ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 4, с. 471–494

УДК 517.538

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФЕРРИТОВ В $(N+1)$–МЕРНОМ СЛУЧАЕ[1)]

М. О. Корпусов[1,*], В. М. Озорнин[2]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физфак, Россия
[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия
*e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.09.2024 г.
Переработанный вариант 05.09.2024 г.
Принята к публикации 05.02.2025 г.

В работе рассмотрены три задачи Коши для $(N+1)$–мерных нелинейных уравнений соболевского типа, возникающих в теории магнитных колебаний в ферритах. Получены результаты о существовании и о единственности локальных во времени слабых решений этих задач, а также о разрушении этих решений. Библ. 17.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 111, **EDN**: XXX

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрим следующие три нелинейных уравнения с модельными нелинейностями:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} + |\nabla u(x,t)|^q = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} - \frac{\partial\,|\nabla u|^q}{\partial t} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2\,|\nabla u|^q}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

при $q > 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$ и $u = u(x,t)$. Эти уравнения возникают при рассмотрении магнитостатических волн в ферритах (см. работу [1]). Данная работа продолжает исследования, начатые в ~~[2] – [6]~~ и посвященные нахождению критических показателей для уравнений соболевского типа. Заметим, что в работе [2] был изучен случай $N = 3$. В растоящей работе мы распространили результаты работы [2] на случай $N \geqslant 3$. При этом оказалось, что поведение решений задач Коши существенно различное при

$$1 < q \leqslant \frac{N}{N-1} \quad \text{и} \quad q > \frac{N}{N-1}, \quad N \geqslant 3.$$

Большинство утверждений является тривиальным обобщением результатов из работы [2], которые мы приводим без подробного доказательства.

Уравнения (1.1)–(1.3) относятся к классу нелинейных уравнений типа С. Л. Соболева. Отметим, что исследованию линейных и нелинейных уравнений соболевского типа посвящено много работ. Так, в работах Г. А. Свиридюка, С. А. Загребиной, А. А. Замышляевой (см. [7]– [9]) были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа С. Л. Соболева была рассмотрена в работе Б. В. Капитонова [10]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С. А. Габова и А. Г. Свешникова (см. ~~[11], [12]~~), а также в работах их учеников (см. работу Ю. Д. Плетнера [13]).

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00056).

В классической работе [14] С. И. Похожаева и Э. Митидиери достаточно простым методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли так называемых критических показателей. Отметим также работы ~~[15], [15]~~ Е. И. Галахова и О. А. Салиевой.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем обозначение:

$$I_N = \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{2.1}$$

В дальнейшем мы будем систематически использовать абстрактные банаховы пространства вида $C^{(n)}([0,T];\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — банахово пространство относительно нормы $|\cdot|_{\mathbb{B}}, n \in \mathbb{Z}_+$. Определяется это пространство индуктивно. Сначала определим банахово пространство $C([0,T];\mathbb{B})$ как линейное пространство таких функций $f : [0,T] \to \mathbb{B}$, что

$$|f(t_2) - f(t_1)|_{\mathbb{B}} \to +0 \quad \text{для любых} \quad t_1, t_2 \in [0,T], \quad |t_2 - t_1| \to +0.$$

Линейное пространство $C([0,T];\mathbb{B})$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_T := \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|_{\mathbb{B}}.$$

Функция f принадлежит классу $C^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$, если $f \in C([0,T];\mathbb{B})$ и существует сильная производная $df/dt \in C([0,T];\mathbb{B})$, определяемая следующим образом:

$$\lim_{|\Delta t|\to+0} \left| \frac{1}{\Delta t}[f(t+\Delta t) - f(t)] - \frac{df}{dt}(t) \right|_{\mathbb{B}} = 0.$$

Далее индуктивно определяем банахово пространство $C^{(n)}([0,T];\mathbb{B})$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$.

Символом $C_b\left(\mathbb{R}^N\right)$ мы обозначили линейное пространство непрерывных и ограниченных функций, которое является банаховым относительно нормы:

$$|f(x)|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|. \tag{2.2}$$

Символом $C_b\left(\rho(x);\mathbb{R}^N\right)$ при $\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$ мы обозначили линейное подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}^N)$, для которых конечна норма:

$$|f(x)|_{0,\rho} := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(x)|f(x)|, \tag{2.3}$$

причем $C_b\left(\rho(x);\mathbb{R}^N\right)$ — является банаховым относительно этой нормы.

Рассмотрим также линейное пространство $C_b^{\gamma_1,\gamma_2}\left(\rho(x);\mathbb{R}^N\right)$, где $\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, которое определяется как линейное подпространство функций f банахова пространства $C_b^{(1)}\left(\mathbb{R}^N\right)$, для которых конечна норма:

$$|f(x)|_{\gamma_1,\gamma_2} := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \rho^{\gamma_1}(x)|f(x)| + \sum_{j\in I_N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \rho^{\gamma_2}(x) \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Линейное пространство* $C_b^{\gamma_1,\gamma_2}\left(\rho(x);\mathbb{R}^N\right)$ *является банаховым относительно нормы* 2.4.

Введем следующие банаховы пространства:

$$C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right) = C_b^{\gamma_1,\gamma_2}\left(\rho(x);\mathbb{R}^N\right) \tag{2.5}$$

при $\rho(x) = \left(1+|x|^2\right)^{1/2}$ и $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$, норму которого будем обозначать символом $|\cdot|_1$:

$$|f(x)|_1 := |f(x)|_0 + \sum_{j\in I_N} \left| \left(1+|x|^2\right)^{1/2} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_0, \tag{2.6}$$

$$C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right) = C_b^{\gamma_1,\gamma_2}\left(\rho(x);\mathbb{R}^N\right) \tag{2.7}$$

при $\rho(x) = (1+|x|^2)^{1/2}$, $\gamma_1 = N-2$ и $\gamma_2 = N-1$. Далее, будет встречаться банахово пространство $C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta};\mathbb{R}^N\right)$ при $\beta > 0$, которое является линейным подпространством банахова пространства $C_b^{(2)}\left(\mathbb{R}^N\right)$, в котором конечна норма:

$$|f|_2 := \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2}|f(x)| + \sum_{j\in I_N}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left(1+|x|^2\right)^{(N-1)/2}\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right| + \sum_{j,k\in I_N}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left(1+|x|^2\right)^{\beta}\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_k}\right|, \quad \beta > N/2. \tag{2.8}$$

Символом $C_0^{(2)}[0,T]$ обозначаем линейное пространство функций f из $C^{(2)}[0,T]$, $f(T) = f'(T) = f''(T) = 0$, которое является банаховым относительно нормы:

$$\|f(t)\| := |f(t)|_0 + \left|f'(t)\right|_0 + \left|f''(t)\right|_0, \tag{2.9}$$

где норма $|\cdot|_0$ определяется формулой (2.2). Будем использовать следующие обозначения для норм специальных банаховых пространств:

$$C\left([0,T];C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right)\right) : \|f\|_{0,T} := \sup_{t\in[0,T]}|f(x,t)|_1, \tag{2.10}$$

$$C^{(1)}\left([0,T];C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right)\right) : \|f\|_{1,T} := \sup_{t\in[0,T]}\left[|f(x,t)|_1 + \left|\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right|_1\right], \tag{2.11}$$

$$C^{(2)}\left([0,T];C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right)\right) : \|f\|_{2,T} := \sup_{t\in[0,T]}\left[|f(x,t)|_1 + \left|\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right|_1 + \left|\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right|_1\right], \tag{2.12}$$

где норма $|\cdot|_1$ определена равенством (2.6). Символом $C_{x,t}^{(0,n)}\left(\mathbb{R}^N\times[0,T]\right)$, где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, обозначаем пространство таких функций f, что

$$f,\ \frac{\partial^j f}{\partial t^j}\in C\left(\mathbb{R}^N\times[0,T]\right) \quad \text{при} \quad j=\overline{0,n}. \tag{2.13}$$

Символом $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначаем векторное топологическое пространство основных функций с компактным носителем, а через $\mathscr{D}'(\Omega)$ — соответствующие пространства обобщенных функций.

Символом $W_{q,loc}^{1,0}\left(\mathbb{R}^N\times[0,T]\right)$ обозначается пространство измеримых функций f, для которых определены слабые частные производные, причем для любого компакта $K\in\mathbb{R}^N$ имеем

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^q(K\times[0,T]). \tag{2.14}$$

Символом $W_{q,loc}^{1,0}\left(\mathbb{R}^N\times[0,+\infty)\right)$ обозначается пространство измеримых функций f, для которых определены слабые частные производные, причем для любого компакта $K\in\mathbb{R}^N$ и для любого $T>0$ имеем

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^q(K\times[0,T]). \tag{2.15}$$

Символом $W_{q,loc}^{1,0}\left(\mathbb{R}^N\right)$ обозначается пространство таких измеримых функций f, что существуют все слабые производные и для любого компакта $K\subset\mathbb{R}^N$ имеем:

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial x_j}\in L^q(K). \tag{2.16}$$

Символами $W_q^1(D)$ и $H^2\left(O\left(x_0,R_0\right)\right)$ будем обозначать классические пространства С. Л. Соболева, где $O\left(x_0,R_0\right)$ — открытый шар радиуса $R_0>0$ в $\mathbb{R}^N$ с центром в точке $x_0\in\mathbb{R}^N$.

