

Гравитационное взаимодействие заряда с космической струной

Ю. В. Грац,^{1,*} П. А. Спирин^{1,†}¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Поступила в редакцию 09.04.2025; после доработки 21.04.2025; подписана в печать 23.04.2025)

Рассматривается гравитационное взаимодействие классической заряженной частицы с бесконечной прямолинейной космической струной с плотностью энергии μ . Струна создает фоновое коническое пространство с малым относительным дефицитом угла $\beta' = 4G\mu$. Геодезическая заряда расположена в плоскости, перпендикулярной струне. Рассеяние описывается лоренц-фактором γ и прицельным параметром b . По теории возмущений в главном по γ порядке вычисляется гравитационное возмущение заряда и струны. Во втором порядке теории возмущений вычисляется полная энергия, излучаемая в виде электромагнитных волн, а также спектрально-угловые и поляризационные характеристики тормозного излучения. Для излучения характерна концентрация в конусе с углом раствора порядка $1/\gamma$, при этом основной вклад в излучение вносят частоты порядка γ/b .

PACS: 11.27.+d, 98.80.Cq, 98.80.-k, 95.30.Sf УДК: 53.02

Ключевые слова: космическая струна, дефицит угла, геодезическая, поляризации, тормозное излучение, концентрация излучения.

DOI: [10.55959/MSU0579-9392.80...](https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.80...)

ВВЕДЕНИЕ

Математически элегантные решения издавна привлекали повышенный интерес физиков — даже если прямое экспериментальное подтверждение таких моделей представляет собой задачу заведомо не ближайшего будущего. К таковым, несомненно, относится космическая струна [1], предложенная как гипотетическое неточечное решение уравнений Эйнштейна. Космические струны могли образоваться во время эволюции ранней Вселенной, причем, их характерные плотность энергии и толщина должны соответствовать энергетическому масштабу соответствующего фазового перехода. Космическая струна создает коническое пространство с дефицитом угла, малым для «наиболее вероятных реальных струн».

К задачам косвенного обнаружения гипотетических космических струн относятся эффекты, возникающие при гравитационном взаимодействии струны с частицами материи [2–5]. В частности, электромагнитные заряды, двигаясь по геодезическим фоновому пространству–времени космической струны, могут излучать электромагнитные волны, которые, в свою очередь, могут составлять часть наблюдаемого реликтового излучения. Мы будем рассматривать случай, когда траектория заряда полностью лежит в плоскости, перпендикулярной струне.

Непертурбативно задача вычисления излучаемой энергии рассматривалась в [2, 3] через вычисле-

ние работы сил гравитационного трения в фоновом пространстве струны. Вычисленное значение изменения энергии интерпретируется как электромагнитное излучение. Однако в искривленном пространстве существует общая концептуальная проблема разбиения энергии заряда на «связанную с зарядом» (соответствующую радиационному трению в плоском пространстве) и «оторвавшуюся от заряда» (соответствующую излученной энергии в плоском пространстве). Более того, итоговая формула при некоторых квантованных (не малых!) значениях дефицита угла предсказывает отсутствие излучения.

С другой стороны, электромагнитное излучение в принципе описывается как волна, распространяющаяся на фоне плоского пространства. В частности, построение векторов поляризации подразумевает именно такой подход. Кроме того, в [6] показывалось, что частица гравитационно влияет на струну, тем самым, деформируя фон. Иными словами, взаимодействие струны с зарядом рассматривается как двухчастичная задача на фоне плоского пространства по теории возмущений. Подобный подход для гравитационного взаимодействия применялся для пары точечных частиц [7–12], системы «частица — гипербрана» [13–16], для взаимодействия космической струны со скалярным зарядом [17] и др. Общим техническим моментом вычисления является наличие локальной и нелокальной амплитуд источников излучения в импульсном представлении, а также их почти полное взаимное сокращение (деструктивная интерференция). Соответственно, космическую струну мы будем рассматривать в формализме Намбу – Гото.

* grats@phys.msu.ru† salotop@list.ru

Ввиду малой толщины ($\sim 10^{-28}$ см) космической струны, «привязанной» к фазовому переходу на энергиях теорий Великого объединения ($\eta_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$ ГэВ), достаточно рассмотреть бесконечно тонкую струну с такой же плотностью энергии на единицу продольного размера. В цилиндрических координатах метрика струны, расположенной вдоль оси x , является статической с элементом длины

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - d\rho^2 - \beta^2 \rho^2 d\varphi^2, \quad (1)$$

где $0 < \beta \leq 1$. Величина $\delta\varphi = 2\pi(1 - \beta)$ задает дефицит угла, а $\beta' = 1 - \beta$ определяет относительный дефицит угла. Для энергии фазового перехода Вселенной η связь с плотностью энергии μ на единицу длины космической струны задается формулами

$$\eta^2 = (1 - \beta^2)/8\pi G, \quad \beta' = 4G\mu.$$

Например, для η_{GUT} относительный дефицит угла имеет оценку $\beta' \sim 10^{-5}$.

Классическое пертурбативное рассмотрение задачи тормозного излучения при рассеянии с прицельным параметром $b > 0$ предполагает дальние пролеты по сравнению с классическим радиусом заряда: $b \gg r_{\text{cl}} = e^2/m$.

