

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук  
(ИПМех РАН)

**ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,  
ПОСВЯЩЁННАЯ  
85-ЛЕТИЮ ИГОРЯ АНАТОЛЬЕВИЧА КИЙКО  
«ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И ПРОБЛЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ  
С ЖИДКОЙ И ГАЗОВОЙ СРЕДОЙ»**

г. Москва, 16–18 октября 2017 г., ИПМех РАН,  
119526, пр-т Вернадского 101-1

Сборник трудов

МОСКВА ДИАЛОГ-МИФ 2017

Завойчинская Э.Б.

## О ТЕОРИИ ПОЭТАПНОГО УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

МТУ им. М.В. Ломоносова, Москва

В статье рассматриваются процессы хрупкого усталостного разрушения металлов и сплавов в областях многоциклового и гигациклового усталости при  $N_f \in [5 \cdot 10^3, 10^{10}]$  циклов и простых циклических нагружениях такого вида:

$$\sigma_{kk}(\tau) = \alpha_k \sigma_a f(\tau), f(\tau) = \sin(\omega\tau + \theta), k = 1, 2, 3, \tau \in [0, t] \quad (1)$$

$$|\sigma_{11}| \geq |\sigma_{22}| \geq |\sigma_{33}|, \alpha_k = \frac{\sigma_{kk}}{|\sigma_{11}|}, \alpha_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{11}}, \sigma_0 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}$$

Под  $\sigma_a$  понимают амплитуду максимального главного напряжения,  $N_f$  — долговечность по полному разрушению,  $\omega$  — частота изменения напряжений,  $\alpha_k$  — отношения главных напряжений.

На основе анализа результатов обширных экспериментально-теоретических исследований усталостного разрушения в металлах на микро-, мезо- и макроуровнях по физике твердого тела, материаловедению, механике деформируемого твердого тела предложена теория усталостного разрушения металлов и сплавов для таких процессов, охватывающий весь процесс поэтапно, с выделением типичного состояния — дефекта определенного масштабно-структурного уровня, и описывающая вероятность разрушения на каждом уровне системной рекуррентных определяющих соотношений [1–8].

Одна из основных задач, которая стояла перед этой работой, заключалась в следующем: как структурным закономерностям и физическим механизмам усталостного разрушения поставить в соответствие зависимость механических параметров, описывающих процесс разрушения в рамках механики деформируемого твердого тела с выходом на кривые усталости по определенному уровню накопленных дефектов. С целью ее решения сформулированы следующие гипотезы предлагаемой теории.

1. Известно [9–13], что в твердых телах после кристаллизации наблюдаются нарушения регулярной структуры: точечные дефекты (вакансионные кластеры, замещения и внедрения атомов, дефекты по Шоттки, междоузельные частицы, дефекты по Френкелю, включения чужеродных атомов, ионов, молекул, электронно-дырочные дефекты (например, отсутствие электронов при облучении), субмикротрещины), двумерные и трехмерные дефекты (границы зерен, дефекты упаковки, поверхности раздела фаз, двойники, поры

(скопления вакансий) и др. С ростом числа циклов нагружения эволюция этих дефектов приводит к формированию «упорядоченной самоорганизующейся полосовой структуры», связанной с единичным скольжением и их накоплением [11, 13]. При достижении критического значения плотности дефектов имеет место переход от этой структуры к хрупким микротрещинам, стабильность размеров которых создает возможность значительного увеличения их плотности. Последующие слияния микротрещин ведут к зарождению хрупких нераспространяющихся трещин внутри зерна и на границах зерен. С достижением плотности последних предельного значения происходят их слияния с образованием коротких трещин размеров зерна, которые формируют известный «речной узор» на поверхности образца с образованием экструдий и интрузий [14]. В результате слияния коротких трещин образуются транскристаллитные и зернограничные макротрещины с достижением линий необратимой повреждаемости Френча. Дальнейшая эволюция приводит к возникновению одиночных макротрещин и окончательному хрупкому разрушению металла. В пластичных материалах независимо от развития хрупких дефектов протекают процессы образования и развития дислокационной ячеистой структуры по механизмам двойникования и скольжения, что ведет к движению ансамблей зерен и зарождению вязких микротрещин с ямочным микрорељефом, эволюция которых приводит к вязким макротрещинам и вязкому макроразрушению. Например, в работах А.М. Глезера развитие хрупкого разрушения связывается с формированием «сетчатой структуры», развитие вязкого разрушения — с образованием «ячеистой структуры». Автором исследуются разные физические механизмы эволюции структур хрупких дефектов на разных масштабных уровнях внутри зерна — на стадии формирования сетчатой структуры и на стадии развития микротрещин.