Наконец, для функции $f\in C^{(n)}(-\infty,0]\cup C^{(n)}[0,+\infty)$, где $n\in\mathbb{N}$ и производные в точке $t=0$ понимаются в смысле односторонних пределов, будем использовать следующее обозначение:

$$\left\{\frac{\partial^j f(t)}{\partial t^j}\right\} = \begin{cases} f^{(j)}(t), & \text{если} \quad \{t>0\}\cup\{t<0\}, \quad j=\overline{1,n};\\ \text{произвольно}, & \text{если} \quad t=0.\end{cases}$$

Пусть f — некоторая функция, определенная при $t\in[0,T]$; тогда символом $\tilde{f}$ будем обозначать продолжение нулем при $t<0$:

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t\in[0,T];\\ 0, & \text{если } t<0.\end{cases}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Построим фундаментальное решение оператора:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i\in I_N} \omega_i^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}, \quad N \geqslant 3. \tag{3.1}$$

Применяя преобразование Лапласа по t, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{N} \left(p^2 + \omega_i^2\right) \frac{\partial^2 \hat{\mathscr{E}}(x,t)}{\partial x_i^2} = \prod_{i=1}^{N} \delta(x_i). \tag{3.2}$$

Одним из решений этого уравнения является функция

$$\begin{gathered}\hat{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{S_N(N-2)}\left[\sum_{i}^{\overline{1,N}}\prod_{j\neq i}^{\overline{1,N}}(p^2+\omega_j^2)^{1/(N-2)}(p^2+\omega_i^2)^{\frac{3-N}{N-2}}x_i^2\right]^{1-N/2} = \\ = -\frac{1}{S_N|x|^{N-2}(N-2)}\left[\frac{1}{|x|^2}\sum_{i}^{\overline{1,N}}\prod_{j\neq i}^{\overline{1,N}}(p^2+\omega_j^2)^{1/(N-2)}(p^2+\omega_i^2)^{\frac{3-N}{N-2}}x_i^2\right]^{1-N/2}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Предположим, что $\operatorname{Re} p = \sigma > R_{\mathcal{L}}$ при достаточно большом $R_{\mathcal{L}} > 0$. Тогда $|p| > R_{\mathcal{L}}$. Под знаком $\sum\limits_{k_1,\cdots,k_N}^{\overline{0,+\infty}}$ подразумевается повторное суммирование по всем указанным индексам в пределах $\overline{0,+\infty}$:

$$\prod_{i\neq j}^{\overline{1,N}}(p^2+\omega_i^2)^{1/(N-2)}(p^2+\omega_j^2)^{\frac{3-N}{N-2}}x_j^2 = p^{\frac{4}{N-2}}\sum_{k_1,\cdots,k_N}^{\overline{0,+\infty}} p^{-2\sum\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i}\left[\frac{\left(\frac{3-N}{N-2}\right)_{k_q}\prod\limits_{i\neq q}^{\overline{1,N}}\left(\frac{1}{N-2}\right)_{k_i}}{\prod\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i!\,\omega_i^{-2k_i}}x_q^2\right], \tag{3.4}$$

$$(m)_k := \begin{cases}\prod\limits_{r}^{\overline{0,k-1}}(m-r), & k>0,\\ 1, & k=0.\end{cases}$$

Используем обозначение:

$$\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x) := \sum_{q}^{\overline{1,N}}\left[\frac{\left(\frac{3-N}{N-2}\right)_{k_q}\prod\limits_{i\neq q}^{\overline{1,N}}\left(\frac{1}{N-2}\right)_{k_i}}{\prod\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i!\,\omega_i^{-2k_i}}\right]\frac{x_q^2}{|x|^2}. \tag{3.5}$$

Тогда в соответствии с этими выражениями исходную функцию можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\hat{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{S_N|x|^{N-2}(N-2)}\left[p^{\frac{4}{N-2}}\sum_{k_1,\cdots,k_N}^{\overline{0,+\infty}}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x)\cdot p^{-2\sum\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i}\right]^{1-N/2} = \\ = -\frac{1}{S_N|x|^{N-2}(N-2)}\left[p^{\frac{4}{N-2}} + p^{\frac{4}{N-2}}\sum_{k_1+\cdots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x)\cdot p^{-2\sum\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i}\right]^{1-N/2} = \\ = -\frac{p^{-2}}{S_N|x|^{N-2}(N-2)}\left[1 + \sum_{k_1+\cdots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x)\cdot p^{-2\sum\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i}\right]^{1-N/2}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Справедливо следующее разложение в ряд:

$$\frac{1}{p^2}\left[1+\sum_{k_1+\cdots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x)\cdot p^{-2\sum\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i}\right]^{1-N/2} = \sum_{a=0}^{+\infty}\binom{1-N/2}{a}\frac{1}{p^{2a+2}}\left[\sum_{k_1+\cdots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}}\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x)\cdot p^{-2\sum\limits_{i}^{\overline{1,N}}k_i}\right]^a = \frac{1}{p^2}+\hat{\Phi}(x,p), \tag{3.7}$$

$$\hat{\Phi}(x,p) := \sum_{a=1}^{+\infty} \binom{1-N/2}{a} \frac{1}{p^{2a+2}} \left[\sum_{k_1+\dots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}} \alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x) \cdot p^{-2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i} \right]^a. \tag{3.8}$$

Поскольку $|p| > R_{\mathcal{L}} > 0$, то применяя обратное преобразование Лапласа, получим выражение

$$\Phi(x,t) = \theta(t) \sum_{a=0}^{+\infty} \binom{1-N/2}{a} \left[\sum_{k_1+\dots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}} \frac{\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x) \cdot t^{2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i - 1}}{\left(2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i - 1\right)!} * \right]^a \frac{t^{2a+1}}{(2a+1)!}, \tag{3.9}$$

где

$$\left[\sum_{k_1+\dots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}} \frac{\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x) \cdot t^{2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i - 1}}{\left(2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i - 1\right)!} * \right] \phi(t) = \sum_{k_1+\dots+k_N>0}^{\overline{0,+\infty}} \frac{\alpha_{k_1,\cdots,k_N}(x)}{\left(2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i - 1\right)!} \int_0^t (t-\tau)^{2\sum_i^{\overline{1,N}} k_i - 1} \phi(\tau) d\tau. \tag{3.10}$$

При $a = 0$ данный оператор вырождается в оператор id. Таким образом, для фундаментального решения справедливо равенство

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{\mathscr{E}}(x,p) e^{pt} dp, \quad \sigma > R_{\mathcal{L}} > 0. \tag{3.11}$$

С учетом равенства (3.9) имеем:

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{t\theta(t) + \Phi(x,t)}{S_N |x|^{N-2}(N-2)}, \tag{3.12}$$

где S_N — площадь N-мерной единичной сферы.

Теорема 1. *Фундаментальное решение $\mathscr{E}$ обладает следующими свойствами.*

1. $\mathscr{E} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times [0,+\infty))$.

2. *При $x \neq 0$ и $t \in [0,T]$ справедливы следующие оценки*:

$$\left| \frac{\partial^k \mathscr{E}}{\partial t^k}(x,t) \right| \leqslant \frac{K_1(T)}{|x|^{N-2}}, \tag{3.13}$$

$$\left| \frac{\partial^{k+1} \mathscr{E}}{\partial t^k \partial x_j}(x,t) \right| \leqslant \frac{K_2(T)}{|x|^{N-1}}, \quad \left| \frac{\partial^{k+2} \mathscr{E}}{\partial t^k \partial x_j \partial x_i}(x,t) \right| \leqslant \frac{K_3(T)}{|x|^{N}}, \tag{3.14}$$

где все смешанные производные перестановочны и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $i, j = \overline{1,N}$.