Для описания задачи на плоском фоне нам потребуются декартовы координаты. Замена радиальной переменной $\rho \rightarrow r$ в соответствии с $\beta\rho = R_0(r/R_0)^\beta$, где R_0 — произвольный параметр длины, приводит метрику к конформно-евклидовой (на гиперплоскостях, ортогональных к струне) виду:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - e^{-2\beta' \ln(r/R_0)}(dy^2 + dz^2), \quad (2)$$

где $r^2 = y^2 + z^2$. Таким образом, метрика струны как фоновая асимптотически не переходит в метрику Минковского. Более того, линеаризованная метрика

$$\varkappa h_{\mu\nu}(x) = 2\beta' \Sigma_{\mu\nu} \ln \frac{r}{R_0}, \quad \Sigma_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(0, 0, 1, 1) \quad (3)$$

содержит логарифмы, растущие по модулю не только вблизи струны, но и при неограниченном отдалении. Использование таких координат представляет независимый интерес.

Целью работы является:

1. в модели двухчастичной системы «заряд — струна» на фоне пространства Минковского в главном по дефициту угла порядке теории возмущений вычислить полную энергию тормозного электромагнитного излучения, сравнить с [2, 3];
2. вычислить спектрально-угловые и поляризационные характеристики излучения;
3. использовать концепцию локальной и нелокальной амплитуд;
4. исследовать вопрос о влиянии логарифмов (3) на структуру амплитуд излучения и сходимость интегралов.

Используются единицы $\hbar = c = 1$ и сигнатура метрики пространства-времени $+- - -$. Для заряда используется система единиц Хевисайда–Лоренца. Греческие пространственно-временные индексы μ, ν, \dots пробегают значения $0 \dots 3$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заряд e массы m движется по мировой линии $Z^\mu(s)$; $\dot{Z}^2 = 1$. Мировой лист струны \mathcal{V}_2 с внутренними координатами (τ, σ) распространяется в $M_{1,3}$, его геометрия $X^\mu(\tau, \sigma)$ индуцирует метрику γ_{ab} сигнатуры $(+ -)$. Действие для системы «заряд — струна» имеет вид $S = S_{\text{em}} + S_{\text{gr}}$, где

$$S_{\text{em}} = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x - e \int A_\mu \dot{Z}^\mu ds,$$

$$S_{\text{gr}} = -\frac{\mu}{2} \int X_a^\mu X_b^\nu g_{\mu\nu} \gamma^{ab} \sqrt{\tilde{\gamma}} d^2\sigma - m \int \sqrt{\dot{Z}^2} ds - \frac{1}{\varkappa^2} \int R \sqrt{|g|} d^4x.$$

Здесь μ — натяжение струны, $X_a^\mu \equiv \partial X^\mu / \partial \sigma^a$ — касательные векторы к мировому листу, γ^{ab} — обратная к γ_{ab} метрика, $\tilde{\gamma} \equiv |\det \|\gamma_{ab}\||$, R — скалярная кривизна и $\varkappa^2 = 16\pi G$.

Варьируя действие относительно X^μ , мы получим уравнение движения струны

$$\partial_a \left(X_b^\nu g_{\mu\nu} \gamma^{ab} \sqrt{\tilde{\gamma}} \right) = \frac{1}{2} g_{\nu\lambda, \mu} X_a^\nu X_b^\lambda \gamma^{ab} \sqrt{\tilde{\gamma}},$$

а вариация относительно γ^{ab} дает уравнение связи (индуцированную метрику). Варьируя S относительно траектории Z^μ дает уравнение движения заряда в присутствии электромагнитного и гравитационного полей. Соответственно, полевые уравнения — Максвелла и Эйнштейна — задаются выражениями

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (4)$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{R}{2} g^{\mu\nu} = \frac{\varkappa^2}{2} \left(T^{\mu\nu} + \bar{T}^{\mu\nu} + T_{\text{em}}^{\mu\nu} \right), \quad (5)$$

где слагаемые

$$T^{\mu\nu} = \mu \int X_a^\mu X_b^\nu \gamma^{ab} \frac{\delta^4(x - X(\sigma))}{\sqrt{|g|}} \sqrt{\tilde{\gamma}} d^2\sigma,$$

$$\bar{T}^{\mu\nu} = e \int \frac{\dot{Z}^\mu \dot{Z}^\nu \delta^4(x - Z(s))}{\sqrt{|g|}} ds$$

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$$

являются тензором энергии-импульса струны, частицы и электромагнитного поля, соответственно,

$$j^\mu = e \int \dot{Z}^\mu \frac{\delta^4(x - Z(s))}{\sqrt{|g|}} ds \quad (6)$$

представляет собой 4-вектор плотности тока, а ∇_μ — ковариантная производная, согласованная с полной метрикой $g_{\mu\nu}$.

Для решения задачи по теории возмущений, формально разложим все величины

$$\phi = {}^0\phi + {}^1\phi + {}^2\phi + \dots,$$

где ϕ может быть полями $(g_{\mu\nu}, A_\mu)$, источниками $(T^{\mu\nu}, \bar{T}^{\mu\nu}, T_{\text{em}}^{\mu\nu}, j^\mu)$, отклонениями частицы Z^μ или струны X^μ .

