Эмпирическая верификация, восстановление и коррекция субъективной модели

Балакин Д.А. Нагорный Ю.М. Пытьев Ю.П.

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

15 декабря 2014 г.

Математическая модель субъективных суждений [1] модельера-исследователя (м.-и.) и их модальностей — $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$,
$\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, + = \max, \times = \min)$,
$\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant} = \geqslant, \widehat{+} = \min, \widehat{\times} = \max)$.
$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Pl}(\widetilde{x} \in E) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x)$, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \overset{\text{def}}{=} 0$,

$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Bel}(\widetilde{x} \in X \setminus E) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{x \in X \setminus E} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) = 1$.

$t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$, $\widehat{t}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x), x \in X$.
Меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}$) эквивалентны, если $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$ ($\gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E)$) для некоторой непрерывной строго монотонной функции $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$.

Использование данных наблюдений

В докладе рассмотрена модель объекта, определенная как пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, заданное с точностью до значения $x \in X$, и модель «диалога», определенная исследователем как пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, в котором н. э. $\widetilde{x}$ моделирует его субъективные суждения об истинности каждого значения $x \in X$ и их модальности, определенные значениями $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$, $s^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$, $x \in X$.

Данные наблюдений

В рассматриваемом далее случае м.-и. доступны данные наблюдений за объектом, и он намерен использовать их как для эмпирического построения модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ его субъективных суждений, так и для оценки её адекватности цели исследования.
Обозначим $\omega^{(n)} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^n$ данные n наблюдений, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x) : \mathcal{A}^n \to [0, 1]$ — контролировавшую их вероятность, $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) \in \mathcal{A}^n$ — оптимальную (минимизирующую вероятность ошибки второго рода) область в Ω^n принятия гипотезы $H(x) = \{x\}$ при конкурирующей частной альтернативе $\{x'\} \subset K(x)$, $\mathrm{pr} = \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})\}; x)$ — вероятность принять верную гипотезу $H(x)$. Ограничимся семействами $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$, $x \in X$, для которых оптимальная область существует $\forall\, \mathrm{pr} \in [0, 1]$ и $\forall x' \in K(x)$, $x \in X$.

Простая гипотеза $H(x) = \{x\}$ и простая альтернатива $K(x) = \{x'\}$

В этом случае $\forall x \in X$ объект может находиться в одном из двух «состояний», определенных либо значением x, либо $x' = x'(x) \neq x$, где отображение $x'(\cdot) : X \to X$ известно м.-и. Рассмотрим семейство статистических задач проверки гипотез $H(x) = \{x\}$ против $K(x) = \{x'(x)\}$, $x \in X$, когда условие оптимальности областей $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$, $x \in X$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, достаточно для построения статистической модели н. э. $\widetilde{x}$.

При оговоренных свойствах семейства $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$, $x \in X$, как известно, оптимальная область принятия $H(x) = \{x\}$ против любой $K(x) = \{x'\}$ имеет вид

$$\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n, \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) \geqslant \lambda\, \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')\}, \quad (1)$$

где $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, — плотность $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$ относительно некоторой меры μ, которая не зависит от x, значение $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \geqslant 0$ определено условием

$$\mathrm{pr} = \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})\}; x).$$

Для любых $x, x' \in X$, $x \neq x'$, согласно (1)

$$\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) \subset \Omega_*(x, x', \mathrm{pr}'), \text{ если } \mathrm{pr} \leqslant \mathrm{pr}', \mathrm{pr}, \mathrm{pr}' \in [0, 1]. \quad (2)$$

Отображения Φ, Φ^{-1}

Определим семейства взаимно обратных точечно-множественных отображений $\Phi(\cdot, \mathrm{pr}) : X \to \mathcal{A}^n$ и $\Phi^{-1}(\cdot, \mathrm{pr}) : \Omega^{(n)} \to \mathcal{P}(X)$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$,

$$\Phi(x; \mathrm{pr}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Omega_*(x, x'(x), \mathrm{pr}), x \in X,$$
$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X, \omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})\}, \omega^{(n)} \in \Omega^n, \quad (3)$$

где $\Phi(x; \mathrm{pr})$ есть множество элементарных событий $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, при которых принимается $H(x)$, $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ есть множество таких $x \in X$, при которых принимается $H(x)$, если результат наблюдения — $\omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})$.