3. *При $x \neq 0$ и $t \geqslant 0$ справедливы следующие равенства*:

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x_j}(x,0) = \mathscr{E}(x,0) = 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}(x,0) = -\frac{1}{S_N(N-2)} \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} \frac{1}{|x|^{N-2}}, \quad n = 0,\ 1. \tag{3.16}$$

4. *При $x \neq 0$ и $t \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$\frac{\partial^{k+2} \mathscr{E}}{\partial t^2 \partial x_j^k}(x,0) = 0. \tag{3.17}$$

4. ОЦЕНКА ОДНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим функцию:

$$J_N(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} K(x-y)f(y)\,dy, \tag{4.1}$$

$$K \in C^{(l)}(\mathbb{R}^N\backslash\{0\}), \quad f \in C_b^{(l)}(\mathbb{R}^N), \quad l \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{4.2}$$

$$|D_y^k K(x-y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^{N-\delta+k}}, \quad x \neq y, \quad k=\overline{0,l}, \tag{4.3}$$

$$\left|D_y^k f(y)\right| \leqslant \frac{C}{(1+|y|^2)^{(\gamma+k)/2}}, \quad k=\overline{0,l}. \tag{4.4}$$

Лемма 2. *При $N \geqslant 3$, $\gamma > N$, $0 < \delta < N$ справедлива оценка*

$$|D_x^l J_N(x)| \leqslant \frac{C}{\left(1+|x|^2\right)^{(N-\delta+l)/2}}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Заметим, что справедливо равенство

$$D_x^l J_N(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_y^l f(y)\right) K(x-y)\,dy. \tag{4.6}$$

Теперь получим первую оценку величины $D_x^l J_N(x)$. Справедливо равенство

$$D_x^l J_N(x) = \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} \left(D_y^l f(y)\right) K(x-y)\,dy + \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \left(D_y^l f(y)\right) K(x-y)\,dy, \tag{4.7}$$

из которого получаем оценку

$$\left|D_x^l J_N(x)\right| \leqslant C\left(\int\limits_{|x-y|\leqslant 1} \frac{1}{|x-y|^{N-\delta}}\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\gamma+l)/2}}\,dy\right) \leqslant C. \tag{4.8}$$

Теперь получим вторую оценку:

$$D_x^l J_N(x) = \int\limits_{|y|\leqslant|x|/2} \left(D_y^l f(y)\right) K(x-y)\,dy + \int\limits_{|y|\geqslant|x|/2} \left(D_y^l f(y)\right) K(x-y)\,dy = K_1 + K_2. \tag{4.9}$$

Если $|y| \leqslant |x|/2$, то

$$|x-y| \geqslant |x| - |y| \geqslant |x|/2. \tag{4.10}$$

Поэтому интегрируя по частям в K_1 получим равенство:

$$K_1 = (-1)^l \int\limits_{|y|\leqslant|x|/2} f(y)\left(D_y^l K(x-y)\right)\,dy + \sum_{k=0}^{l-1} \int\limits_{|y|=|x|/2} \left(D_y^k f(y)\right)\left(D_y^{l-1-k} K(x-y)\right)\chi_k\left(\frac{y}{|y|}\right)\,dS_y, \tag{4.11}$$

где функции χ_k — ограниченные. Тогда имеет место оценка:

$$|K_1| \leqslant \frac{C}{|x|^{N-\delta+l}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|y|^2)^{\gamma/2}}\,dy + C\sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{(1+|x|^2)^{(\gamma+k)/2}} \frac{1}{|x|^{N-\delta+l-1-k}} \leqslant \frac{C}{|x|^{N-\delta+l}}. \tag{4.12}$$

Для K_2 справедлива оценка:

$$|K_2| \leqslant C \int\limits_{|y|\geqslant|x|/2} \frac{1}{(1+|y|^2)^{(\gamma+l)/2}} \frac{1}{|x-y|^{N-\delta}}\,dy, \tag{4.13}$$

причем если $|y| \geqslant |x|/2$, то имеем

$$|x-y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 3|y|. \tag{4.14}$$

Поэтому при $|y| \geqslant |x|/2$ справедлива оценка:

$$\frac{1}{(1+|y|^2)^{(\gamma+l)/2}} = \frac{1}{(1+|y|^2)^{(N-\delta+l)/2}}\frac{1}{(1+|y|^2)^{(\gamma+\delta-N)/2}} \leqslant C\frac{1}{(1+|x|^2)^{(N-\delta+l)/2}}\frac{1}{(1+|x-y|^2)^{(\gamma+\delta-N)/2}}. \tag{4.15}$$

Таким образом, из (4.13) с учетом (4.15) получим неравенство

$$\begin{aligned} |K_2| &\leqslant \frac{C}{(1+|x|^2)^{(N-\delta+l)/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|x-y|^2)^{(\gamma+\delta-N)/2}}\frac{1}{|x-y|^{N-\delta}}\,dy = \\ &= \frac{C}{(1+|x|^2)^{(N-\delta+l)/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{(1+|y|^2)^{(\gamma+\delta-N)/2}}\frac{1}{|y|^{N-\delta}}\,dy \leqslant \frac{C}{(1+|x|^2)^{(N-\delta+l)/2}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Таким образом, из (4.9) с учетом (4.12) и (4.16) приходим к оценке:

$$|D_x^l J_N(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{N-\delta+l}}. \tag{4.17}$$

В свою очередь из (4.8) и (4.17) получаем оценку (4.5). Лемма доказана.

5. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ

В этом разделе мы дадим слабые формулировки следующих задач Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} + |\nabla u(x,t)|^q = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T], \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^N; \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} - \frac{\partial\,|\nabla u|^q}{\partial t} = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T], \tag{5.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^N; \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2\,|\nabla u|^q}{\partial t^2} = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T], \tag{5.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{5.6}$$

Дадим определения.

Определение 1. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (5.1) называется такая функция $u \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N\times[0,T])$, что для любой функции $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T))$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla u(x,t), \nabla\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}\right) + \sum_{i=1}^N\omega_i^2\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x_i}\right]dx\,dt + \\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t}, \nabla u_0(x)\right) - \big(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\big)\right]dx = \int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi(x,t)|\nabla u(x,t)|^q\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{5.7}$$

причем $u_0, u_1 \in W^{1,0}_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 2. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (5.1) называется такая функция $u \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N\times[0,+\infty))$, что для любой функции $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^N\times(-\infty,+\infty))$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla u(x,t), \nabla\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}\right) + \sum_{i=1}^N\omega_i^2\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x_i}\right]dx\,dt + \\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t}, \nabla u_0(x)\right) - \big(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\big)\right]dx = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi(x,t)|\nabla u(x,t)|^q\,dx\,dt, \end{aligned} \tag{5.8}$$

причем $u_0, u_1 \in W^{1,0}_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 3. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (5.3) называется такая функция $u \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, что для любой функции $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ справедливо равенство

$$
\begin{gathered}
+\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla u(x,t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x_i} \right] dx\,dt + \\
+\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t}, \nabla u_0(x) \right) - \big(\nabla \phi(x,0), \nabla u_1(x)\big) + \phi(x,0)|\nabla u_0(x)|^q \right] dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} |\nabla u(x,t)|^q \, dx\,dt,
\end{gathered} \tag{5.9}
$$

причем $u_0 \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N)$, $u_1 \in W^{1,0}_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 4. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (5.3) называется такая функция $u \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$, что для любой функции $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty))$ справедливо равенство

$$
\begin{gathered}
\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla u(x,t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x_i} \right] dx\,dt + \\
+\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t}, \nabla u_0(x) \right) - \big(\nabla \phi(x,0), \nabla u_1(x)\big) + \phi(x,0)|\nabla u_0(x)|^q \right] dx = \\
= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} |\nabla u(x,t)|^q \, dx\,dt,
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

причем $u_0 \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N)$, $u_1 \in W^{1,0}_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 5. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (5.5) называется такая функция $u \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, что для любой функции $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ справедливо равенство

$$
\begin{gathered}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla u(x,t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x_i} \right] dx\,dt + \\
+\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t}, \nabla u_0(x) \right) + \big(\nabla \phi(x,0), \nabla u_1(x)\big) + |\nabla u_0(x)|^q \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) - \phi(x,0) q \left(\nabla u_1(x), |\nabla u_o(x)|^{q-2} \nabla u_o(x)\right) \right] dx = \\
= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} |\nabla u(x,t)|^q \, dx\,dt,
\end{gathered} \tag{5.11}
$$

причем $u_0(x), u_1(x) \in W^{1,0}_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$.

Определение 6. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (5.5) называется такая функция $u \in W^{1,0}_{q,loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$, что для любой функции $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty))$ справедливо равенство

$$
\begin{gathered}
\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla u(x,t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \right) + \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x_i} \right] dx\,dt + \\
+\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t}, \nabla u_0(x) \right) - \big(\nabla \phi(x,0), \nabla u_1(x)\big) + \right. \\
\left. + |\nabla u_0(x)|^q \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) - \phi(x,0) q \left(\nabla u_1(x), |\nabla u_o(x)|^{q-2} \nabla u_o(x)\right) \right] dx = \\
= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} |\nabla u(x,t)|^q \, dx\,dt,
\end{gathered} \tag{5.12}
$$

причем $u_0(x), u_1(x) \in W^{1,0}_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$.

В работе [2] доказана лемма 7.1.

Лемма 3. *Всякие глобальные во времени слабые решения в смысле определений* 2, 4, 6 *являются локальными во времени слабыми решениями для любого* $T > 0$ *в смысле определений* 1, 3, 5 *соответственно.*

В работе [2] доказаны теоремы 7.1, 7.2 и 7.3.

Теорема 2. *Пусть* u — *слабое решение задачи Коши* (5.1) *в смысле определения* 1. *Тогда в классе таких функций* u, u_0 u_1, *что существуют свертки*:

$$U_1(x,t) := -\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|\nabla\widetilde{u}(y,\tau)|^q\,dy\,d\tau \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.13}$$

$$V(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_1(y)\,dy \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.14}$$

$$W(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta u_0(y)\,dy \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.15}$$

справедливо следующее представление в виде суммы трех потенциалов:

$$\widetilde{u}(x,t) = U_1(x,t)+V(x,t)+W(x,t) \quad \textit{для п. в.} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(-\infty,T), \tag{5.16}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ — *фундаментальное решение оператора* $\mathfrak{M}_{x,t}$, *определенное равенством* (3.12).