В нулевом порядке теории возмущений мы предполагаем пространство Минковского в отсутствие полей: ${}^0h_{\mu\nu} = 0$, $A^\mu = 0$. Струна является прямолинейной, а заряд движется прямолинейно (направление примем за ось z): ${}^0z^\mu = 0$ с постоянной скоростью ${}^0z^\mu \equiv u^\mu$.

Момент «столкновения» — пролета заряда на ближайшем к струне расстоянии b — назовем отсчетом времени ($t = s = 0$), а соответствующий вектор b^μ скрещивания невозмущенной траектории заряда и свободной струны выберем за ось y :

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v), \quad {}^0Z^\mu = u^\mu s + b^\mu, \\ b^\mu = (0, 0, b, 0).$$

Соответственно, $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор столкновения, а $b > 0$ — прицельный параметр рассеяния. Мировой лист космической струны является плоскостью, натянутой на оси t и x , а внутренние координаты равны: $\sigma^0 \equiv \tau = t$, $\sigma^1 \equiv \sigma = x$; тогда ${}^0X^\mu = \delta_a^\mu \sigma^a$, ${}^0\gamma_{ab} = \eta_{ab}$.

Наконец, источники электромагнитного и гравитационного полей равны

$${}^0j^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{e}{\gamma} u^\mu \delta(x) \delta(y - b) \delta(z - vt), \\ {}^0\bar{T}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{m}{\gamma} u^\mu u^\nu \delta(x) \delta(y - b) \delta(z - vt), \\ {}^0T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \mu \delta_a^\mu \delta_b^\nu \eta^{ab} \delta(y) \delta(z) = \\ = \mu \delta(y) \delta(z) \text{diag}(1, -1, 0, 0),$$

в то время как ${}^0T_{\text{em}}^{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ равен нулю.

2. ПЕРВЫЙ ПОРЯДОК: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Источники нулевого порядка создают поля первого порядка: струна (${}^0T^{\mu\nu}$) создает возмущение метрики (3), а заряд (${}^0j^\mu$, ${}^0\bar{T}^{\mu\nu}$) создает кулонов и ньютонов потенциалы, лоренц-преобразованные в z -направлении:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{\kappa m}{4\pi} \left(u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \right) \times \\ \times \left[\gamma^2 (z - vt)^2 + x^2 + (y - b)^2 \right]^{-1/2}, \\ {}^1A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{\sqrt{\gamma^2 (z - vt)^2 + x^2 + (y - b)^2}}. \quad (7)$$

Для самосогласованности мы должны пренебречь самодействием, то есть, рассматривать движение заряда и струны в полях, созданных партнером. Тогда в первом порядке теории возмущений

на заряд не действует сила Лоренца, поэтому взаимодействие в системе «заряд – струна» — чисто гравитационное. Уравнение движения заряда:

$${}^1\ddot{Z}^\mu = -\kappa {}^0\Pi^{\mu\nu} \left({}^1h_{\nu\lambda,\rho} - \frac{1}{2} {}^1h_{\lambda\rho,\nu} \right) u^\lambda u^\rho, \quad (8) \\ {}^0\Pi^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu.$$

Решением (8) с начальными условиями ${}^1Z^\mu = 0$, ${}^1\dot{Z}^\mu = 0$ в декартовых координатах являются функции

$${}^1Z^0 = {}^1Z^x = 0 \\ {}^1Z^y = -\beta' \left[\gamma v s \arctg \frac{\gamma v s}{b} - \frac{b}{2} \ln \frac{b^2 + \gamma^2 v^2 s^2}{b^2} \right] \\ {}^1Z^z = \beta' \left[\frac{\gamma v s}{2} \left(\ln \frac{b^2 + \gamma^2 v^2 s^2}{b^2} - 2 \right) + b \arctg \frac{\gamma v s}{b} \right]. \quad (9)$$

Траектория в первом порядке определяется нулевым порядком Z^z и первым порядком для Z^y :

$$y(z) = b - \beta' \left[z \arctg \frac{z}{b} - \frac{b}{2} \ln \frac{b^2 + z^2}{b^2} \right].$$

Она не зависит от скорости заряда. Это обстоятельство позволит рассматривать не только ультррелятивистский случай, как в аналогичных задачах столкновения точечных частиц [8–11].

Соответствующие деформации струны от гравитационного поля заряда рассматривались в [6]. Известно, что поперечные возбуждения могут рассматриваться как бозоны Намбу–Голдстоуна, появляющиеся в результате спонтанного нарушения трансляционной симметрии [18], и могут быть обнаружены.

Соответствующие уравнения для поперечных возбуждений ${}^1X^{y,z}$ струны имеют форму (1+1)-мерного уравнения д’Аламбера

$$\square_2 {}^1X^\alpha = \delta_a^\lambda \delta_b^\rho \eta^{ab} \left(\frac{1}{2} \bar{h}_{\lambda\rho, \alpha} - \bar{h}_{\lambda, \rho}^\alpha \right)_{y=z=0} \quad (10)$$

($\alpha = y, z$) с источником, линейным по \bar{h} .