Особенностью циклических нагружений является то, что развитие процесса разрушения при одноосном нагружении в области  $N_f \in [5 \cdot 10^6, 10^{10}]$  циклов происходит при упругом макродеформировании; при амплитуде, равной пределу выносливости металла, приводит к хрупкому макроразрушению по коротким трещинам и механизмам межзеренного или транскристаллитного скола. При  $N_f \in [5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^6]$  циклов в хрупких материалах процесс усталостного разрушения приводит к образованию хрупких единичных макротрещин при упругом деформировании и хрупкому макроразрушению. В пластичных материалах развиваются неупругие деформации величины порядка упругих деформаций, и тормозят развитие хрупких трещин. Усталостный излом имеет хрупкую кристаллическую и вязкую волокнистую составляющие.

2. Наблюдаемые дефекты, хрупкие микро- и макротрещины материалов относятся к разным структурным уровням, характеризующимся определенными состояниями структуры и механизмами разрушения. В физической ли-

тературе дефекты определяют как фазово-структурные неоднородности, и переход с одного масштабного уровня на другой называют фазовыми переходами.

В предлагаемой модели проведена систематизация известных данных по анализу микроструктуры металлов, на основе которой введена система из шести масштабно-структурных уровней, отвечающих разным стадиям развития хрупкого разрушения по разным физическим механизмам и построена классификация хрупкого разрушения по дефектам (разрушениям)  $i$ -го масштабного структурного уровня,  $i = 1, \dots, 6$ . Дефект  $i$ -го уровня характеризуются линейным размером  $l_i = l_i(\tau)$  и плотностью  $q_i = q_i(\tau)$  в предельном объеме  $V_c$  (в котором возможно зарождение начальной трещины механики разрушения). Предельное состояние дефекта  $i$ -го уровня определяется предельными линейным размером  $l_{f,i}$  и плотностью  $q_{f,i}$ .

Физическими образами дефектов первого уровня, развивающихся при действии нагружения в полосовых структурах, являются дефекты линейных размеров, в среднем,  $l_1 \leq 10^{-3}d$ . При амплитуде относительного нагружения выше предела чувствительности к циклическим напряжениям и критической плотности происходит переход от полосовой структуре к микротрещине, определяемой как микродефект второго уровня длины  $l_2 \in [10^{-3}, 10^{-2}]d$ . С дальнейшим увеличением амплитуды напряжения в результате слияния микротрещин зарождаются нераспространяющиеся трещины — дефекты третьего уровня,  $l_3 \in [10^{-2}, 10^{-1}]d$ , слияния которых ведут к образованию коротких (распространяющихся) трещин — дефектов четвертого уровня,  $l_4 \in [10^{-1}, 1]d$ , и переходу с микро- на мезоуровень. При амплитуде напряжений, равной пределу выносливости, имеет место хрупкое макроразрушение по дефектам четвертого уровня при макроупругом деформировании. С последующим увеличением амплитуды дефекты четвертого уровня растут, выходят за границы зерна, пересекают три-четыре зерна, зарождаются дефекты пятого и шестого уровней, которые относятся к дефектам мезоуровня. Эволюция дефектов мезоуровня приводит к одиночным хрупким макротрещинам и выходу на макроуровень, который изучается в механике разрушения [15].

На макроуровне ( $i = 1, 2, 3$ ) при макроупругом деформировании механические свойства меняются незначительно, имеет место стабилизация свойств. На каждом из микроуровней возможно появление дефектов других уровней, но в силу постоянных слияний их вкладом в вероятность разрушения можно пренебречь. На мезоуровне ( $i = 4, 5, 6$ ) происходит интенсивное изменение механических свойств металла.