Отображения Φ, Φ^{-1}

Согласно (3) $\forall\, \mathrm{pr} \in [0,1]$, $\forall x \in X$,

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n, x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}; x) = \mathrm{pr}, \qquad (4)$$

где случайное множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ покрывает (оценивает) значение x параметра вероятности $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x)$, контролировавшей наблюдения $\omega^{(n)}$, а согласно (2)

$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \subset \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}'), \text{ если } \mathrm{pr} \leqslant \mathrm{pr}'. \qquad (5)$$

Случайный неопределенный элемент

Свойства отображений Φ, Φ^{-1} как статистических характеристик объекта исследования позволяют м.-и. рассматривать $x \in X$ как значения случайного н.э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ и считать этот случайный н.э. эмпирической моделью его субъективных суждений о возможных значениях неизвестного параметра x модели $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, контролировавшей данные наблюдений $\omega^{(n)}$, согласно следующим замечаниям.

1. Чем больше минимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(x)$ принимается, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$, тем менее правдоподобно равенство $\widetilde{x}(\omega^{(n)}) = x$.
2. Чем больше максимальная вероятность $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, при которой гипотеза $H(x)$ отвергается, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$, тем менее правдоподобно равенство $\widetilde{x}(\omega^{(n)}) = x$.

Случайный неопределенный элемент

Эти замечания определяют статистическую модель случайного н.э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ вариантами случайных распределений правдоподобий и доверий со значениями, согласованными со значениями вероятности:

$$t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) \overset{\text{def}}{=} 1 - \sup\{\text{pr} \,|\, \text{pr} \in [0,1], x \in X \setminus \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\text{pr})\} =$$
$$= 1 - \inf\{\text{pr} \,|\, \text{pr} \in [0,1], x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\text{pr})\}, x \in X, \omega^{(n)} \in \Omega^n,$$
$$\widehat{s}_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = 1 - t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}), x \in X, \omega^{(n)} \in \Omega^n. \quad (6)$$

Простая гипотеза и сложная альтернатива

В этом случае неопределенная модель объекта $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x)$, $x \in X$, охарактеризована условиями $H(x) = \{x\}$, $K(x) \subset X \setminus \{x\}$.
В общем случае существования оптимального класса Ω_* недостаточно для построения статистической модели н.э. $\widetilde{x}$, и для построения статистической модели н.э. $\widetilde{x}$ необходимо, чтобы $\forall\, \mathrm{pr} \in [0, 1]$ $\forall x \in X$ существовал класс равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальных областей $\Phi(x; \mathrm{pr})$ принятия $H(x)$, $x \in X$.

Пример

Пусть $H(x) = \{x\}$, $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X = \mathcal{R}^1$,
$\Pr(\cdot; x) \sim \mathcal{N}(x, \sigma^2 = 1)$. В классе несмещенных областей существует равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальная область принятия $H(x)$: $\forall x' \in K(x)$
$\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \Phi(x; \mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \mathcal{R}^n, |\omega_{(n)} - x| \leqslant \alpha_n(\mathrm{pr})\}$,
где $\omega_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j$, ω_i, $i = 1, \ldots, n$, взаимно независимы, а
$\alpha_n = \alpha_n(\mathrm{pr})$ — корень уравнения
$\Pr^{(n)}(|\omega_{(n)} - x| \leqslant \alpha_n) = \mathrm{pr} \in [0, 1]$.

Пример

Согласно определению (6),

$$t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = \sqrt{2/\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{n}|\omega_{(n)}-x|} \exp(-z^2/2)dz, x \in \mathcal{R}^1. \qquad (7)$$

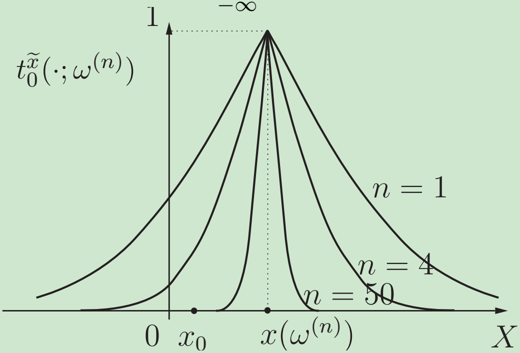

Рис.: Графики $t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)})$, $x \in \mathcal{R}^1$, $n = 1, 4, 50$.