Полностью поперечное (и к струне, и к траектории частицы) запаздывающее решение ${}^1X^y$ имеет вид

$${}^1X^y = Gm\gamma v \left[\arctg \frac{v^2 t^2 - v^2 x^2 - (2v^2 - 1)b^2}{2bv\sqrt{v^2 t^2 + (b^2 + x^2)/\gamma^2}} + \right. \\ \left. + \arctg \frac{t^2 - x^2 - b^2/v^2}{2bt/v} + \pi \theta(t) \right], \quad (11)$$

а продольно-поперечное ${}^1X^z$ возбуждение струны равно

$${}^1X^z = Gm\gamma v \left[\operatorname{sgn}(t) \ln \frac{(vbx)^2 + ((\gamma vt)^2 + b^2 + \gamma v^2 |t| \sqrt{(\gamma vt)^2 + b^2 + x^2})^2}{r_0^2 (\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)} - \theta(t) \ln \frac{[v^2(t+x)^2 + b^2][v^2(t-x)^2 + b^2]}{r_0^4} \right], \quad (12)$$

где r_0 — произвольная постоянная с размерностью длины.

Найденные поперечные возбуждения струны непрерывны по t и x , удовлетворяют уравнению движения (10), являются запаздывающими решениями, зануляются в пределе $v \rightarrow 0$ и имеют характерный масштабный фактор $2Gm\gamma = r_{\mathcal{E}}$ — шварцшильдов радиус, соответствующий энергии частицы \mathcal{E} .

3. ВТОРОЙ ПОРЯДОК: ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Во втором порядке теории возмущений возникают эффекты, связанные с излучением. Предполагая электромагнитное излучение доминирующим по сравнению с гравитационным (для заряда это так, для вклада струны это отдельная задача, не связанная с заряженностью частицы), будем вычислять именно его: общая формула потери энергии на излучение дается формулой

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega d\Omega} = -\frac{\omega^2}{16\pi^3} j(k) \cdot j^*(k), \quad \omega = k^0 = |\mathbf{k}|, \quad (13)$$

где $j^\mu(k)$ — фурье-образ векторного источника. В нашей схеме итераций первой поправкой, дающей вклад в излучение, будет ${}^1j^\mu$, являющаяся источником для ${}^2A^\mu$ (в лоренцевой калибровке) в уравнении

$$\square {}^2A^\mu = -{}^1j^\mu(x), \quad {}^1j(x) \equiv \rho^\mu(x) + \sigma^\mu(x), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \rho^\mu(x) &= e \int \left({}^1\dot{Z}^\mu - u^\mu ({}^1Z \cdot \partial) \right) \delta^4(x - {}^0Z(s)) ds \\ \sigma^\mu(x) &= -\varkappa \partial_\nu \left({}^1h^\mu{}_\lambda {}^1F^{\lambda\nu} + {}^1h^\nu{}_\lambda {}^1F^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} {}^1h {}^1F^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

обозначают локальную и нелокальную (полевую) амплитуды, соответственно.

Выбирая ортонормированную пару векторов поляризации $g_{(\alpha)}$,

$$\begin{aligned} g_{(\theta)}^\mu &= \left(0, \cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta \right), \\ g_{(\varphi)}^\mu &= \left(0, -\sin \varphi, \cos \varphi, 0 \right), \end{aligned} \quad (16)$$

плотность излучения задается суммой по двум поляризациям

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3} \sum_{\alpha=\theta,\varphi} |j_{(\alpha)}(k)|^2, \quad (17)$$

где $\omega \equiv k^0 = |\mathbf{k}|$ — частота, а $j_{(\alpha)}(k) \equiv j(k) \cdot g_{(\alpha)}$ — поляризации.

Амплитуды излучения. Преобразование Фурье локальной амплитуды равно

$${}^1\rho^\mu(k) = e e^{i(kb)} \int ds e^{i(ku)s} \left({}^1\dot{Z}^\mu(s) + ik \cdot {}^1Z(s) u^\mu \right), \quad (18)$$

где Z^μ равен

$$\begin{aligned} {}^1Z^\mu(s) &= \frac{i\varkappa^2 \mu \gamma^2 v^2}{8\pi^2} \int d^4q \frac{\delta^2(q^0, q^x)}{q^2 (qu)^2} e^{-i(qb)} \times \\ &\times \left[e^{-i(qu)s} - 1 + i(qu)s \right] \left(2\eta^{\mu z} q^z + q^\mu \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подстановка (19) в (18) и последующее интегрирование дают

$$\begin{aligned} {}^1\rho^\mu(k) &= -\frac{\varkappa^2 e \mu v}{4\omega \gamma \psi^2} e^{i(kb)} \exp\left(-\frac{(ku)b}{\gamma v}\right) \times \\ &\times \left[\left(\hat{\lambda}^\mu - 2\eta^{\mu z} \right) \gamma \psi + \left(\cos \theta + i \sin \theta \sin \varphi \right) u^\mu \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $\psi \equiv 1 - v \cos \theta$, $\hat{\lambda}^\mu = (0, 0, i, -1)$.

Фактором, определяющим основные характеристики ${}^1\rho^\mu(k)$, является экспонента $e^{(ku)b/\gamma v}$. Вместе с элементом фазового объема, это дает характеристическую частоту $\omega \sim \gamma^2/b$ и характеристический угол $\theta \sim 1/\gamma$ (далее — z -область) [19].

