный сигнал $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$\xi(t) \in \Omega^1\{\xi(t) : |\xi(t)| \leq \xi^0; |\dot{\xi}(t)| \leq \xi^1\}.$$

Тогда и сигнал $\tilde{\xi}(t)$ также равномерно ограничен: $|\tilde{\xi}(t)| \leq K\xi^0$, где $K = \text{const} > 0$ определяется матрицей $B_2(d)$. В качестве стабилизирующего управления можно взять разрывное управление

$$(10) \quad u(t) = -\alpha\varepsilon(t) - F \text{Sgn}(\varepsilon(t)),$$

где $\text{Sgn}(\varepsilon(t)) = \text{diag}(\text{sgn}(\varepsilon_1(t)), \dots, \text{sgn}(\varepsilon_l(t)))$, а константа F выбирается из условия $F > K\xi^0$. В этом случае система (7) распадается на l скалярных систем

$$(11) \quad \dot{\varepsilon}_i(t) = -\alpha\varepsilon_i(t) - F \text{sgn}(\varepsilon_i(t)) - \tilde{\xi}_i(t) - \tilde{A}_{21}^i(d)e' = [u_i(t) - \tilde{\xi}_i(t)] - \tilde{A}_{21}^i(d)e',$$

где $\tilde{A}_{21}^i(d)$ – i -я строка матрицы $\tilde{A}_{21}(d)$, $\varepsilon_i(t)$, $u_i(t)$ и $\tilde{\xi}_i(t)$ – i -е компоненты соответствующих векторов. Очевидно, что при указанном выборе управления в системе (9), начиная с некоторого момента времени t^* , возникает скользящий режим по поверхности $\varepsilon(t) \equiv 0$. В качестве непрерывной оценки для $\tilde{\xi}(t)$ используем, как и в работе [7], скользящее среднее соответствующих (вообще говоря, разрывных) компонент управления

$$(12) \quad \hat{\xi}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(\tau) d\tau.$$

Так как векторная задача распадается на l скалярных задач (11), для которых в работе [7] получены оценки погрешности обращения, то имеет место

Теорема 1. Пусть для системы (2) выполнены условия Лемм 1 и 2, инвариантные нули устойчивы, $l = m$ и неизвестный сигнал $\xi(t) \in \Omega^1$. Тогда система (7), (8), (2), (12) решает задачу наблюдения и дает оценку $\bar{\xi} = B_2^{-1}\hat{\xi}(t)$ для неизвестного сигнала $\xi(t)$, удовлетворяющую с некоторого момента времени t^* неравенству

$$|\bar{\xi}(t) - \xi(t)| \leq K'\xi^1 T,$$

где T – параметр фильтра (12), ξ^1 – оценка для $\dot{\xi}(t)$ из класса Ω^1 , а $K' = \text{const} > 0$ определяется матрицей $B_2^{-1}(d)$.

Выбирая параметр фильтра T достаточно малым, можно найти оценку $\bar{\xi}(t)$ с наперед заданной точностью.

4. Случай гипервыходных систем

Пусть теперь $l > m$, т.е. система (2) неквадратная.

Как и ранее, считаем, что для системы (2) выполнены условия Леммы 2. Тогда она приводима к виду (5).

Инвариантные нули системы определяются матрицей Розенброка:

$$R(s, d) = \begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_{11}(d) & -\tilde{A}'_{12}(d) & -\tilde{A}''_{12}(d) & 0 \\ -\tilde{A}'_{21}(d) & sI - \tilde{A}'_{22}(d) & -\tilde{A}''_{22}(d) & I \\ -\tilde{\tilde{A}}'_{21}(d) & -\tilde{\tilde{A}}'_{22}(d) & sI - \tilde{\tilde{A}}''_{22}(d) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда инвариантные нули $R(s, d)$ совпадают с инвариантными нулями матрицы

$$R'(s, d) = \begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_{11}(d) \\ -\tilde{A}'_{21}(d) \end{bmatrix}.$$

Если у матрицы $R' \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-l)}$ отсутствуют инвариантные нули, т.е. $\text{rank } R'(s, e^{-s\tau}) = n-l$ при любом $s \in \mathbb{C}$, что и бывает в общем случае для неквадратной $(n-m) \times (n-l)$ матрицы, то это означает, что пара $\{\tilde{A}'_{21}(d); \tilde{A}_{11}(d)\}$ наблюдаема. Если же у матрицы $R'(s, d)$ есть устойчивые инвариантные нули, то пара $\{\tilde{A}'_{21}(d); \tilde{A}_{11}(d)\}$ обнаруживаема.