В работах В.И. Бетехтина, А.Г. Кадомцева и др. [16] введена следующая классификация врожденных и приобретенных несплошностей (пор): субмикронесплошности, микронесплошности, макронесплошности (в среднем, размера зерна), эволюция которых описывается в точки зрения принципов термодинамики. В предлагаемой классификации субмикронесплошности относятся к дефектам первого уровня, микронесплошности — второго и третьего уровней, макронесплошности — четвертого уровня.

Данная классификация дефектов по шести уровням для материалов подобной внутренней структуры металлов в определенной мере условна. При исследовании конкретных материалов, возможно, возникнет необходимость ее дальнейшего уточнения.

3. Полагается, что образование дефектов каждого уровня происходит вследствие последовательного зарождения, развития и слияния дефектов предыдущих уровней.

Модель развивает подход теории накопления повреждений Ю.Н. Работнова [17], в которой хрупкое разрушение определяется как процесс роста и слияния микро- и макротрещин; «в процессе развития хрупкие трещины переходят все состояния одно за другим в одинаковой фиксированной последовательности».

4. Вводится непрерывная возрастающая усредняющая функция  $i$ -го уровня вида:  $l_i^* = l_i^*(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$ , имеющая размерность длины:  $l_i^*(\tau) = l_i(\tau) (q_i(\tau) V_c)^\gamma$ ,  $\gamma = \text{const}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Предельное состояние дефектов ( $i-1$ )-го уровня и образование дефектов  $i$ -го уровня характеризуется достижением функций  $l_{i-1}^* = l_{i-1}^*(\tau)$  своего предельного значения  $l_{f,i-1}^*$  в момент времени  $t_i = t_i(\sigma_d)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

В соответствии с теорией Ю.Н. Работнова вводится поврежденность как монотонно возрастающая функция структуры, определяющая состояние материала, принимающая при различиях в микроструктуре (по данным со шлифов) разные значения в моменты  $\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$  [17].

Поврежденность на  $i$ -м уровне (усталостное разрушение на  $i$ -м уровне)  $\Omega_i = \Omega_i(\tau)$  определяется в виде:

$$\Omega_i(\tau) = \frac{l_i^*(\tau)}{l_{f,i}^*}, \quad 0 \leq \Omega_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Случайные распределения по объему дефектов делает процесс усталостного разрушения стохастическим и возникает необходимость вероятностного

максимального главного напряжения при разрушении по дефектам мезоуровня).

**8. Определяющие соотношения для функций вероятности разрушения**  
 $Q_i = Q_i(\sigma_a, n)$ ,  $(0 \leq Q_i \leq 1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , по дефектам  $i$ -го уровня в предположении их равномерного распределения в объеме  $V_C$  в зависимости от амплитуды максимального главного напряжения  $\sigma_a$  и числа циклов нагружения  $n$  для нагружения (1), следуя методам механики деформируемого твердого тела и в соответствии с теорией размерности и подобия, задаются в таком виде:

на микроуровне (при  $\sigma_a \geq \sigma_{i-1}$ ,  $\lg n \geq \lg n_i(\sigma_a)$ ,  $\sigma_0 = 0$ ,  $n_1 = 1$ )

$$Q_i = F_i \left( \frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} \right) R_i \left( \frac{\lg n - \lg n_i(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_i(\sigma_i)} \right), \quad (2)$$

$$Q_i(n_{i+1}) = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

на мезоуровне – при  $\sigma_3 \leq \sigma_a$ ,  $\lg n \geq \lg n_4(\sigma_a)$ )

$$Q_4 = F_4 \left( \frac{\sigma_a - \sigma_3}{\sigma_4 - \sigma_3} \right) R_4 \left( \frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_4 - \lg n_4(\sigma_4)} \right), \quad Q_4(n_5) = 1, \quad (3)$$

при  $\sigma_4 \leq \sigma_a$ ,  $\lg n \geq \lg n_5(\sigma_a)$ )

$$Q_5 = F_5 \left( \frac{\sigma_a - \sigma_4}{\sigma_5 - \sigma_4} \right) R_5 \left( \frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_5 - \lg n_4(\sigma_5)} \right), \quad Q_5(n_6) = 1, \quad (4)$$

$$Q_6 = G_4 \left( \frac{\sigma_5 - \sigma_a}{\sigma_5 - \sigma_4} \right) R_4 \left( \frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_4 - \lg n_4(\sigma_4)} \right), \quad Q_6 = 0,$$