Теорема 3. *Пусть* u — *слабое решение задачи Коши* (5.3) *в смысле определения* 3. *Тогда в классе* $|\nabla_x u|^q \in C^{(0,1)}_{x,t}(\mathbb{R}^N\times$ $\times[0,T])$ *и таких функций* u, u_0, u_1, *что существуют свертки*:

$$U_2(x,t) := \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\left\{\frac{\partial|\nabla\widetilde{u}(y,\tau)|^q}{\partial\tau}\right\}dy\,d\tau \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.17}$$

$$V(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_1(y)\,dy \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.18}$$

$$W(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta u_0(y)\,dy \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.19}$$

справедливо следующее представление в виде суммы трех потенциалов:

$$\widetilde{u}(x,t) = U_2(x,t)+V(x,t)+W(x,t) \quad \textit{для почти всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(-\infty,T), \tag{5.20}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$— *фундаментальное решение оператора* $\mathfrak{M}_{x,t}$, *определенное равенством* (3.12).

Теорема 4. *Пусть* u — *слабое решение задачи Коши* (5.5) *в смысле определения* 5. *Тогда в классе* $|\nabla u|^q \in$ $\in C^{(0,2)}_{x,t}\left(\mathbb{R}^N\times[0,T]\right)$ *и таких функций* u, u_0, u_1, *что существуют свертки*:

$$U_3(x,t) := -\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\left\{\frac{\partial^2|\nabla\widetilde{u}(y,\tau)|^q}{\partial\tau^2}\right\}dy\,d\tau \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.21}$$

$$V(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_1(y)\,dy \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.22}$$

$$W(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta u_0(y)\,dy \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\times(-\infty,T)\right), \tag{5.23}$$

справедливо следующее представление в виде суммы трех потенциалов:

$$\widetilde{u}(x,t) = U_3(x,t)+V(x,t)+W(x,t) \ \textit{ для п.в. } (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(-\infty,T), \tag{5.24}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ — *фундаментальное решение оператора* $\mathfrak{M}_{x,t}$, *определенное равенством* (3.1).

6. СВОЙСТВА ОБЪЕМНОГО И ПОВЕРХНОСТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Введем следующее обозначение:

$$G_\beta(x,y,t) := \frac{(1+|x|^2)^{1/2}}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}\mathscr{E}(x-y,t), \tag{6.1}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ — фундаментальное решение, определенное формулой (3.12).

Рассмотрим следующие объемный и поверхностные потенциалы, играющие важную роль при исследовании локальной во времени разрешимости поставленных в предыдущем разделе задач Коши:

$$U(x,t) := U[\rho](x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{6.2}$$

$$V(x,t) := V[\mu](x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,y,t-\tau)\mu(y)\,dy, \tag{6.3}$$

$$W(x,t) := W[\sigma](x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial G_\beta(x,y,t)}{\partial t}\sigma(y)\,dy. \tag{6.4}$$

Справедлива (см. теорема 8.1 работы [2]) следующая основная

Теорема 5. *Если* $\rho \in C([0,T];C_b(\mathbb{R}^N))$*, то при условии* $\beta > N$ *объемный потенциал* U *принадлежит классу* $C^{(2)}([0,T];C_b^{0,1}((1+|x|^2)^{1/2};\mathbb{R}^N))$.

Теорема 6. *Справедливы следующие оценки:*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial^k G_\beta(x,y,t)}{\partial t^k}\right| dy = B_2(\beta,T) < +\infty, \tag{6.5}$$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} \left(1+|x|^2\right)^{1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial^{k+1} G_\beta(x,y,t)}{\partial t^k \partial x_j}\right| dy = B_3(\beta,T) < +\infty, \quad j=\overline{1,N}, \tag{6.6}$$

при $\beta > N$ *и* $k = 0,1,2,3$.

Рассмотрим теперь объемные потенциалы:

$$U_0^{(1)}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial G_\beta(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{6.7}$$

$$U_0^{(2)}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 G_\beta(x,y,t-\tau)}{\partial t^2}\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau. \tag{6.8}$$

Справедливо (см. теорема 8.2 работы [2]) следующее утверждение.

Теорема 7. *Если* $\beta > N$ *и* $\rho \in C\left([0,T];C_b\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$*, то*

$$U_0^{(1)} \in C^{(1)}\left([0,T];C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right)\right), \tag{6.9}$$

$$U_0^{(2)} \in C\left([0,T];C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right)\right). \tag{6.10}$$

Справедлива (см. теорема 8.3 работы [2])

Теорема 8. *Пусть* $\mu,\sigma \in C_b\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и* $\beta > N$*. Тогда для произвольного* $T > 0$ *поверхностные потенциалы*:

$$V, W \in C^{(2)}\left([0,T];C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2};\mathbb{R}^N\right)\right).$$

Рассмотрим объемный и поверхностные потенциалы (без веса) следующего вида:

$$U^1(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho_1(y,\tau)\,dy\,d\tau, \tag{6.11}$$

$$V^1(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t)\mu_1(y)\,dy, \tag{6.12}$$

$$W^1(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\sigma_1(y)\,dy, \tag{6.13}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ — фундаментальное решение, определенное равенством (3.12). Справедлива следующая теорема о гладкости этих потенциалов (см. теорема 8.4 работы [2]):

Теорема 9. *Если* $\rho_1 \in C\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ *и*

$$\mu_1, \sigma_1 \in C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right),$$

то при $\beta > N$ *имеем*

$$U^1 \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right), \tag{6.14}$$

$$V^1, W^1 \in C^{(2)}\left([0,T_1]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) \tag{6.15}$$

для любого $T_1 > 0$.

Справедлива (см. теорема 8.4 работы [2])

Лемма 4. *Пусть* $\rho_1 \in C\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ *при* $\beta > N$. *Тогда справедливо равенство*:

$$\left\langle \mathfrak{M}_{x,t}\left[U^1\right](x,t), \phi(x)\right\rangle = \left\langle \rho_1(x,t), \phi(x)\right\rangle \quad \text{для всех } t \in [0,T] \tag{6.16}$$

и для всех $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *где* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— скобки двойственности между* $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и* $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, *оператор* $\mathfrak{M}_{x,t}$ *определен равенством*:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) := \Delta_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{j\in I_N} \omega_j^2 w_{x_j x_j}(x,t), \tag{6.17}$$

в котором производные по координатам понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Кроме того,*

$$U^1(x,0) = \frac{\partial U^1}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.18}$$

Аналогичным образом доказывается (см. теорема 8.4 работы [2])

Лемма 5. *Пусть* $\mu_1, \sigma_1 \in C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right)$ *при* $\beta > N$. *Тогда справедливы следующие равенства*:

$$\left\langle \mathfrak{M}_{x,t}\left[V^1\right](x,t), \phi(x)\right\rangle = 0, \quad \left\langle \mathfrak{M}_{x,t}\left[W^1\right](x,t), \phi(x)\right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,+\infty) \tag{6.19}$$

и для всех $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *а оператор* $\mathfrak{M}_{x,t}$ *определен равенством* (6.17).

Справедлива

Лемма 6. *Пусть* $u_0, u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right)$ *при* $\beta > N$. *Тогда справедливы следующие равенства*:

$$W^1\left[\Delta u_0\right](x,0) = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta u_0(y)}{S_N(N-2)|x-y|^{N-2}}dy = u_0(x), \tag{6.20}$$

$$\frac{\partial V^1\left[\Delta u_1\right]}{\partial t}(x,0) = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Delta u_1(y)}{S_N(N-2)|x-y|^{N-2}}dy = u_1(x) \tag{6.21}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^N$. *Кроме того, для всех* $\mu_1, \sigma_1 \in C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right)$ *при* $\beta > N$ *справедливы следующие равенства:*

$$V^1\left[\mu_1\right](x,0) = 0, \quad \frac{\partial W^1\left[\sigma_1\right]}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.22}$$

Введем обозначение:

$$L(x,t) := U^1\left[\rho_1\right](x,t) + V^1\left[\Delta u_1\right](x,t) + W^1\left[\Delta u_0\right](x,t). \tag{6.23}$$

Из теоремы 9 и лемм 4–6 вытекает

Теорема 10. *Пусть* $\rho_1 \in C\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$,

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_1/2}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta_2/2}; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\beta > N, \beta_1 > N$ *и* $\beta_2 > N$. *Тогда имеем*

$$L \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) \tag{6.24}$$

и справедливо равенство

$$\left\langle \mathfrak{M}_{x,t}[L](x,t), \phi(x)\right\rangle = \left\langle \rho_1(x,t), \phi(x)\right\rangle \quad \text{для всех } t \in [0,T] \tag{6.25}$$

и для любых $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *где* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *- скобки двойственности между* $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и* $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, *а оператор* $\mathfrak{M}_{x,t}$ *определен равенством*:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[w](x,t) := \Delta_x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \sum_{j\in I_N} \omega_j^2 w_{x_j x_j}(x,t), \tag{6.26}$$

в котором производные по координатам понимаются в смысле обобщенных функций из $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$. *Кроме того, выполнены следующие начальные условия*:

$$L(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial L}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.27}$$

