

Артамонова Н.Б

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет,
кафедра инженерной и экологической геологии, г. Москва, artamonovanb@mail.ru

Фролова Ю.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический факультет,
кафедра инженерной и экологической геологии, г. Москва, ju_frolova@mail.ru

Шешенин С.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический
факультет, кафедра механики композитов, г. Москва, sergey.sheshenin@mail.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ПЕРЕДАЧИ ПОРОВОГО ДАВЛЕНИЯ

В работе предлагается методика вычисления эффективного тензора передачи порового давления с помощью асимптотического метода осреднения. Этот тензор (коэффициент в изотропном случае) является важным параметром, влияющим на напряженно-деформированное состояние флюидонасыщенных пород. Он показывает, какая часть давления жидкости является «активной» при формировании макроскопических деформаций. Метод продемонстрирован на модельных и реальных геологических образцах с использованием конечно-элементной реализации. Проанализирована зависимость тензора передачи порового от пористости грунта, формы пор, упругих свойств породы.

1. Введение. Определение деформационных свойств грунтов является важным аспектом при изучении напряженно-деформированного состояния массивов горных пород, поэтому представляет актуальную задачу инженерной геологии. На практике упругие свойства грунтов определяются экспериментально. Однако еще в 70–80-ые годы прошлого века был разработан вычислительный метод определения эффективных упругих свойств, базирующийся на решении локальных задач в представительной области [1,2]. Такой способ может служить для предварительной оценки свойств пород и успешно используется, если известны структура порового пространства и упругие свойства компонентов матрицы.

В данной работе предлагается аналогичный способ, также основанный на методе осреднения, для определения тензора передачи порового давления [5].

Скалярный коэффициент порового давления α был введен в работах [6,8,9], где было теоретически обосновано и экспериментально проверено, что для статистически однородного и изотропного пористого

водонасыщенного грунта коэффициент α входит в выражение для эффективного напряжения σ_{ij}^{eff} :

$$\sigma_{ij}^{\text{eff}} = \langle \sigma_{ij}^{\text{П}} \rangle - \alpha \delta_{ij} \langle p \rangle.$$

Здесь $\langle \sigma_{ij}^{\text{П}} \rangle$ – осредненные полные напряжения, σ_{ij}^{eff} – осредненные эффективные напряжения в твердой фазе грунта, передающиеся по контактам между зернами породы, $\langle p \rangle$ – осредненное давление жидкости. Следовательно, коэффициент передачи порового давления показывает, какую часть порового давления нужно учитывать при расчете эффективных напряжений. Там же приводится формула для вычисления коэффициента α :

$$\alpha = 1 - \beta_s / \beta_{\text{eff}},$$

где β_s – сжимаемость материала скелета грунта, β_{eff} – эффективная сжимаемость грунта. Таким образом, для изотропных пород α – скалярный безразмерный параметр, принимающий значения от 0 до 1 и зависящий от свойств грунта (в значительной степени от пористости и формы пор) и эффективных напряжений.

В случае анизотропных сред в формулу расчета эффективных напряжений входит тензор передачи порового давления α_{ij} [10]:

$$\sigma_{ij}^{\text{eff}} = \langle \sigma_{ij}^{\text{П}} \rangle - \alpha_{ij} \langle p \rangle, \quad (1)$$

который в общем виде не определяется экспериментально, но для отдельных частных случаев анизотропии различными авторами предложены экспериментальные способы определения его компонент [7].

2. Теоретический анализ. Для того чтобы теоретически вывести формулу (1), применим асимптотический метод [5] для анализа уравнения равновесия неоднородной упругой пористой среды:

$$[C_{ijkl} u_{k,l}]_{,j} + X_i = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (2)$$

с граничными условиями на поверхности пор Σ_{int}

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = -p n_i, \quad (3)$$

где u_k – компоненты вектора перемещений, X_i – вектор внешних сил, p – известное поровое давление.

Стандартным способом введем быстрые координаты ξ_i :

$$\xi_i = \frac{x_i}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1,$$

где x_i – медленные координаты, l – характерный размер представительной области (RVE – representative volume element) пористой среды, L – характерный глобальный размер всей пористой среды.

В уравнениях (2), (3) тензор модулей упругости и нормаль \mathbf{n} зависят от быстрых координат ξ_i , а давление p – от x_i . Зависимость p только от медленных координат выведена в работе [11].

Решение задачи (2), (3) будем искать в виде:

$$u_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = v_k(\mathbf{x}) + \varepsilon N_{kprq}(\boldsymbol{\xi})v_{p,q}(\mathbf{x}) + \varepsilon M_k(\boldsymbol{\xi})p(\mathbf{x}) + \dots, \quad (4)$$

где $N_{kprq_1\dots q_m}(\boldsymbol{\xi})$, $M_{kq_1\dots q_m}(\boldsymbol{\xi})$ – локальные функции быстрых координат.