Нелокальная амплитуда (15) в импульсном представлении равна

$$\begin{aligned} \sigma^\mu(k) &= i \frac{\varkappa}{(2\pi)^4} \int k_\nu \left[{}^1h^\mu{}_\lambda(q) {}^1F^{\lambda\nu}(k-q) + \right. \\ &\left. + {}^1h^\nu{}_\lambda(q) {}^1F^{\mu\lambda}(k-q) - \frac{1}{2} h(q) {}^1F^{\mu\nu}(k-q) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

При подстановке фурье-образов полей в импульсном интеграле по d^4q возникает двумерная дельта-функция $\delta^2(q^0, q^x)$, поэтому любое скалярное произведение $a \cdot q$ внутри интеграла эффективно равно $-\Sigma_{\mu\nu} a^\mu q^\nu$. Также справедливы равенства:

$$\Sigma^{\mu\nu} u_\nu = \eta^{\mu z} \gamma v, \quad \Sigma_{\mu\nu} = \hat{\lambda}_{(\mu} \hat{\lambda}_{\nu)}^*.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma^\mu(k) &= \frac{\varkappa^2 e \mu}{2\pi} e^{i(kb)} \left[u^\mu(k\hat{\lambda})(k\hat{\lambda}^*) J + \omega \gamma v \cos \theta J^\mu - \right. \\ &\left. - (ku)(k\hat{\lambda}) \eta^{\mu z} J - i\omega(ku) \sin \theta \sin \varphi \hat{\lambda}^\mu J - \gamma v (kJ) \eta^{\mu z} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где введены интегралы

$$\left\{ \begin{array}{l} J \\ J^\mu \end{array} \right\} \equiv \int \frac{\delta(q^0) \delta(q^x) \delta(ku - qu) e^{-i(qb)}}{q^2(k - q)^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ q^\mu \end{array} \right\} d^4q. \quad (23)$$

Вычисляя их, можно заметить, что они распадаются на сумму слагаемых двух типов:

$$J = \mathcal{J} + \hat{\mathcal{J}}, \quad J^\mu = \frac{\omega}{v} \mathcal{J} \lambda^\mu + \frac{\omega\psi}{v} \hat{\mathcal{J}} \hat{\lambda}^\mu,$$

где

$$\mathcal{J} = -\frac{\pi}{2\gamma\omega^2} \frac{e^{-i(kb)} e^{-\omega b R}}{R(k\lambda)},$$

$$\hat{\mathcal{J}} = \frac{\pi v}{2\gamma\omega^2} \frac{\exp(-\omega b \psi / v)}{\psi^2(k\hat{\lambda})}$$

и введены

$$R = \sqrt{\gamma^{-2}v^{-2} + \sin^2\theta \cos^2\varphi},$$

$$\lambda^\mu = (0, 0, v \sin\theta \sin\varphi + ivR, -1 + v \cos\theta).$$

Соответственно, можно разбить всю полевую амплитуду

$$\sigma^\mu(k) = s^\mu(k) + \hat{s}^\mu(k)$$

на часть, пропорциональную $\hat{\mathcal{J}}$:

$$\hat{s}^\mu(k) = \frac{z^2 e \mu}{2\pi} e^{i(kb)} (k\hat{\lambda}) \times \left[u^\mu(k\hat{\lambda}^*) + (ku)\hat{\lambda}^\mu - 2(ku)\eta^{\mu z} \right] \hat{\mathcal{J}}, \quad (24)$$

и часть $s^\mu(k)$, пропорциональную \mathcal{J} . Два типа отличаются показателем экспоненты и фазой $e^{i(kb)}$. Подставляя $\hat{\mathcal{J}}$ и сравнивая с (20), мы заключаем, что

$$\rho^\mu(k) + \hat{s}^\mu(k) = 0.$$

Таким образом, локальная амплитуда полностью сократилась с $\hat{s}^\mu(k)$, и характеристики полной амплитуды излучения определяются параметрами $s^\mu(k)$ (z' -область фазового объема), которые определим ниже. Итак:

$${}^1j^\mu(k) = s^\mu(k).$$

Процессы сокращения локальных слагаемых (деструктивная интерференция) были известны и ранее для взаимодействия точечных ультрарелятивистских частиц с объектами Намбу–Гото [7–11, 15, 16], но теперь они сократились *полностью* и для произвольной скорости.

Поскольку временная компонента обоих векторов поляризации равна нулю, можно эффективно заменить u^μ на $-\gamma v \eta^{\mu z}$. Подставляя значение \mathcal{J} ,

полная векторная амплитуда излучения эффективно равна

$${}^1j^\mu(k) = \frac{4\pi G e \mu}{R(k\lambda)} e^{-\omega b R} \left[\cos\theta \lambda^\mu - i\psi \sin\theta \sin\varphi \hat{\lambda}^\mu + \left(v \cos^2\theta - 2 \cos\theta + i \sin\theta \sin\varphi (\psi + vR) \right) \eta^{\mu z} \right].$$

Проектируя на векторы поляризации, получим поляризационные амплитуды:

$${}^1j_{(\theta)}(k) = \frac{4\pi G e \mu}{R(k\lambda)} \left[\cos\theta \sin\theta \cos^2\varphi - ivR \sin\varphi \right] e^{-\omega b R}$$

$${}^1j_\varphi(k) = -\frac{4\pi G e \mu}{R(k\lambda)} \left[\sin\theta \sin\varphi + ivR \cos\theta \right] \cos\varphi e^{-\omega b R}. \quad (25)$$