Если равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальная область принятия гипотезы $H(x)$, $x \in X$, не существует, то м.-и. может попытаться найти область принятия $H(x)$, локально оптимальную для частных альтернатив $\{x'\} \subset K(x)$, «близких» к $H(x) = \{x\}$. В частности, если как в предыдущем примере $\Pr(\cdot; x) \backsim \mathcal{N}(x, 1)$, то локально оптимальная область принятия $H(x) = \{x\}$ против $K(x) = X \setminus \{x\}$ совпадает с $\Phi(x, \mathrm{pr})$. Наконец, для семейства статистических задач проверки гипотез $H(x) = \{x\}$, $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X$, случайное множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ можно определить непосредственно как оценивающее параметр $x \in X$ вероятности $\Pr^{(n)}(\cdot; x)$ множество максимального правдоподобия (о.м.м.п.).

Замечание

В математической статистике функция $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$, $x \in X$, называется функцией правдоподобия, x' — более правдоподобным, чем x, если $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x') > \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$, семейство оценивающих (доверительных) множеств $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, называется семейством о.м.м.п., если для любых $\omega^{(n)} \in \Omega^n$ и $\mathrm{pr} \in [0,1]$ включение $x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr})$ влечет включение любого $x' \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr})$, не менее правдоподобного, чем x: $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x') \leqslant \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)$.

Оценивающие множества максимального правдоподобия

Семейство о.м.м.п. $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, охарактеризуем условиями: $\forall \omega^{(n)} \in \Omega^n \ \Phi^{-1}(\omega^{(n)}, \mathrm{pr}) = \{x \in X : \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) \geqslant \lambda(\mathrm{pr}) \sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')\}$, где $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \in [0,1]$ определяется из уравнения
$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n, x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}; x) = \mathrm{pr}$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$.

Асимптотическое свойство оценивающих множеств максимального правдоподобия

При регулярности семейства $\{\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot; x) | x \in X = \mathcal{R}^k\}$ и единственности при $n > n_0$ оценки максимального правдоподобия $x(\omega^{(n)}) = \operatorname*{argmax}_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')$ параметра $x \in X$ распределение статистики $T(\omega^{(n)}) = -2 \ln(\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) / \sup_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x'))$ при $n \to \infty$ и верной гипотезе $H(x)$ сходится к распределению χ^2 с k степенями свободы. $F_{\chi^2_k}(-2 \ln \lambda^{(n)}(\mathrm{pr})) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{pr}$, где $F_{\chi^2_k}(\cdot)$ — функция распределения χ^2 с k степенями свободы. В этом случае

$$t_0^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) - 1 + F_{\chi^2_k}\left(-2 \ln \frac{\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x)}{\sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Пример

Для $\Pr(\cdot; x) \backsim \mathcal{N}(x, 1)$

$\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} (\omega_i - x)^2)$,

$\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$, $x \in X = \mathcal{R}^1$, $\sup\limits_{x' \in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x')$

достигается при $x' = x(\omega^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$, о.м.м.п. $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) =$

$\{x \in X, |x(\omega^{(n)}) - x| \leqslant \sqrt{-2 \ln \lambda(\mathrm{pr})}/\sqrt{n} = \alpha_{(n)}(\mathrm{pr})\}$, где

$\alpha_{(n)}(\mathrm{pr})$ — корень уравнения (7).

Согласие модели н.э. с моделью его оценки

Если м.-и. предложил модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н.э. $\widetilde{x}$ до появления данных наблюдений за моделируемым объектом, то он может использовать н.э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ для анализа состоятельности своей модели н.э. $\widetilde{x}$, считая $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ статистической оценкой $\widetilde{x}$.

Пусть согласно его модели x_0 — единственное максимально правдоподобное значение, $t^{\widetilde{x}}(x_0) = 1$. Если данные $\omega^{(n)}$ контролировались $\mathcal{N}(x_0, 1)$, и, например, $x_0 < x(\omega^{(n)})$, см. рис. 1, то вероятность получить любое $x' > x(\omega^{(n)})$ равна $\frac{1}{2} t_0^{\widetilde{x}}(x_0; \omega^{(n)})$. Если $t_0^{\widetilde{x}}(x_0; \omega^{(n)}) \lesssim 10^{-3}$, то модель н.э. $\widetilde{x}$ плохо согласуется с моделью $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$.