В результате получаем [5]:

$$\langle \sigma_{ij}^{\Pi} \rangle = \sigma_{ij}^{\text{eff}} + \alpha_{ij} \langle p \rangle,$$

причем

$$\sigma_{ij}^{\text{eff}} = C_{ijpq}^{\text{eff}} \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (5)$$

Определение эффективных модулей упругости. Математическое определение эффективных модулей упругости C_{ijpq}^{eff} для статистически однородной среды было дано Хиллом [4]. В представительной области формулируется краевая задача:

$$[C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}]_{,j} = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{\text{RVE}} \quad (6)$$

со специальным граничным условием на Σ_{RVE}

$$u_k = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{\text{RVE}} \quad (7)$$

и нулевым давлением на границе пор Σ_{int}

$$C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}n_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{\text{int}}. \quad (8)$$

Тогда, решая задачу (6)–(8) и вычисляя $\langle \sigma_{ij} \rangle$, можно получить C_{ijpq}^{eff} из (5), поскольку при нулевом давлении $\sigma_{ij}^{\text{eff}} = \langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{pq} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$.

Определение эффективных коэффициентов передачи порового давления. Аналогично математически определяется тензор коэффициентов передачи порового давления α_{ij} . В представительной области нужно решить краевую задачу, состоящую из уравнения (6) с постоянным давлением p на границе пор Σ_{int}

$$C_{ijkl}(\mathbf{x})u_{k,l}n_j(\mathbf{x}) = -pn_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{\text{int}} \quad (9)$$

и закрепленной внешней границей Σ_{RVE}

$$u_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{\text{RVE}}. \quad (10)$$

Тогда, решая (6), (9), (10) и вычисляя $\langle \sigma_{ij} \rangle$, получим тензор α из соотношения $\langle \sigma_{ij} \rangle = \alpha_{ij}p$.

3. Применение метода осреднения. Для решения задач (6)–(8) и (6), (9), (10) применяется методика осреднения в виде, аналогичном (4). Тогда эти задачи приводят к локальным задачам в представительной области относительно локальных функций N_{kprq} и M_k , входящих в (4). Локальные функции зависят уже от быстрых координат $\boldsymbol{\xi}$.

Локальная задача в представительной области для функций N_{kprq} (для каждого p, q) имеет вид:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})N_{kprq,l} + C_{ijpq}(\boldsymbol{\xi})]_{,j} &= 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in V_{\text{RVE}}, \\ C_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})N_{kprq,l}n_j(\boldsymbol{\xi}) &= -C_{ijpq}n_j(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\text{int}}, \\ N_{kprq} &= 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\text{RVE}}. \end{aligned}$$

Локальные коэффициенты напряжений определяются формулой

$$\sigma_{ijpq}^{\text{loc}} = (C_{ijkl}N_{kpq,l} + C_{ijpq}),$$

а сами напряжения в задаче (6)–(8) равны $\sigma_{ij} = \sigma_{ijpq}^{\text{loc}} \varepsilon_{pq}^0$, так как в этой задаче $v_{p,q} = \varepsilon_{pq}^0$. Тогда эффективные модули упругости в терминах локальных задач вычисляются в виде

$$C_{ijpq}^{\text{eff}} = \langle C_{ijkl}N_{kpq,l} + C_{ijpq} \rangle.$$

В случае изотропии осредненного пористого материала по известным формулам теории упругости могут быть рассчитаны значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Тензор передачи порового давления вычисляется в ходе решения локальной задачи в представительной области относительно перемещения M_k для пористой среды с ненулевым поровым давлением:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(\xi)M_{k,l}]_{,j} &= 0, \quad \xi \in V_{\text{RVE}}, \\ C_{ijkl}(\xi)M_{k,l}n_j &= -n_i(\xi), \quad \xi \in \Sigma_{\text{int}}, \\ M_k &= 0, \quad \xi \in \Sigma_{\text{RVE}}. \end{aligned}$$

Среднее напряжение, обусловленное действием порового давления, представляется в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl}M_{k,l} \rangle p.$$

Следовательно, асимптотический анализ приводит к тензору передачи порового давления

$$\alpha_{ij} = -\langle C_{ijkl}M_{k,l} \rangle.$$

Таким образом, предложенный вычислительный способ нахождения эффективного тензора передачи порового давления α_{ij} основан на решении локальных задач в представительной области пористой среды.

4. Обсуждение результатов расчета. Описанная методика была опробована на двухмерных модельных и реальных геологических образцах с использованием конечно-элементной реализации.