7. ЗАДАЧА КОШИ (5.1): СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|\nabla u(y,\tau)|^q\, dy\, d\tau + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta u_0(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_1(y)\, dy. \tag{7.1}$$

Перейдем в этом интегральном уравнении к новой функции:

$$v(x,t) = \left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2} u(x,t) \tag{7.2}$$

и учтем следующее равенство в классе дифференцируемых функций:

$$\begin{gathered}|\nabla u(x,t)|^q = \left|\nabla \frac{v(x,t)}{\left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2}}\right|^q = \left|\frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2}}\nabla v(x,t) - -(N-2)\frac{x}{\left(1+|x|^2\right)^{(N-1)/2}} v(x,t)\right|^q = \\ = \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^{q(N-1)/2}}\left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v(x,t) - -(N-2)\frac{x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}} v(x,t)\right|^q.\end{gathered} \tag{7.3}$$

После подстановки выражений (7.2) и (7.3) в интегральное уравнение (7.1) получим следующее интегральное уравнение относительно новой функции v :

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G_q(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)\, dy\, d\tau + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial G_\alpha(x,y,t)}{\partial t}\mu_\alpha(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,y,t)\sigma_\beta(y)\, dy, \tag{7.4}$$

$$G_\gamma(x,y,t) := \frac{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\gamma}}\mathscr{E}(x-y,t), \quad \gamma := (N-1)q/2,$$

$$\rho(x,t) := -\left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v(x,t) - \frac{(N-2)x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}v(x,t)\right|^q,$$

$$\mu_\alpha(x) := \left(1+|x|^2\right)^\alpha \Delta u_0(x), \quad \sigma_\beta(x) := \left(1+|x|^2\right)^\beta \Delta u_1(x).$$

Справедлива

Лемма 7. *Если* $q > 1$ *и* $v_1, v_2 \in C\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *то функция* ρ *принадлежит классу* $C\left([0,T]; C_b\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ *и справедлива оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\rho^1(x,t)-\rho^2(x,t)\right|_0 \leqslant q\max\left\{\|v_1\|_{0,T}^{q-1}, \|v_2\|_{0,T}^{q-1}\right\}\|v_1-v_2\|_{0,T}, \tag{7.5}$$

$$\rho^k(x,t) := \left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v_k(x,t) - \frac{(N-2)x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}v_k(x,t)\right|^q, \quad k=1,2, \tag{7.6}$$

$$\|v_k\|_{0,T} := \sup_{t\in[0,T]}|v_k(x,t)|_1. \tag{7.7}$$

Справедлива (см. лемму 9.2 работы [2])

Лемма 8. *Если* $q > N/(N-1)$, $N \geqslant 3$ *и*

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^\alpha; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^\beta; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, *то найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, *что для каждого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение* v *интегрального уравнения* (7.4) *в классе* $C\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае выполнено предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0}\|v\|_{0,T} = +\infty. \tag{7.8}$$

Из этой леммы вытекает следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (7.1):

Лемма 9. *Если* $q > N/(N-1)$, $N \geqslant 3$ *и*

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^\alpha; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^\beta; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, *то найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, *что для каждого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение* u *интегрального уравнения* (7.4) *в классе* $C\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *в последнем случае выполнено следующее предельное свойство*:

$$\lim_{T\uparrow T_0}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2}u(x,t)\right\|_{0,T} = +\infty. \tag{7.9}$$

Кроме того, при $q > N/(N-1)$ *имеем*

$$\rho_1(x,t) = -|\nabla u(x,t)|^q \in C\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{q(N-1)/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) \tag{7.10}$$

для каждого $T \in (0, T_0)$.

Из теоремы 10 вытекает

Теорема 11. *Если* $q > N/(N-1)$, $N \geqslant 3$ *и*

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^\alpha; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^\beta; \mathbb{R}^N\right) \tag{7.11}$$

при $\alpha > N/2$ *и* $\beta > N/2$, *то существует единственное слабое локальное во времени решение* u *задачи Коши* (5.1) *в смысле определения* 1 *в классе* $C\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *которое для каждого* $T \in (0, T_0)$ *принадлежит классу*:

$$u \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) \tag{7.12}$$

и удовлетворяет начальным условиям:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \textit{для всех } x \in \mathbb{R}^N, \tag{7.13}$$

а момент времени $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ *определен в лемме* 9.

Теперь задача заключается в том, чтобы доказать отсутствие локальных во времени слабых решений задачи Коши (5.1) в смысле определения 1 при $q \in (1, N/(N-1)]$. Прежде всего заметим, что имеет место (см. лемму 9.4 работы [2])

Лемма 10. *Если* u *— слабое локальное во времени решение задачи Коши* (5.1) *в смысле определения* 1, *то равенство из определения* 1 *справедливо для любой функции* $\phi = \phi_1\phi_2$, *где* $\phi_1 \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и* $\phi_2 \in C_0^{(2)}[0,T]$.

Определение 7. Будем говорить, что пара функций $u_0, u_1 \in W_q^1(\mathbb{R}^N)$ принадлежит классу начальных функций M^1 (обозначение $(u_0, u_1) \in M^1$), если найдется такой шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^N$ положительного радиуса, что

$$\left(\Delta u_0(x)\right)^2 + \left(\Delta u_1(x)\right)^2 > 0 \tag{7.14}$$

на множестве из $O(x_0, R_0)$ положительной меры Лебега.

Теорема 12. *Если* $1 < q \leqslant N/(N-1)$, *то в классе начальных функций* $(u_0, u_1) \in M^1$ *локальное во времени слабое решение задачи Коши* (5.1) *в смысле определения* 1 *отсутствует для любого* $T > 0$.

Доказательство. Пусть u — локальное во времени слабое решение задачи Коши (5.1) в смысле определения 1 для некоторого $T > 0$. С учетом леммы 10 в качестве пробной функции ϕ в равенстве из определения 1 возьмем произведение:

$$\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t), \tag{7.15}$$

где

$$\phi_1(x) = \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } s \geqslant 2, \end{cases}$$

причем функция $\phi_0 \in C_0^\infty[0, +\infty)$ монотонно невозрастающая, а функция ϕ_2 имеет следующий явный вид:

$$\phi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \in C_0^{(2)}[0,T] \quad \lambda > 2q', \quad q' = \frac{q}{q-1}. \tag{7.16}$$

Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u(x,t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2}\right) dx\,dt \right| \leqslant I^{1/q} c_1(R,T), \tag{7.17}$$

$$\left| \sum_{j \in I_N} \omega_j^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_{x_j}(x,t)\phi_{x_j}(x,t)\,dx\,dt \right| \leqslant \sum_{j \in I_N} \omega_j^2 c_{2j}(R,T) I^{1/q}, \tag{7.18}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\right) dx \right| \leqslant c_3(R)\, |||\nabla u_1|||_q\,, \tag{7.19}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x)\right) dx \right| \leqslant \frac{\lambda}{T} c_3(R)\, |||\nabla u_0|||_q\,, \tag{7.20}$$

где введены обозначения:

$$c_1(R,T) := \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\nabla \dfrac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2}\right|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\,dx\,dt \right)^{1/q'} = c_{11}(T) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\nabla\phi_1(x)\right|^{q'}}{\phi_1^{q'/q}(x)}\,dx \right)^{1/q'} = c_{11}(T) c_{10} R^{(N-q')/q'}, \tag{7.21}$$

$$c_{2j}(R,T) := \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\phi_{x_j}(x,t)\right|^{q'}}{\phi(x,t)^{q'/q}}\,dx\,dt \right)^{1/q'} \leqslant \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\phi(x,t)|^{q'}}{\phi(x,t)^{q'/q}}\,dx\,dt \right)^{1/q'} = c_{20}(T) R^{(N-q')/q'}, \tag{7.22}$$

$$c_3(R) := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\phi_1(x)\right|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} = c_{30} R^{(N-q')/q'}, \tag{7.23}$$

$$I := \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \phi(x,t) |\nabla u(x,t)|^q \, dx\, dt. \tag{7.24}$$

Воспользуемся оценками (7.17)—(7.23); с учетом обозначения (7.24) из равенства (??) получим неравенство:

$$R^{(N-q')/q'} \left(c_{11}(T)c_{10} + N\omega^2 c_{20}(T)\right) I^{1/q} + R^{(N-q')/q'} \left(c_{30} \,|||\nabla u_1|||_q + c_{30} \frac{\lambda}{T} \,|||\nabla u_0|||_q \right) \geqslant I, \quad \omega^2 := \max_j \left\{\omega_j^2\right\}. \tag{7.25}$$

Используя арифметическое неравенство Гёльдера:

$$a^{1/q'} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{q'} + \frac{b}{q}, \quad a, b \geqslant 0, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

из неравенства (7.25) получим

$$R^{N-q'} \left(c_{11}(T)c_{10} + 3\omega^2 c_{20}(T)\right)^{q'} + q' R^{(N-q')/q'} \left(c_{30} \,|||\nabla u_1|||_q + c_{30} \frac{\lambda}{T} \,|||\nabla u_0|||_q \right) \geqslant I. \tag{7.26}$$