Согласие модели н.э. с моделью его оценки

Если же существует неодноточечное множество максимально правдоподобных значений $E = \{x \in X, t^{\widetilde{x}}(x) = 1\}$, $x < x(\omega^{(n)})$, $x \in E$, то наибольшая вероятность получить наблюденное $x(\omega^{(n)})$, или — любое $x' > x(\omega^{(n)})$, равна $\frac{1}{2}\,\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(E; \omega^{(n)})$, и если значение $\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(E; \omega^{(n)})$ мало, то модель н.э. $\widetilde{x}$ плохо согласуется с моделью оценки $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ н.э. $\widetilde{x}$.
Если исследователь считает, что согласие его модели н.э. $\widetilde{x}$ со статистической моделью н.э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ удовлетворительное, то он может использовать последнюю для коррекции своей модели, применив методы построения «коллективной экспертизы»[2].

Замечание

В общем случае в терминах математической статистики вероятность

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})\}; x) = 1 - \mathrm{pr}$$

ошибочно отклонить $H(x) = \{x\}$ называется уровнем (значимости) критической области $\Omega^n \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})$, а значение

$$t_0^{\widetilde{x}}(x, \omega^{(n)}) = \inf\{1 - \mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0, 1], \omega^{(n)} \in \Omega^n \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})\}$$

в математической статистике называется критическим уровнем; чем меньше критический уровень $t_0^{\widetilde{x}}(x, \omega^{(n)})$ (равный правдоподобию равенства $\widetilde{x} = x$), тем значительнее $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x) = \{x\}$, $x \in X$.

Согласие субъективной модели н.э. с данными наблюдений за объектом

Судить о том, насколько предложенная м.-и. модель н.э. $\widetilde{x}$ согласуется с данными $\omega^{(n)}$ наблюдений, следует, не обращаясь к н.э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$. Рассмотрим семейство неопределенных множеств (н.м.) $\Phi(\widetilde{x};\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr}\in[0,1]$, определенных отображениями (3). Поскольку

$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\omega^{(n)}\in\Phi(\widetilde{x};\mathrm{pr}))\overset{\mathrm{def}}{=}\sup\{t^{\widetilde{x}}(x)|x\in X,\omega^{(n)}\in\Phi(x;\mathrm{pr})\}$ — правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому н.м. $\Phi(\widetilde{x},\mathrm{pr})$ покрывает $\omega^{(n)}$, то чем больше $\mathrm{pr}(\omega^{(n)})\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\{\mathrm{pr}\,|\,\mathrm{pr}\in[0,1],\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\omega^{(n)}\in\Phi(\widetilde{x},\mathrm{pr}))=1\}$ — минимальная вероятность pr покрытия $\omega^{(n)}$ н.м. $\Phi(\widetilde{x};\mathrm{pr})$, при которой правдоподобие покрытия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\omega^{(n)}\in\Phi(\widetilde{x};\mathrm{pr}))=1$, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против модели н. э. $\widetilde{x}$.

Согласие субъективной модели н.э. с данными наблюдений за объектом

Поэтому (случайное) правдоподобие истинности неопределенного высказывания, согласно которому модель н.э. $\widetilde{x}$ согласуется с данными наблюдений $\omega^{(n)}$, $\widetilde{x} \backsim \omega^{(n)}$, определим равенством

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \backsim \omega^{(n)}) \overset{\mathrm{def}}{=} 1 - \mathrm{pr}(\omega^{(n)}) =$$
$$= 1 - \inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})) = 1\}.$$

Список литературы

[1] Пытьев Ю. П. Математическое моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 4. — С. 102–125.

[2] Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. — 2 изд. — М. : Физматлит, 2014.

[3] Press S. J. Subjective and Objective Bayesian statistics: Principles, Models and Applications. — Hoboken, NJ : Wiley, 2003.

[4] Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В. Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. — СПб. : Наука, 2006.

[5] Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L., Spiegelhalter D. J. Probabilistic Networks and Expert Systems. — Springer-Verlag, 1999.

[6] Jaynes E. T. Prior Probabilities // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. — 1968. — Vol. 4, no. 3. — P. 227–241.

[7] Jeffreys H. An Invariant Form for the Prior Probability in Estimation Problems // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. — 1946. — Vol. 186, no. 1007. — P. 453–461.

[8] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. — Princeton University Press, 1976.

[9] Wang P. A Defect in Dempster-Shafer Theory // In Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. — 1994. — P. 560–566.

[10] Kłopotek M. A., Wierzchoń S. T. Empirical Models for the Dempster-Shafer-Theory // Belief Functions in Business Decisions / Ed. by R.P. Srivastava, T.J. Mock. — Heidelberg : Physica-Verlag HD, 2002. — Vol. 88 of Studies in Fuzziness and Soft Computing. — P. 62–112.