Исследование модельных образцов. Исследованы зависимости тензора передачи порового давления (α_{ij}) от разных факторов – пористости, формы пор, упругих свойств материала каркаса. Модельные образцы обладают центральной симметрией, поэтому для них $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha$, и, следовательно, в таком случае можно говорить о коэффициенте передачи порового давления α .

Влияние формы поры. Исследовались два модельных образца с круглой порой и порой в форме звезды (рис. 1) с одинаковыми упругими свойствами материала каркаса ($E = 20000$ МПа, $\nu = 0,3$) и пористостью ($n = 17\%$). Как видно на рис. 1, у образца с порой в форме звезды значение α в 2 раза больше, чем у образца с круглой порой, что можно объяснить большей площадью поверхности пор и трещин в первом случае.

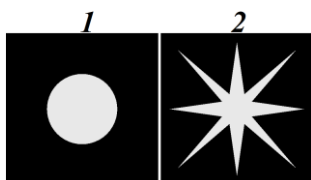


Рис. 1. Зависимость коэффициента передачи порового давления от формы поры (α): 1 – 0,42; 2 – 0,87

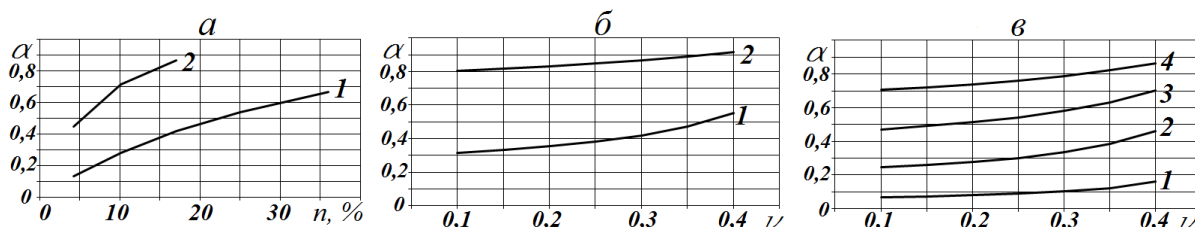


Рис. 2. Зависимость коэффициента α от пористости n (%) (а) и от значений коэффициента Пуассона ν (б) для круглой поры (1) и для поры в форме звезды (2) и от значений коэффициента Пуассона ν в случае одной круглой поры с пористостью n (%): 1 – 3,1; 2 – 12,6; 3 – 28,3; 4 – 50,4

Влияние пористости. Расчеты проводились для образцов с формами пор, показанными на рис. 1. Для обоих образцов коэффициент передачи порового давления монотонно возрастает с увеличением пористости (рис. 2, а), но у образца с порой в форме звезды скорость возрастания пористости в 1,5 раза больше, чем у образца с круглой порой.

Влияние коэффициента Пуассона материала каркаса. Получена зависимость коэффициента передачи порового давления от коэффициента Пуассона (ν) для образцов с одинаковой пористостью ($n = 17\%$), но с разной формой поры (рис. 2, б) и для образцов с одной круглой порой, но с разной величиной пористости (рис. 2, в). Во всех случаях зависимость монотонно возрастающая, причем угол наклона графиков зависит как от пористости, так и от формы поры. Величина изменения α при изменении ν от 0,1 до 0,4 для образца с порой в форме звезды в 2 раза меньше, чем для образца с круглой порой. Следовательно, для угловатых пор влияние пористости на α сильнее, а коэффициента Пуассона слабее, чем для округлых пор. Коэффициент α не зависит от модуля Юнга материала каркаса.

Изучение образцов гиалокластитов Исландии. Гиалокластиты – вулканогенно-осадочные породы, образующиеся при подводных или подледных извержениях вулканов [3].

Исследуемый фрагмент гиалокластита состоит из остроугольных обломков базальтового вулканического стекла псаммитовой размерности. Размер обломков в среднем составляет 0,2–0,3 мм, иногда достигает 1 мм. Обломки сцементированы палагонитом, который "сваривает" их в точках соприкосновений, формируя цемент контактового типа. Межобломочные

поры имеют неправильную, иногда вытянутую форму, их размер колеблется от 0,1 до 0,5 мм (реже до 1 мм), преобладают поры 0,1–0,2 мм (образец 1, рис. 3). В крупных обломках вулканического стекла (0,5–1 мм) наблюдаются поры правильной округлой формы (везикулы) с ровными стенками, образованные при дегазации лавы (образец 2, рис. 3). Размер везикул 0,05–0,2 мм.