Рассмотрим случай, когда $1 < q$ и $q' \leqslant N$. В этом случае имеем

$$1 < q \leqslant \frac{N}{N-1}. \tag{7.27}$$

Теперь нужно отдельно рассмотреть случай $1 < q < N/(N-1)$ и критический случай $q = N/(N-1)$. В целом рассуждения повторяют соответствующие рассуждения из [2]. В частности, используя классическую теорему Беппо Леви, в случае $1 < q < N/(N-1)$ в пределе при $R \to +\infty$ из неравенства (7.26) получим равенство:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda} |\nabla u(x,t)|^q \, dx\, dt = 0. \tag{7.28}$$

Это же равенство получается и в критическом случае $q = N/(N-1)$. Из (7.28) вытекает, что

$$u(x,t) = F(t) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]. \tag{7.29}$$

Из равенства определения 1 и (7.29) получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x) \right) - \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x) \right) \right] dx = 0 \tag{7.30}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, где $\phi_2(t)$ определена равенством (7.16), а $\phi_1 \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Поскольку $(u_0, u_1) \in M^1$, то из равенства (7.30) получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\lambda}{T} \Delta u_0(x) + \Delta u_1(x) \right] \phi_1(x)\, dx = 0 \tag{7.31}$$

для любой функции $\phi_1 \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ с носителем $\operatorname{supp}\phi_1 \subset O(x_0, R_0)$. В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к равенству:

$$\frac{\lambda}{T} \Delta u_0(x) + \Delta u_1(x) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R_0). \tag{7.32}$$

Отметим, что если $u(x,t)$ — слабое решение задачи Коши для некоторого $T = T_1 > 0$, то оно же является слабым решением и для любого $T \in (0, T_1]$, но тогда равенство (7.32) должно быть выполнено и для всех $T \in (0, T_1]$. Следовательно,

$$\Delta u_0(x) = 0, \quad \Delta u_1(x) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in O(x_0, R_0), \tag{7.33}$$

что противоречит определению класса функций M^1. Теорема доказана.

Теперь наша задача доказать, что в некотором классе N^1 начальных функций $u_0(x), u_1(x)$ при $q > N/(N-1)$ локальное во времени слабое решение задачи Коши (5.1) в смысле определения 1 разрушается за конечное время $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, определенное в лемме 9. Дадим определение.

Определение 8. Будем говорить, что начальные функции u_0, u_1 принадлежат классу N^1 (обозначение $(u_0, u_1) \in N^1$), если найдется такая неотрицательная пробная функция $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty)\right)$, что конечна нелинейная емкость:

$$E_1(\phi) := \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\nabla \dfrac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}\right|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\,dx\,dt + \sum_{j\in I_N}\omega_j^2 \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\phi_{x_j}(x,t)\right|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}\,dx\,dt < +\infty \tag{7.34}$$

и при этом выполнено неравенство

$$\frac{1}{q'}\left(\frac{2}{q}\right)^{q'/q} E_1(\phi) + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x)\right) - \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\right)\right]dx < 0. \tag{7.35}$$

Заметим, что в работе [14] доказано существование такой пробной функции, что нелинейная емкость (7.34) конечна. Фиксируем эту пробную функцию $\phi(x,t)$. Пусть выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x)\right) - \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\right)\right]dx < 0. \tag{7.36}$$

Если вместо начальных функций u_0 и u_1 рассмотреть функции ru_0 и ru_1 при $r > 0$, то при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство (7.35). Пусть теперь выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x)\right) - \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\right)\right]dx > 0. \tag{7.37}$$

Если вместо начальных функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ рассмотреть функции $ru_0(x)$ и $ru_1(x)$ при $r < 0$, то при достаточно большом $r < 0$ будет выполнено неравенство (7.35). Таким образом, определение 8 корректно.

Справедлива

Теорема 13. *Если $q > N/(N-1)$ и $(u_0, u_1) \in N^1$, то существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши* (5.1) *в смысле определения* 1 *в классе* $C\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ *для всех* $T \in (0, T_0)$ *класса гладкости* $C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем* $0 < T_0 < +\infty$ *и слабое решение разрушается в момент времени* T_0 *в следующем смысле*:

$$\lim_{T\uparrow T_0}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2} u(x,t)\right\|_{0,T} = +\infty. \tag{7.38}$$

Доказательство. Предположим, что $T_0 = +\infty$, где T_0 определено в лемме 9. Тогда точно так же, как при доказательстве теоремы 11, можно убедиться, что для любого $T > 0$ существует единственное в классе

$$C\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$$

слабое глобальное во времени решение u задачи Коши (5.1) в смысле определения 4 класса гладкости $C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ для любого $T > 0$. Докажем, что для начальных функций $(u_0, u_1) \in N^1$ мы получим противоречивое неравенство. Действительно, используя неравенство Гёльдера и трехпараметрическое неравенство Юнга:

$$ab \leqslant \varepsilon a^q + \frac{1}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}}, \quad a, b \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \tag{7.39}$$

из равенства определения 4 можно получить (стандартной техникой работы [14]) следующую оценку:

$$\frac{1}{q'}\frac{1}{(\varepsilon q)^{q'/q}} E_1(\phi) + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x)\right) - \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\right)\right]dx \geqslant (1-2\varepsilon)\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi(x,t)|\nabla u(x,t)|^q\,dx\,dt \tag{7.40}$$

для любой функции $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty)\right)$. Положим $\varepsilon = 1/2$ в неравенстве (7.40). Тогда получим:

$$\frac{1}{q'}\left(\frac{2}{q}\right)^{q'/q} E_1(\phi) + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x)\right) - \left(\nabla\phi(x,0), \nabla u_1(x)\right)\right] dx \geqslant 0 \tag{7.41}$$

для любой неотрицательной функции $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty)\right)$. Поскольку $(u_0, u_1) \in N^1$, то найдется такая неотрицательная пробная функция ϕ, что будет выполнено неравенство (7.35), которое входит в противоречие с неравенством (7.41). Таким образом, доказано, что время T_0 из леммы 9 конечно. Но тогда выполнено неравенство (7.10). Разрушение локального во времени слабого решения задачи Коши (5.1) в смысле определения 1 доказано. Теорема доказана.

8. ЗАДАЧА КОШИ (5.3): СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим следующее вспомогательное интегральное уравнение:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y, t-\tau)\frac{\partial|\nabla u(y,\tau)|^q}{\partial\tau}\,dy\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta u_0(y)\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathscr{E}(x-y,t)\Delta u_1(y)\,dy. \tag{8.1}$$

Перейдя в уравнении (8.1) к новой функции (7.2), получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} v(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_q(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial G_\alpha(x,y,t)}{\partial t}\mu_\alpha(y)\,dy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,y,t)\sigma_\beta(y)\,dy := U(x,t) + W(x,t) + V(x,t), \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$G_\gamma(x,y,t) := \frac{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\gamma}}\mathscr{E}(x-y,t), \tag{8.3}$$

$$\rho(x,t) := \frac{\partial}{\partial t}\left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v(x,t) - \frac{(N-2)x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}v(x,t)\right|^q, \tag{8.4}$$

$$\mu_\alpha(x) := \left(1+|x|^2\right)^{\alpha}\Delta u_0(x), \quad \sigma_\beta(x) := \left(1+|x|^2\right)^{\beta}\Delta u_1(x). \tag{8.5}$$

Лемма 11. *Если* $q \geqslant 2$ *и* $v \in C^{(1)}\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *то функция* ρ *принадлежит классу* $C\left([0,T]; C_b\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем для любых* $v_k(x,t) \in C^{(1)}\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ *при* $k = 1,2$ *справедливо следующее неравенство*:

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)\right|_0 \leqslant d(q)\max\left\{\|v_1\|_{1,T}^{q-1}, \|v_2\|_{1,T}^{q-1}\right\}\|v_1 - v_2\|_{1,T}, \tag{8.6}$$

$$\rho_k(x,t) := \frac{\partial}{\partial t}\left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v_k(x,t) - \frac{(N-2)x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}v_k(x,t)\right|^q, \quad k = 1,2, \tag{8.7}$$

$$\|v\|_{1,T} := \|v\|_{0,T} + \left\|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right\|_{0,T}, \quad \|w\|_{0,T} := \sup_{t\in[0,T]}|w(x,t)|_1. \tag{8.8}$$

Относительно разрешимости интегрального уравнения (8.2) справедлива (см. лемма 10.1 работы [2])

Лемма 12. *Если* $q \geqslant 2$,

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\alpha}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta}; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, *то найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, *что для каждого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение* v *интегрального уравнения* (8.2) *в классе* $C^{(1)}\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае выполнено предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \|v\|_{1,T} = +\infty. \tag{8.9}$$

Из леммы 12 вытекает следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (8.1) (см. лемма 10.2 работы [2]):

Лемма 13. *Если* $q \geqslant 2$,

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\alpha}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta}; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, *то найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, *что для каждого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение* u *интегрального уравнения* (8.1) *в классе* $C^{(1)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в этом последнем случае выполнено предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \left\| \left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2} u(x,t) \right\|_{1,T} = +\infty. \tag{8.10}$$

Из леммы 12 вытекает, что

$$|\nabla u|^q \in C^{(1)}\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{(N-1)q/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) \subset C_{x,t}^{(0,1)}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T]\right), \tag{8.11}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^q \in C\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{(N-1)q/2}; \mathbb{R}^N\right)\right). \tag{8.12}$$

Справедлива (см. теорема 10.1 работы [2]) следующая

Теорема 14. *Если* $q \geqslant 2$,

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\alpha}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta}; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\alpha > N/2$ *и* $\beta > N/2$, *то существует единственное слабое локальное во времени решение* u *задачи Коши* (5.3) *в смысле определения* 4 *в классе* $C^{(1)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *которое для каждого* $T \in (0, T_0)$ *принадлежит классу* $u \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ *и удовлетворяет начальным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^N, \tag{8.13}$$

а момент времени $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$ *определен в лемме* 13.