[11] Yager R. R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules // Inf. Sci. — 1987. — March. — Vol. 41, no. 2. — P. 93–137.

[12] Inagaki T. Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster-Shafer theory // Reliability, IEEE Transactions on. — 1991. — Vol. 40, no. 2. — P. 182–188.

[13] Dubois D., Prade H. On the Combination of Evidence in Various Mathematical Frameworks // Reliability Data Collection and Analysis / Ed. by J. Flamm, T. Luisi. — 1992. — P. 213–241.

[14] Smarandache F. Unification of Fusion Theories (UFT) // International Journal of Applied Mathematics & Statistics. — 2004. — Vol. 2. — P. 1–14.

[15] Zadeh L. A simple view of the Dempster-Shafer Theory of Evidence and its implication for the rule of combination // The AI Magazine. — 1986. — Vol. 7, no. 2. — P. 85–90.

[16] Josang A. A Logic for Uncertain Probabilities // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. — 2001. — June. — Vol. 9, no. 3. — P. 279–311.

[17] Josang A. Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic // 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11). — Perugia, 2011. — September.

[18] Josang A., Hankin R. Interpretation and Fusion of Hyper Opinions in Subjective Logic // 15th International Conference on Information Fusion (FUSION 2012). — Singapore, 2012. — July.

Некоторые альтернативные методы моделирования субъективных суждений

Байесовский подход [3, 4, 5]

Значения плотности вероятности (п.в.) неизвестного параметра интерпретируются как степени уверенности в истинности его значений.

- Эмпирическая верификация: чем больше п.в. наблюденных результатов, тем больше они подтверждают субъективную модель.
- Эмпирическая коррекция: пересчет п.в. по формуле Байеса при условии, что получены результаты наблюдений.

- Эмпирическое восстановление: как коррекция, но в качестве начальной п.в. используется п.в., соответствующая незнанию объекта исследования (как правило, выбирается на основе принципа недостаточного основания[6], принципа максимальной энтропии[6] и т.п.[7]).

Проблема: выбор п.в., соответствующей незнанию объекта исследования.

Теория Демпстера–Шеффера[8]

Неопределенная величина $\widetilde{x}$ характеризуется весовой функцией $m : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$, по которой определяются меры правдоподобия (значение которой для множества A интерпретируется как степени сомнения в $\widetilde{x} \notin A$) и доверия (значение которой для множества A интерпретируется как степени уверенности в $\widetilde{x} \in A$).

- Эмпирическая верификация: чем больше мера доверия полученных результатов, тем больше они свидетельствуют в пользу субъективной модели, чем меньше их мера правдоподобия, тем больше они ей противоречат.

Теория Демпстера–Шеффера

- Эмпирическое восстановление[9, 10] зависит от правила комбинирования весовых функций, поскольку для разбиения множества данных наблюдений весовая функция, соответствующая этому множеству, должна быть результатом комбинирования весовых функций, соответствующих элементам разбиения.
- Эмпирическая коррекция: весовая функция, полученная только по данным наблюдений, комбинируется с весовой функцией субъективной модели.

Проблема: выбор правила комбинирования весовых функций [11, 12, 13, 14], не приводящих к «парадоксальным» результатам (см. пример Заде[15]).

Субъективная логика[16]

Для каждого события, исключая $\varnothing$ и множество элементарных событий, задается его субъективный вес, интерпретируемый как уверенность в принадлежности значения неизвестного параметра этому событию при отсутствии знаний о принадлежности какому-либо из собственных подмножеств события, для элементарных событий также задаются их базовые частоты (оценки частот этих событий при отсутствии какой-либо дополнительной информации), и задается вес неопределенности, интерпретируемый как степень незнания принадлежности значения параметра какому-либо множеству.

- Эмпирическая верификация: чем больше субъективный вес наблюденных результатов, тем больше они свидетельствуют в пользу субъективной модели.

Субъективная логика

- Эмпирическая коррекция[18]: субъективные веса отображаются в распределение субъективной вероятности, оно корректируется с помощью формулы Байеса и отображается обратно в субъективные веса.
- Эмпирическое восстановление: осуществляется так же, как и эмпирическая коррекция, но в качестве начальной берется модель, соответствующая полному незнанию (нулевые субъективные веса, одинаковые базовые частоты и единичный вес неопределенности).

Проблемы: способы эмпирического восстановления и эмпирической коррекции основаны на соответствии между субъективными весами и распределениями байесовской вероятности и поэтому зависят от выбора семейства байесовских вероятностей.