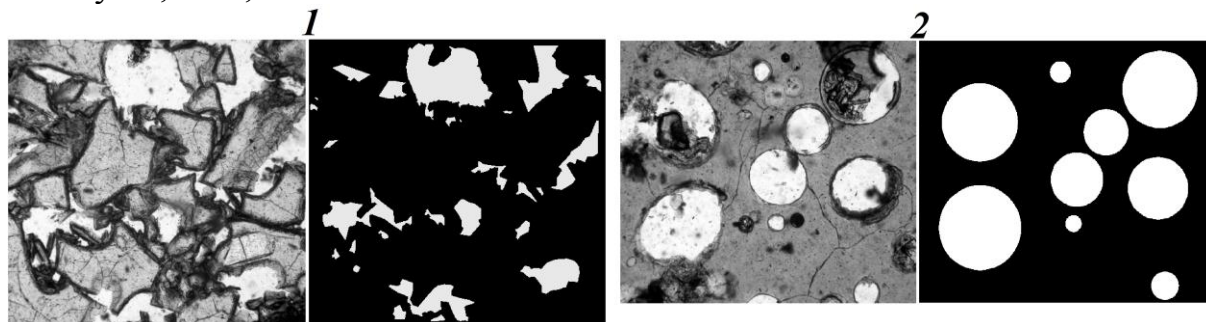


Рис. 3. Фотографии шлифов гиалокластитов (слева, николи параллельны) и их модельные изображения (справа). Ширина поля зрения, мм: 1 – 1,2; 2 – 0,7

Таблица 1

Свойства образцов гиалокластита,
полученные расчетным и экспериментальным способами

№ обр.	n, %	α_{11}	α_{22}	$E_{\text{расч}}$, МПа	$\nu_{\text{расч}}$	$E_{\text{экс}}$, МПа	$\nu_{\text{экс}}$
1	15	0,52	0,58	$10,0 \cdot 10^3$	0,20	$10,0 \cdot 10^3$	0,20
2	33	0,58	0,58	$5,3 \cdot 10^3$	0,23	$5,0 \cdot 10^3$	0,21

Номера образцов в табл. 1 соответствуют номерам образцов на рис. 3. Свойства вулканического стекла, использованные в расчетах: для образца 1 $E = 20000$ МПа, $\nu = 0,24$; для образца 2 $E = 12300$ МПа, $\nu = 0,24$.

Как видно из табл. 1, образец 1 характеризуется слабой анизотропией по α_{ij} , что можно объяснить преобладанием пор, ориентированных в горизонтальном направлении (рис. 3). Образец 2 изотропен по α_{ij} , так как его поры округлой формы и распределены равномерно по площади. Можно заметить, что образец 1 (с угловатыми порами) и образец 2 (с круглыми порами) имеют близкие значения компонентов тензора передачи порового давления ($\alpha_{\beta\beta} = 0,58$) при резко различных значениях пористости (15% и 33% соответственно). Этот факт еще раз подтверждает зависимость α_{ij} от формы пор, установленную на модельных образцах.

Можно сказать, что образец 1 изотропен по упругим свойствам с точностью 85%, а образец 2 – с точностью 99%. Расчетные показатели модуля упругости и коэффициента Пуассона для обоих образцов практически совпадают с экспериментальными результатами (табл. 1).

5.Выводы. Предложен вычислительный метод определения тензора передачи порового давления на скелет породы, базирующийся на решении

локальных задач в представительной области. Этот метод может использоваться при исследовании образцов с любым типом анизотропии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №16-05-00501-а).

Список литературы

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
3. *Фролова Ю.В.* Закономерности изменения состава и свойств гиалокластитов Исландии в процессе литогенеза // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 4. Геология. 2010. № 2. С. 45–55.
4. *Хилл Р.* Упругие свойства составных сред: некоторые теоретические принципы // Механика. 1964. № 5. С. 127–143.
5. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж.* Применение метода осреднения для определения коэффициента передачи порового давления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. №2. С. 42-45.
6. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. Vol. 12. P. 155-164.
7. *Carroll M.M.* An Effective Stress Law for Anisotropic Elastic Deformation // J. Geoph. Research. 1979. vol. 84. P. 7510-7512.
8. *Fatt I.* Compressibility of sandstones at low to moderate pressures // Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol. 1958. Vol. 42. No. 8. P. 1924-1957.
9. *Geertsma J.* The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Changes of Porous Rocks // Trans. AIME. 1957. Vol. 210. P. 331-339.
10. *Gueguen Y., Bouteca M.* Mechanics of Fluid-Saturated Rocks. Elsevier Acad. Press. 2004. 450 pp.
11. *Mei C.C.* Micro-scale basis of seepage flow. Theory of homogenization // Lectures Notes on Fluid Dynamics. 2002. Chapter 6.2. P. 1-7.