Лемма 14. *Если* u *— слабое локальное во времени решение задачи Коши* (5.3) *в смысле определения* 4, *то соответствующее равенство справедливо для любой функции* $\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, *где* $\phi_1 \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *и* $\phi_2 \in C_0^{(2)}[0,T]$.

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 10.

Определение 9. Будем говорить, что функции u_0 и u_1 принадлежат классу начальных функций M^2 (обозначение $(u_0, u_1) \in M^2$), если $u_0, u_1 \in W_q^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, $|\nabla u_0(x)| = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$ и найдется такой шар $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^N$ положительного радиуса, что $(\Delta u_1(x))^2 > 0$ на множестве из $O(x_0, R_0)$ положительной меры Лебега.

Теорема 15. *Если* $1 < q \leqslant N/(N-1)$ *и* $(u_0, u_1) \in M^2$, *то локальное во времени слабое решение задачи Коши* (5.3), *в смысле определения* 3 *отсутствует для любого* $T > 0$.

Доказательство. Шаг 1. Вывод априорной оценки. Пусть u — слабое решение задачи Коши (5.3) в смысле определения 3 при некотором $T > 0$. В равенстве определения 3 в качестве пробной функции ϕ возьмем функцию, определенную равенствами (7.15)–(7.16), где $\lambda > q'$. Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u(x,t), \nabla \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2}\right) dx\, dt \right| \leqslant b_1(R,T) I^{1/q}, \tag{8.14}$$

$$\left| \sum_{j \in I_N} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \omega_j^2 u_{x_j}(x,t) \phi_{x_j}(x,t)\, dx\, dt \right| \leqslant \sum_{j \in I_N} \omega_j^2 b_{2j}(R,T) I^{1/q}, \tag{8.15}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0),\nabla u_0(x)\right)\,dx\right| \leqslant \frac{\lambda}{T}b_3(R)\,|||\nabla u_0|||_q = \frac{\lambda}{T}b_{30}R^{(N-q')/q'}\,|||\nabla u_0|||_q\,, \tag{8.16}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla\phi(x,0),\nabla u_1(x)\right)\,dx\right| \leqslant b_3(R)\,|||\nabla u_1|||_q = b_{30}R^{(N-q')/q'}\,|||\nabla u_1|||_q\,, \tag{8.17}$$

$$b_1(R,T) := \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|\nabla\dfrac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}\right|^{q'}}{\left(-\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\right)^{q'/q}}\,dx\,dt\right)^{1/q'} = b_{10}(T)R^{(N-q')/q'}, \tag{8.18}$$

$$b_{2j}(R,T) := \left(\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|\phi_{x_j}(x,t)\right|^{q'}}{\left(-\dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\right)^{q'/q}}\,dx\,dt\right)^{1/q'} = b_{20j}(T)R^{(N-q')/q'}, \tag{8.19}$$

$$I := \int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\right)|\nabla u(x,t)|^q\,dx\,dt. \tag{8.20}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $1 < q$ и $q' \geqslant N$. Это равносильно неравенствам $1 < q \leqslant N/(N-1)$. Из равенства определения 3 с учетом оценок (8.14)–(8.20) получим оценку

$$\begin{gathered} b_{10}(T)R^{(N-q')/q'}I^{1/q} + \sum_{j\in I_N}\omega_j^2 b_{20j}(T)R^{(N-q')/q'}I^{1/q} + \\ + \left(\frac{\lambda}{T}b_{30}\,|||\nabla u_0|||_q + |||\nabla u_1|||_q\right)R^{(N-q')/q'} + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi_1(x)\,|\nabla u_0(x)|^q\,dx \geqslant I. \end{gathered} \tag{8.21}$$

Теперь воспользуемся трехпараметрическим неравенством Юнга при $\varepsilon \in (0,1/2)$ и получим из (8.21) следующее неравенство:

$$\begin{gathered} R^{N-q'}c_1(\varepsilon)\left(b_{10}^{q'}(T) + \left(\sum_{j\in I_N}\omega_j^2 b_{20j}(T)\right)^{q'}\right) + \left(\frac{\lambda}{T}b_{30}\,|||\nabla u_0|||_q + |||\nabla u_1|||_q\right)R^{(N-q')/q'} + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\phi_1(x)\,|\nabla u_0(x)|^q\,dx \geqslant (1-2\varepsilon)I, \quad c_1(\varepsilon) := \frac{1}{q'}\frac{1}{(q\varepsilon)^{q'/q}}. \end{gathered} \tag{8.22}$$

Отдельно необходимо (как и ранее) рассмотреть случай $1 < q < N/(N-1)$ и критический случай $q = N/(N-1)$. Например, в случае $1 < q < N/(N-1)$ можно воспользоваться теоремой Беппо Леви и в итоге в пределе при $R \to +\infty$ из неравенства (8.22) получить следующую априорную оценку:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_0(x)|^q\,dx \geqslant \frac{\lambda}{T}(1-2\varepsilon)\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}|\nabla u(x,t)|^q\,dx\,dt, \quad \varepsilon \in (0,1/2). \tag{8.23}$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ из (8.23) вытекает искомая априорная оценка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_0(x)|^q\,dx \geqslant \frac{\lambda}{T}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}|\nabla u(x,t)|^q\,dx\,dt, \quad \lambda > q'. \tag{8.24}$$

Шаг 2. Отсутствие локальных решений. Поскольку $(u_0,u_1) \in M^2$, то из (8.24) следует, что

$$u(x,t) = F(t) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]. \tag{8.25}$$

После подстановки этого равенства в определение 3 получим равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x) \right) - \big(\nabla \phi(x,0), \nabla u_1(x) \big) \right] dx = 0, \tag{8.26}$$

справедливое для всех $T > 0$ и для всех функций $\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$, определенных равенствами (7.15)–(7.16). Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 12. Получаем противоречие с тем фактом, что $(u_0, u_1) \in M^2$. Теорема доказана.

Теперь докажем, что при $q \geqslant 2$ в некотором классе начальных функций единственное слабое решение задачи Коши (5.3) в смысле определения 3 разрушается за конечное время.

Определение 10. Будем говорить, что начальные функции u_0, u_1 принадлежат классу N^2 (обозначение $(u_0, u_1) \in N^2$), если найдется такая пробная функция $\phi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty)\right)$, что $\phi_t \leqslant 0$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$, конечна нелинейная емкость:

$$E_2(\phi) := \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left| \nabla \dfrac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \right|^{q'}}{\left(-\dfrac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \right)^{q'/q}} \, dx\, dt + \sum_{j \in I_N} \omega_j^2 \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\left| \phi_{x_j}(x,t) \right|^{q'}}{\left(-\dfrac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \right)^{q'/q}} \, dx\, dt < +\infty \tag{8.27}$$

и при этом выполнено неравенство

$$\frac{1}{q'} \left(\frac{2}{q} \right)^{q'/q} E_2(\phi) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0), \nabla u_0(x) \right) - \big(\nabla \phi(x,0), \nabla u_1(x) \big) - \phi(x,0) \, |\nabla u_0(x)|^q \right] dx < 0. \tag{8.28}$$

Такая пробная функция ϕ, что конечна емкость (8.27) существует; это доказано в [14]. Фиксируем эту пробную функцию. Если вместо $u_1(x)$ рассмотреть функцию $ru_1(x)$, то за счет большой величины $|r| > 0$ при некоторой фиксированной функции $u_0(x)$ можно добиться выполнения неравенства (8.28).

Справедлива

Теорема 16. *Если $q \geqslant 2$ и $(u_0, u_1) \in N^2$, то существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши* (5.3) *в смысле определения* 3 *в классе $C^{(1)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$ для всех $T \in (0, T_0)$ класса гладкости $C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N)\right)$, причем $0 < T_0 < +\infty$ и слабое решение разрушается в момент времени T_0 в следующем смысле:*

$$\lim_{T \uparrow T_0} \left\| \left(1 + |x|^2\right)^{(N-2)/2} u \right\|_{1,T} = +\infty. \tag{8.29}$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 9 и основано на применении к слагаемым равенства из определения 4 глобального во времени слабого решения задачи Коши (5.3).