Тормозное излучение. Квадрируя амплитуды и подставляя (17), проинтегрируем по частотам. Далее перейдем от переменных θ, φ к переменным $z = \text{tg } \varphi, y = 1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi$. Тогда

$$\frac{d}{dz dy} \left\{ \begin{array}{l} E_\theta \\ E_\varphi \\ E_{\text{em}} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{G^2 e^2 \mu^2 v^3}{\gamma^2 \pi b} \sum_{\pm} \frac{(1 \mp v \sqrt{y - z^2(1-y)})^{-2}}{\sqrt{y - z^2(1-y)} (1 - v^2 y)^{3/2}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 (1-y) + 1 - (1+z^2)^{-1} \\ \gamma^2 v^2 (1-y) + (1+z^2)^{-1} \\ 2\gamma^2 (1-y) + y \end{array} \right\}.$$

Внутреннее интегрирование производится по $-\sqrt{y/(1-y)} < z < \sqrt{y/(1-y)}$, а внешнее — по $0 < y < 1$; в результате:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\theta \\ E_\varphi \\ E_{\text{em}} \end{array} \right\} = \frac{G^2 e^2 \mu^2 \gamma^3 v}{4b} \left[\left\{ \begin{array}{l} 12v^2 + 1 \\ -8v^2 \\ 4v^2 + 1 \end{array} \right\} \frac{\text{arctg } \gamma v}{v} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} 8(1 + v^2) + \left\{ \begin{array}{l} 7 + 6v^2 \\ -8 \\ 6v^2 - 1 \end{array} \right\} \frac{1}{\gamma} \right]. \quad (26)$$

Общая потеря энергии E_{em} в точности совпадает с результатом [2, 3] для всех скоростей.

Учитывая нерелятивистский предел ($E_{\text{em}} \sim v^3$) и ультрарелятивистский режим ($E_{\text{em}} \sim \gamma^3$), удобно ввести $\Xi \equiv E/\gamma^3 v^3$: тогда излученная энергия будет описываться в терминах медленно меняющейся на всем диапазоне скоростей функции $\Xi(v)$. Ее график изображен на рис. 1. Излучение через θ -поляризацию доминирует при любых скоростях заряда.

Частотное распределение можно привести к следующему виду:

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega} = \frac{4G^2 e^2 \mu^2 \gamma^2}{v} \int_1^\gamma \frac{(1+v^2)\tilde{u}^2 - 1}{\tilde{u}^4 \sqrt{\tilde{u}^2 - 1}} e^{-2\omega b \tilde{u}/\gamma v} d\tilde{u}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что при любых скоростях характерная частота по порядку величины равна

$$\omega \sim \frac{\gamma v}{b}.$$

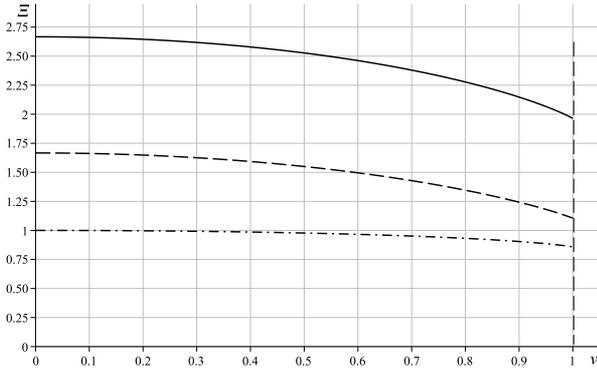


Рис. 1. Функция $\Xi(v)$ (в единицах $(G\epsilon\mu)^2/b$): для поляризации θ (пунктирная линия), φ (штрихпунктирная) и для полной энергии E_{em} (сплошная)

Ультрарелятивистский заряд. Характерные области углов и частот возникают в ультрарелятивистском случае. Приведем соответствующие спектрально-угловые характеристики излучения.

Предел нулевой частоты:

$$\left(\frac{d}{d\omega} \begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \\ E_{\text{em}} \end{Bmatrix} \right)_{\omega=0} = 8G^2 e^2 \mu^2 \gamma^2 \begin{Bmatrix} \ln 2 - 1/3 \\ 1 - \ln 2 \\ 2/3 \end{Bmatrix}.$$

Угловое распределение по азимутальному углу:

$$\frac{d}{d\varphi} \begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \\ E_{\text{em}} \end{Bmatrix} = \frac{G^2 e^2 \mu^2}{\pi b} \frac{\gamma^3}{\sin^4 \varphi} \left[\begin{Bmatrix} \sin^4 \varphi - 3 \cos^4 \varphi \\ -2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ 1 - 4 \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \cos^2 \varphi - 1 \\ 2 \sin^2 \varphi \\ 1 + 2 \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} \frac{\cos \varphi}{2 \operatorname{tg} \varphi} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right].$$

Угловое распределение по полярному углу:

$$\frac{d}{d\theta} \begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \\ E_{\text{em}} \end{Bmatrix} = \frac{2G^2 e^2 \mu^2}{\pi b \zeta \psi^2} \times \begin{Bmatrix} (2\zeta^2 - 1)\mathbf{K}(\zeta) + (1 - \zeta^2)\mathbf{E}(\zeta) \\ \mathbf{K}(\zeta) - \mathbf{E}(\zeta) \\ \zeta^2 [2\mathbf{K}(\zeta) - \mathbf{E}(\zeta)] \end{Bmatrix},$$

