РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 391, № 3, с. 340–342

МЕХАНИКА

УДК 531.384

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2003 г. А. С. Кулешов

Представлено академиком В.В. Румянцевым 19.03.2003 г.

Поступило 21.03.2003 г.

Рассматривается задача о движении тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости без скольжения. Как известно [1, 2], уравнения движения тела допускают, помимо интеграла энергии, два линейных по квазискоростям первых интеграла. Однако в явном виде эти интегралы указаны лишь в нескольких частных случаях (движущееся тело – шар или диск). В настоящем сообщении приведен явный вид этих интегралов в случае, когда поверхность движущегося тела и распределение масс в нем удовлетворяют некоторому условию. Показано также, что данному условию удовлетворяет счетное число поверхностей движущихся тел.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Пусть твердое тело, симметричное по форме и распределению масс относительно оси $G\zeta$, проходящей через центр тяжести G тела, опирается в точке M на неподвижную горизонтальную плоскость Oxy. Обозначим: θ – угол между осью симметрии тела и вертикалью, β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, а α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox. Положение тела будет вполне определено углами α, β, θ и координатами x и y точки M.

Кроме того, введем систему координат $G\xi\eta\zeta$, движущуюся и в пространстве, и в теле так, что ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана, а $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (рис. 1). Пусть векторы скорости $\mathbf{v}$ центра масс G, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ и реакции плоскости $\mathbf{R}$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ, v_η, v_ζ; p, q, r; Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ и R_ξ, R_η, R_ζ соответственно. Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.

Заметим [1, 2], что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ, т.е. $GQ = f(\theta)$. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ, причем $\eta = 0$, а

$$\begin{aligned}\xi &= -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta,\\ \zeta &= -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = p$, $\Omega_\eta = q$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет все время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta - \Omega_\xi \operatorname{ctg}\theta = 0$. Точка касания не имеет скорости, следовательно,

$$v_\xi + q\zeta = 0, \quad v_\eta + r\xi - p\zeta = 0, \quad v_\zeta - q\xi = 0.$$

Закон изменения импульса в проекции на ось $G\eta$ и закон изменения кинетического момента

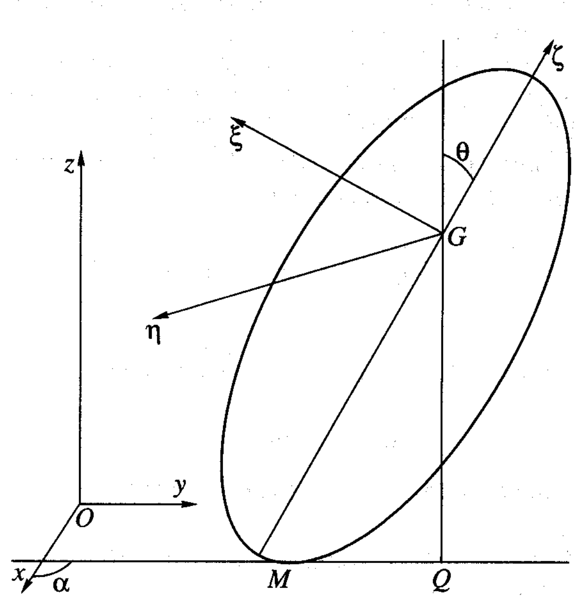

Рис. 1.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

для осей $G\xi$ и $G\zeta$ после простых преобразований дают

$$\frac{d(p\zeta - r\xi)}{dt} - pq(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi) = \frac{R_\eta}{m},$$

$$A_1\frac{dp}{dt} + (A_3 r - A_1 p\operatorname{ctg}\theta)q = -\zeta R_\eta, \quad (1.2)$$

$$A_3\frac{dr}{dt} = \xi R_\eta.$$

Отбрасывая в дальнейшем частный случай $\theta = \mathrm{const}$ и имея в виду, что $q = -\frac{d\theta}{dt}$, по исключении R_η из системы (1.2) получим

$$A_1\frac{dp}{d\theta} + A_3\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\theta} = -A_1 p\operatorname{ctg}\theta + A_3 r,$$
$$\zeta\frac{dp}{d\theta} - \frac{(A_3 + m\xi^2)}{m\xi}\frac{dr}{d\theta} = -(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi + \zeta')p + \xi' r. \quad (1.3)$$

Таким образом, из системы (1.3) определяются два линейных относительно p и r первых интеграла. К настоящему времени явный вид этих интегралов известен лишь в случае, когда движущееся тело является неоднородным динамически симметричным шаром. В случае движения по плоскости круглого диска, решение системы (1.3) дает выражения для p и r через гипергеометрические функции. Укажем здесь явный вид линейных по p и r первых интегралов для тела, по форме отличного от шара или диска.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Следуя работе [1], предположим, что движущееся тело имеет такую форму меридианного сечения, при которой были бы возможны движения тела с постоянной угловой скоростью вращения вокруг оси симметрии

$$r = r_0 = \mathrm{const}.$$

Для того чтобы выполнялось это соотношение, координаты точки касания ξ и ζ должны удовлетворять условию

$$(A_3\zeta - A_1\xi')\sin\theta = A_3(\cos\theta + n)(\xi + \zeta'), \quad (2.1)$$

где n – произвольная постоянная.