9. ЗАДАЧА КОШИ (5.5): СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ВО ВРЕМЕНИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение:

$$u(x,t) = -\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) \frac{\partial^2 |\nabla u(y,\tau)|^q}{\partial \tau^2} \, dy\, d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} \Delta u_0(y)\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta u_1(y)\, dy. \tag{9.1}$$

Перейдя в уравнении (9.1) к новой функции (7.2), получим интегральное уравнение:

$$\begin{gathered} v(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_q(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)\, dy\, d\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial G_\alpha(x,y,t)}{\partial t} \mu_\alpha(y)\, dy + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,y,t)\sigma_\beta(y)\, dy := U(x,t) + W(x,t) + V(x,t), \end{gathered} \tag{9.2}$$

$$G_\gamma(x,y,t) := \frac{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}}{\left(1+|y|^2\right)^{\gamma}} \mathscr{E}(x-y,t), \tag{9.3}$$

$$\rho(x,t) := -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v(x,t) - \frac{(N-2)x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}} v(x,t)\right|^q, \tag{9.4}$$

$$\mu_\alpha(x) := \left(1+|x|^2\right)^{\alpha}\Delta u_0(x), \quad \sigma_\beta(x) := \left(1+|x|^2\right)^{\beta}\Delta u_1(x). \tag{9.5}$$

Справедлива следующая (см. лемма 11.1 работы [2])

Лемма 15. *Если* $q = 2$, $v \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right)$, *то функция* ρ *принадлежит классу* $C\left([0,T]; C_b\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, *причем для любых*

$$v_k \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{0,1}(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right), \quad k = 1,2,$$

справедливо неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)\right|_0 \leqslant 6\max\left\{\|v_1\|_{2,T}, \|v_2\|_{2,T}\right\}\|v_1 - v_2\|_{2,T}, \tag{9.6}$$

$$\rho_k(x,t) := -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left|\left(1+|x|^2\right)^{1/2}\nabla v_k(x,t) - \frac{(N-2)x}{\left(1+|x|^2\right)^{1/2}} v_k(x,t)\right|^2, \tag{9.7}$$

$$\|v\|_{2,T} := \|v\|_{0,T} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{0,T} + \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right\|_{0,T}, \qquad \|w\|_{0,T} := \sup_{t\in[0,T]} |w(x,t)|_1. \tag{9.8}$$

Относительно разрешимости интегрального уравнения (9.2) справедливо следующее утверждение (см. лемму 11.2 работы [2]):

Лемма 16. *Если* $q = 2$, *то для любого* $T > 0$ *найдутся такие малые* $R_1 > 0, R_2 > 0$ *и* $R > 0$, *что для любых функций*

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\alpha}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta}; \mathbb{R}^N\right)$$

при условиях $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, *для которых справедливы неравенства*

$$|u_0|_2 \leqslant R_1, \quad |u_1|_2 \leqslant R_2, \tag{9.9}$$

существует единственное решение v *интегрального уравнения* (9.2) *в шаре*

$$D_{R,T} := \left\{v \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{0,1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) : \|v(x,t)\|_{2,T} \leqslant R\right\}. \tag{9.10}$$

Из леммы 16 вытекает следующее утверждение относительно разрешимости интегрального уравнения (9.1):

Лемма 17. *Если* $q = 2$, *то для любого* $T > 0$ *найдутся такие малые* $R_1 > 0, R_2 > 0$ *и* $R > 0$, *что для любых функций*

$$u_0(x) \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\alpha}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1(x) \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta}; \mathbb{R}^N\right)$$

при $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, *для которых справедливы неравенства*:

$$|u_0|_2 \leqslant R_1, \quad |u_1|_2 \leqslant R_2, \tag{9.11}$$

существует единственное решение u *интегрального уравнения* (9.1) *в шаре*

$$B_{R,T} := \left\{u(x,t) \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) : \left\|\left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2} u\right\|_{2,T} \leqslant R\right\}. \tag{9.12}$$

Из леммы 17 и равенства (7.3) вытекает, что

$$|\nabla u|^2 \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{N-1}; \mathbb{R}^N\right)\right) \subset C_{x,t}^{(0,2)}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T]\right), \tag{9.13}$$

$$\rho_1 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\nabla u(x,t)|^2 \in C\left([0,T]; C_b\left(\left(1+|x|^2\right)^{N-1}; \mathbb{R}^N\right)\right). \tag{9.14}$$

Поэтому из леммы 17, свойств (9.13) и (9.14) и теоремы 4 и леммы 5 вытекает (см. теорему 11.1 работы [2])

Теорема 17. *Если $q = 2$, то для любого $T > 0$ найдутся такие малые $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $R > 0$, что для любых функций*:

$$u_0 \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\alpha}; \mathbb{R}^N\right), \quad u_1(x) \in C_b^{(2)}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\beta}; \mathbb{R}^N\right),$$

при $\alpha > N/2$, $\beta > N/2$, для которых выполнены неравенства:

$$|u_0|_2 \leqslant R_1, \quad |u_1|_2 \leqslant R_2, \tag{9.15}$$

существует единственное слабое локальное во времени решение u задачи Коши (5.5) *в смысле определения* 5 *в классе*

$$C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) \cap B_{R,T},$$

$$B_{R,T} := \left\{ u \in C^{(2)}\left([0,T]; C_b^{N-2,N-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{1/2}; \mathbb{R}^N\right)\right) : \left\| \left(1+|x|^2\right)^{(N-2)/2} u \right\|_{2,T} \leqslant R \right\}, \tag{9.16}$$

причем u удовлетворяет начальным условиям:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \textit{для всех } x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.17}$$

Справедлива (см. лемму 11.5 работы [2])

Лемма 18. *Если $1 < q \leqslant N/(N-1)$ и u — локальное во времени слабое решение задачи Коши* (5.5) *в смысле определения* 5, *с начальными функциями $u_0, u_1 \in W_q^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Тогда справедлива следующая априорная оценка*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\lambda}{T} |\nabla u_0(x)|^q + q\left(\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2}\nabla u_0(x)\right) \right] dx \geqslant \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-2} |\nabla u(x,t)|^q \, dx\, dt, \quad \lambda > 2. \tag{9.18}$$

Справедлива (см. теорему 11.2 работы [2])

Теорема 18. *Если $1 < q \leqslant N/(N-1)$ и $u_0, u_1 \in W_q^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, то при условии*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2}\nabla u_0(x)\right) dx < 0 \tag{9.19}$$

глобальное во времени слабое решение u задачи Коши (5.5) *в смысле определения* 6 *отсутствует. Более того, для времени существования локального во времени слабого решения задачи Коши* (5.5) *в смысле определения* 5 *справедлива следующая оценка*:

$$T \leqslant -\frac{2}{q}\frac{I_1}{I_2}, \quad I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^q \, dx, \quad I_2 := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u_1(x), |\nabla u_0(x)|^{q-2}\nabla u_0(x)\right) dx. \tag{9.20}$$

Если же начальные функции $(u_0, u_1) \in M^2$, то локальные во времени слабые решения задачи Коши (5.5) *в смысле определения* 5 *отсутствуют для любого $T > 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и. матем. физ. 1999. Т. 39. № 6. С. 1006–1022.

2. *Корпусов М. О., Шляпугин Г. И.* О разрушении решений задач Коши для одного класса нелинейных уравнений теории ферритов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обз. 2020. Т. 185. С. 79–131.

3. *Корпусов М. О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.

4. *Корпусов М. О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова—Заболотской // Теор. матем. физ. 2018. Т. 194. № 3. С. 403–417.

5. *Корпусов М. О., Панин А. А., Шишков А. Е.* О критическом показателе «мгновенное разрушение» versus «локальная разрешимость» в задаче Коши для модельного уравнения соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 1. С. 118–153.

6. *Korpusov M. O., Ovchinnikov A. V., Panin A. A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41. № 17. P. 8070–8099.

7. *Загребина С. А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.

8. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. V. 49. № 4. С. 47–74.

9. *Zamyshlyaeva A. A., Sviridyuk G. A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev-type equations of higher order // Вестн. ЮУрГУ. Сер. матем. механ. физ. 2016. V. 8. № 4. С. 5–16.

10. *Капитонов Б. В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109. № 4. С. 607–628.

11. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.

12. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.

13. *Плетнер Ю. Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. V. 32. № 12. С. 1885–1899.

14. *Похожаев С. И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 234. С. 3–383.

15. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // Совр. матем. Фундам. напр. 2017. Т. 63. № 4. С. 573–585.

16. *Galakhov E. I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.

17. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФЕРРИТОВ В $(N+1)$–МЕРНОМ СЛУЧАЕ

M. O. Korpusov[a,*], **V. M. Ozornin**[b,**]

[a] *119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физфак, Россия*
[b] *117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия*
**e-mail: korpusov@gmail.com*

Received: 05.09.2024
Revised: 05.09.2024
Accepted: 05.02.2025

Abstract. В работе рассмотрены три задачи Коши для $(N+1)$–мерных нелинейных уравнений соболевского типа, возникающих в теории магнитных колебаний в ферритах. Получены результаты о существовании и о единственности локальных во времени слабых решений этих задач, а также о разрушении этих решений. Библ. 17.

Keywords: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.