где

$$\zeta = \frac{\gamma \sin \theta}{\sqrt{1 + \gamma^2 \sin^2 \theta}},$$

а $\mathbf{K}(\cdot)$ и $\mathbf{E}(\cdot)$ — полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, соответственно. Поскольку при малых углах θ справедливо $\psi \simeq (\theta^2 + \gamma^{-2})/2$, а ψ^2 — в знаменателе, основной вклад дают углы

$$\theta \lesssim 1/\gamma.$$

График θ -распределения изображен на рис. 2. Он подтверждает, что излучение в ультрарелятивистском случае сконцентрировано в конусе вокруг направления движения заряда.

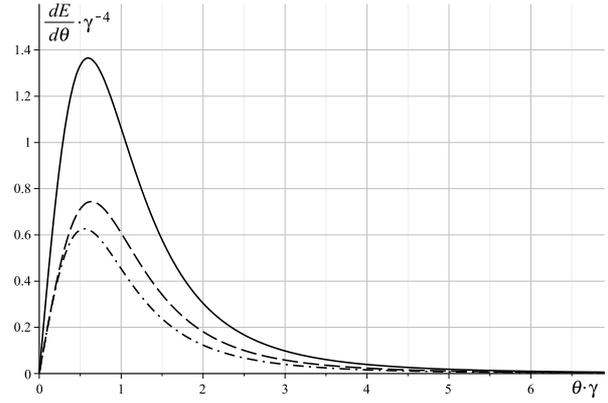


Рис. 2. Угловое θ -распределение (в единицах $(G\epsilon\mu)^2/b$) при $\gamma = 10^3$: для поляризации θ (пунктирная линия), φ (штрихпунктирная) и для полной энергии E_{em} (сплошная)

Тогда из экспоненциального затухания $e^{-2\omega b R}$ следует, что доминирующий вклад в излучаемую энергию дают частоты

$$\omega \sim \gamma/b.$$

Интегрируя θ -распределение, получаем полную излучаемую энергию

$$\begin{Bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \\ E_{\text{em}} \end{Bmatrix} = \frac{G^2 e^2 \mu^2}{8b} \begin{Bmatrix} 13\pi - 32 \\ 8(4 - \pi) \\ 5\pi \end{Bmatrix} \gamma^3, \quad (28)$$

плюс поправки с меньшей степенью лоренц-фактора.

В частотном распределении (27) можно положить $v = 1$ и верхний предел заменить бесконечностью:

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega} = 4G^2 e^2 \mu^2 \gamma^2 \int_1^\infty \frac{2\tilde{u}^2 - 1}{\tilde{u}^4 \sqrt{\tilde{u}^2 - 1}} e^{-2\omega b \tilde{u}/\gamma} d\tilde{u}. \quad (29)$$

Таким образом, относительно характеристической частоты γ/b можно рассмотреть два характерных режима. При малых частотах $\omega \ll \gamma/b$ можно разложить экспоненту и проинтегрировать:

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega} = 4G^2 e^2 \mu^2 \gamma^2 \left[\frac{4}{3} - \frac{3\pi}{2} \frac{\omega b}{\gamma} + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2}\right) \right].$$

На высоких частотах $\omega \gg \gamma/b$ в интеграл (29) основной вклад дает лишь малая окрестность нижнего предела интегрирования, поэтому в подынтегральном выражении можно заменить $(2\tilde{u}^2 - 1)/\tilde{u}^4$ на единицу. Оставшийся интеграл является табличным:

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega} \simeq 4G^2 e^2 \mu^2 \gamma^2 K_0\left(\frac{2\omega b}{\gamma}\right),$$

а разложение функции Макдональда дает искомое асимптотическое разложение частотного распределения:

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega} \simeq 2\sqrt{\pi} G^2 e^2 \mu^2 \gamma^{5/2} \frac{e^{-2\omega b/\gamma}}{\sqrt{\omega b}}.$$

Интеграл (29) вычисляется в виде высшей трансцендентной функции Мейера, однако, асимптотические режимы позволяют вывести более простое интерполяционное выражение для частотного распределения для всего интервала частот:

$$\frac{dE_{\text{em}}}{d\omega} \simeq 2\sqrt{\pi}G^2e^2\mu^2\gamma^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma} + \frac{9\pi}{64}\right)^{-1/2} e^{-2\omega b/\gamma}, \quad (30)$$

при этом, максимум относительной погрешности составляет 1.5%. График частотного распределения изображен на рис. 3.

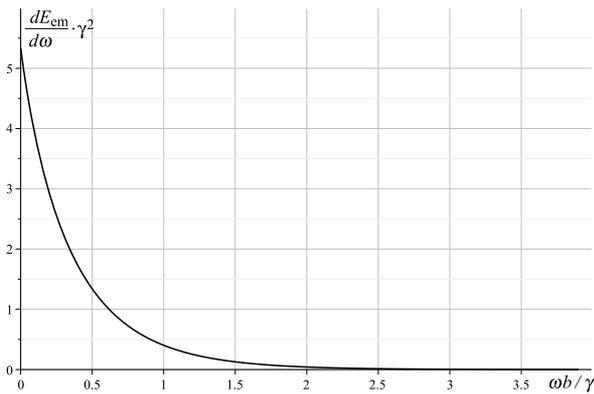


Рис. 3. Частотное распределение (в единицах $(G\mu)^2$) при $\gamma = 10^3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена бинарная система «заряд–космическая струна», взаимодействующая гравитационно на фоне плоского пространства-времени.