Т е о р е м а 1. *При выполнении условия* (2.1) *система уравнений* (1.3) *допускает первые интегралы*

$$[A_1 p\sin\theta + A_3(\cos\theta + n)r] \times$$
$$\times\sqrt{A_1A_3 + A_1m\zeta^2 + A_3m\zeta^2} = c_1, \quad (2.2)$$

$$r - mc_1\int\frac{\xi(\xi + \zeta')d\theta}{\sin\theta(A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = c_2. \quad (2.3)$$

Определим теперь каким должно быть меридианное сечение поверхности движущегося тела, чтобы для него выполнялось условие (2.1). Рассмотрим случай $n = 0$. Подставляя в (2.1) выражения (1.1) для ξ, ζ и их производных и вводя безразмерный параметр $k = \frac{A_3}{A_1}$, получим дифференциальное уравнение для определения функции $f(\theta)$:

$$(k-1)f''\sin\theta\cos\theta - kf' + (k-1)f\sin\theta\cos\theta = 0. \quad (2.4)$$

Для решения уравнения (2.4) нам достаточно найти любое его нетривиальное решение. Если $f_0 = f_0(\theta)$ – такое решение, то общее решение уравнения (2.4) определяется по формуле [3]

$$f(\theta) = f_0(\theta)\left(\lambda_1 + \lambda_2\int\frac{(\operatorname{tg}\theta)^{\frac{k}{k-1}}}{f_0^2(\theta)}\right), \quad (2.5)$$

где λ_1, λ_2 – произвольные постоянные.

Т е о р е м а 2. *Уравнение* (2.4) *имеет нетривиальное частное решение*

$$f_0(\theta) = \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{(k-2)}{2(k-1)}, 2; \frac{1}{\cos^2\theta}\right)}{\cos\theta}. \quad (2.6)$$

В числителе выражения (2.6) стоит гипергеометрическая функция Гаусса F – бесконечный ряд, зависящий от трех параметров и переменной $w = \frac{1}{\cos^2\theta}$. При произвольных значениях параметров данный ряд будет расходиться и, следовательно, выражение (2.6) имеет смысл, только когда функция F представляет собой не бесконечный ряд, а конечную сумму.

Т е о р е м а 3. *Ряд, стоящий в числителе выражения* (2.6), *будет конечной суммой, если выполняется одно из условий*

$$k = \frac{2(N+1)}{2N+1} \quad \text{или} \quad k = \frac{2(N+1)}{2N+3},$$

где N – натуральное число или нуль.

Таким образом, для каждого целого неотрицательного числа N можно найти по крайней мере два значения параметра k, при которых выражение (2.6) имеет смысл. Будем считать, что в формуле (2.5) $\lambda_2 = 0$, т.е. именно функция (2.6) определяет меридианное сечение тела вращения, движущегося по абсолютно шероховатой плоскости. Тем самым мы можем указать счетное число поверхностей, меридианное сечение которых определяется функцией (2.6). Так, например, при $N = 0$ имеем

$$k = 2, \quad f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\cos\theta}, \quad \xi = -\frac{2\lambda_1 \sin\theta}{\cos\theta}, \quad \zeta = \frac{\lambda_1 \sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \lambda_1 \tag{2.7}$$

или

$$k = \frac{2}{3}, \quad f(\theta) = \frac{\lambda_1}{\sin\theta}, \quad \xi = \frac{\lambda_1 \cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \lambda_1, \quad \zeta = -\frac{2\lambda_1 \cos\theta}{\sin\theta}. \tag{2.8}$$

Поверхность, определяемая условиями (2.7), представляет собой параболоид вращения, а поверхность, определяемая условиями (2.8), образуется при вращении дуги параболы вокруг оси, проходящей через ее фокус.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01–01–00141) и гранта "Молодые кандитаты" (МК–1393.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муштари Х.М.* // Мат. сб. 1932. Т. 39. № 1/2. С. 105–126.
2. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
3. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1995. 560 с.