Для восстановления неизвестной части фазового вектора $\tilde{x}'$ рассмотрим вектор $\hat{x}' = \tilde{x}' - \tilde{Q}(d)\tilde{y}''$ при соответствующей матрице $\tilde{Q}(d)$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \tilde{A}_{11}(d)\tilde{x}' + \tilde{A}'_{12}(d)\tilde{y}' + \tilde{A}''_{12}(d)\tilde{y}'' - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{21}(d)\tilde{x}' - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{22}(d)\tilde{y}' - \tilde{Q}(d)\tilde{A}''_{22}(d)\tilde{y}'' = \\ &= (\tilde{A}_{11}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{21}(d))\tilde{x}' + (\tilde{A}'_{12}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{22}(d))\tilde{y}' + \\ &+ (\tilde{A}''_{12}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}''_{22}(d) + \tilde{A}_{11}(d)\tilde{Q}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{21}(d)\tilde{Q}(d))\tilde{y}'' = \\ &= (\tilde{A}_{11}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{21}(d))\tilde{x}' + P'(d)\tilde{y}' + P''(d)\tilde{y}''. \end{aligned}$$

Так как $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ известны (это компоненты преобразованного измеряемого выхода), то для восстановления $\hat{x}'$ используем наблюдатель

$$(13) \quad \dot{\hat{x}}' = (\tilde{A}_{11}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{21}(d))\hat{x}' + P'(d)\tilde{y}' + P''(d)\tilde{y}''.$$

Ошибка наблюдения $e'(t) = \tilde{x}' - \hat{x}'$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}' = (\tilde{A}_{11}(d) - \tilde{Q}(d)\tilde{A}'_{21}(d))e',$$

и так как пара $\{\tilde{A}'_{21}(d); \tilde{A}_{11}(d)\}$ наблюдаема или идентифицируема, то выбором матрицы $\tilde{Q}(d)$ можно добиться, чтобы $e'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В качестве оценки для $\tilde{x}'(t)$ используем представление $\tilde{x}'(t) = \bar{x}'(t) + \tilde{Q}(d)\tilde{y}''(t)$, тогда $\tilde{x}'(t) - \tilde{x}'(t) = e'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Тем самым показано, что Теорема 1 верна и в случае гипервыходной системы ($l > m$). Достаточно лишь заменить наблюдатель (7) на наблюдатель (13), а для восстановления неизвестного сигнала $\tilde{\xi}(t)$ (и, следовательно, $\xi(t) = \bar{R}^{-1}(d)\tilde{\xi}$) рассмотреть вторую часть системы (5) аналогично случаю квадратной системы.

5. Ослабление требований к канонической форме.

Для работы представленного выше алгоритма решения задач обращения и наблюдения требуется выполнение условий Леммы 1, т.е. форма Смита матрицы $C(d)$ должна иметь вид $(0, I)$. Это условие можно ослабить. Пусть, как и прежде,

$$L(d)C(d)R(d) = \tilde{C}(d), \quad \tilde{C}(d) = (0, \bar{C}(d)),$$

$\bar{C}(d) = \text{diag}[\bar{C}_1(d), \dots, \bar{C}_l(d)] \in \mathbb{R}^{l \times l}[d]$ ($\bar{C}(d)$ – диагональная $l \times l$ -матрица), но теперь $\bar{C}_l(d) \neq 1$. Предположим, что все полиномы $\bar{C}_i(d)$ являются дискретно устойчивым,

т.е. все их корни лежат внутри единичной окружности. Так как все $\bar{C}_i(d)$ делят $\bar{C}_l(d)$, необходим и достаточным условием для этого является дискретная устойчивость полинома $\bar{C}_l(d)$.

Рассмотрим новый векторный сигнал $\bar{y}$ такой, что

$$y_i(t) = \bar{C}_i(d)\bar{y}_i.$$

Тогда для системы с выходом $\bar{y}$ выполнены все условия Леммы 1. Для оценки сигнала $\bar{y}(t)$ воспользуемся разностным наблюдателем

$$(14) \quad \begin{cases} y(t) = \bar{C}(d)\tilde{\bar{y}}, \\ \tilde{\bar{y}}(t) = 0, \quad t \in (-\Theta, 0]. \end{cases}$$

Тогда

$$0 = \bar{C}(d)(\tilde{\bar{y}} - \bar{y}) \Rightarrow |\tilde{\bar{y}} - \bar{y}| \rightarrow 0.$$

Таким образом решение задачи разбивается на два этапа: на сначала происходит построение нового сигнала $\bar{y}$ с помощью разностного наблюдателя (14), после чего к нему применяются алгоритмы, полученные ранее.

Список литературы

1. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 329-339.
2. Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В. Метод управляемой модели в задачах обращения динамических систем // Докл. РАН. Теория управления. 1997. Т. 354, № 2. С. 171-173.
3. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 34, № 6. С. 744-750.
4. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Робастное обращение векторных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 11. С. 1478-1486.
5. Ильин А.В., Емельянов С.В., Фомичев В.В. Синтез робастных инверторов минимального порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 4. С. 575-585.
6. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
7. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Обращение линейных динамических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 405-413.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.