Можно сделать следующие выводы о качественном поведении амплитуд электромагнитного излучения:

1. полевая амплитуда σ^μ вычисляется точно и разлагается на сумму z - и z' -подобных слагаемых;
2. z -подобное слагаемое σ^μ в точности сокращает локальную амплитуду ρ^μ , причем, свойство верно для любых скоростей
3. полная амплитуда j^μ наследует свойства z' -подобного слагаемого σ^μ .

В ультрарелятивистском случае возникают характерные углы ($\theta \sim 1/\gamma$) и частоты ($\omega \sim \gamma/b$) излучения.

Полная энергия тормозного излучения вычисляется точно, причем метод двухчастичного подхода применим и к нерелятивистскому режиму. Результат для полной излученной энергии совпал с вычисленным по точной функции Грина [2, 3] фоновой метрики струны в цилиндрических координатах. Таким образом, логарифмы линеаризованной метрики на дальних расстояниях не влияют на поведение амплитуд излучения и являются артефактом выбора системы координат.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

- [1] Соколов Д.Д., Старобинский А.А. // ДАН. **234**. 1043 (1977). (Sokolov D.D., Starobinsky A.A. // Sov. Phys. Dokl. **22**. 312 (1977)).
- [2] Serebriany E.M., Frolov V.P., Skarzhinsky V.D. On the electro-dynamical effects in the gravitational field of a cosmic string. In Proceedings of the Fourth Seminar on Quantum Gravity, May 1987, Moscow. Editors: Markov M.A., Berezin V.A., Frolov V.P. World Scientific, Singapore. 1988.
- [3] Aliev A.N., Gal'tsov, D.V. // Ann. Phys. (N.Y.). **193**. 142 (1989).
- [4] Alford M.G., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. **62**. 1071 (1989).
- [5] Shellard E.P.S. // Nucl. Phys. B. **283**. 624 (1987).
- [6] Spirin P. // Universe. **6** (10). 184 (2020).
- [7] Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Матюхин А.А. // Изв. высших учебных заведений. Физика. №5. 40 (1980). (Galtsov D.V., Grats Yu.V., Matyukhin A.A. // Sov. Phys. J. **23**. 389 (1980)).
- [8] Constantinou Y., Gal'tsov D. V., Spirin P., Tomaras T. N. // JHEP. **1111**. 118 (2011).
- [9] Gal'tsov D. V., Spirin P., Tomaras T. N. // JHEP. **1301**. 087 (2013).
- [10] Constantinou Y., Spirin P. // JHEP. **01**. 111 (2014).
- [11] Gal'tsov D. V., Kofinas G., Spirin P., Tomaras T. N. // Phys. Lett. B. **683**. 331 (2010).
- [12] Spirin P., Tomaras T. N. // JHEP. **06**. 153 (2015).
- [13] Gal'tsov D., Melkumova E., Spirin P. // Phys. Rev. D. **89**. 085017 (2014).
- [14] Gal'tsov D.V., Melkumova E.Y., Spirin P. // Phys. Rev. D. **90**. 125024 (2014).
- [15] Gal'tsov D.V., Melkumova E.Y., Spirin P. // Phys. Rev. D. **93**. 045018 (2016).
- [16] Gal'tsov D.V., Melkumova E.Y., Spirin P. // JHEP. **1801**. 120 (2018).
- [17] Spirin P. // Universe. **7** (7). 206 (2021).
- [18] Kugo T., Yoshioka K. // Nucl. Phys. B. **594**. 301 (2001).
- [19] Spirin P. // Int. J. Mod. Phys. A. **35** (no.02n03). 2040025 (2020).
- [20] Weinberg S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. Wiley, 1972.
- [21] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and Series, Vol. 1, Elementary Functions. Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 1986.

Gravitational interaction of a charge with cosmic string

Y. V. Grats^a, P. A. Spirin^b

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^agrats@phys.msu.ru, ^bsalotop@list.ru

We consider gravitational interaction of classical moving charge with an infinite straight cosmic string with linear energy density μ . The string produces gravitational conical background with small relative angular deficit $\beta' = 4G\mu$. The charge scatters in a plane transverse to string with Lorentz factor γ and impact parameter b . By the perturbation-theory technique, one computes gravitational perturbation of string and charge. To the second perturbational order, we compute the total radiation, emitted as an electromagnetic wave, as well as spectral, angular and polarization characteristics of the bremsstrahlung. The radiation is characterized by beaming on angles of order of $1/\gamma$, and the dominant frequencies of order of γ/b .

PACS: 11.27.+d, 98.80.Cq, 98.80.-k, 95.30.Sf

Keywords: cosmic string, angular deficit, geodesic, vector polarizations, bremsstrahlung, beaming.

Received 09 April 2025.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2025. **80**, No. . Pp. .

Сведения об авторах

1. Грац Юрий Владимирович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.
2. Спирин Павел Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: salotop@list.ru.