при  $\sigma_5 \leq \sigma_a$ ,  $\lg n \geq \lg n_6(\sigma_a)$ )

$$Q_6 = F_6 \left( \frac{\sigma_a - \sigma_5}{\sigma_6 - \sigma_5} \right) R_6 \left( \frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_6 - \lg n_4(\sigma_6)} \right), \quad Q_6(n_7) = 1 \quad (5)$$

подхода при его описании. Так для каждого момента времени  $\tau$ ,  $\tau \in [0, t]$ , значения  $l_i^*$  и поврежденность  $\Omega_i$  являются случайными величинами. Отсюда возникает необходимость ввести функцию вероятности разрушения по дефектам  $i$ -го уровня (вероятности разрушения на  $i$ -м уровне), которая является основной определяющей функцией предлагаемой математической модели усталостного разрушения.

**5. Под вероятностью разрушения на  $i$ -м уровне**  $Q_i = Q_i(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , понимается вероятность события, при котором усредняющая функция  $i$ -го уровня  $l_i^* = l_i^*(\tau)$  достигает предельного значения  $l_{f,i}^*$  в момент времени  $\tau$  (дефекты  $i$ -го уровня – предельного состояния),  $\tau \in [0, t]$ .

Согласно постулату макроскопической определенности А.А. Ильюшина процесс усталостного разрушения на интервале времени  $\tau \in [0, t]$  определяется процессом деформирования металла. Развитие хрупкого усталостного разрушения определяется процессом упругого деформирования, и вероятность хрупкого разрушения нужно полагать функционалом от процесса нагружения. В данной работе вероятность хрупкого разрушения рассматривается в виде функции от процесса нагружения и строится система определяющих соотношений для  $Q_i = Q_i(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

**6.** В соответствии с известными данными развитие усталостного разрушения зависит от вида напряженно-деформированного состояния. Построение модели для произвольного простого нагружения (1) базируется на характеристиках разрушения материалов при трех базовых видах симметричного нагружения в условиях плоского напряженного состояния: одноосном нагружении:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \text{ сдвиге: } \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0,$$

и двухосном равномерном нагружении:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ .

**7.** Разрушения по дефектам мезоуровня рассматриваются как независимые события. Вводится функция вероятности разрушения по дефектам мезоуровня  $Q = Q(\tau)$  в виде:

$$Q(\tau) = \sum_{i=4}^6 \frac{Q_i(\tau)}{1 - Q_i(\tau)} \prod_{j=4}^6 (1 - Q_j(\tau)), \quad \text{где } Q_i = Q_i(\tau) - \text{вероятности разрушения по дефектам } i\text{-го мезоуровня, } i = 4, 5, 6.$$

**Кривая усталости металла по дефектам мезоуровня** определяется уравнением:  $Q(t_f) = 1$ , из которого находится долговечность металла по дефектам мезоуровня:  $t_f = t_f(\sigma_f)$  для произвольного процесса (1) ( $\sigma_f$  – амплитуда

$$Q_5 = G_5 \left( \frac{\sigma_6 - \sigma_a}{\sigma_6 - \sigma_5} \right) R_5 \left( \frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_5 - \lg n_4(\sigma_5)} \right), Q_4 = 0$$

В выражениях (2) – (5) под  $n_i = n_i(\sigma_a)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , понимается число циклов, при котором при амплитуде максимального главного напряжения  $\sigma_a$  функция  $i_{i-1}^* = i_{i-1}^*(n)$  достигает предельного значения  $i_{f,i-1}^*$ , дефект  $(i-1)$ -го уровня – предельного состояния, и начинается развитие дефектов  $i$ -го уровня,  $i = 2, \dots, 6$ , в частности,  $n_7 = n_7(\sigma_a)$  – число циклов достижения дефектами шестого уровня предельного состояния. Введена система материальных функций  $(\sigma_i = \sigma_i(\alpha_2, \alpha_3, \omega), N_i)$ , при которых дефект  $i$ -го уровня достигает предельного состояния и функция  $i_i^* = i_i^*(n)$  – предельного значения  $i_{f,i}^*$ , числа циклов  $N_i$  – базовые числа циклов для  $i$ -го уровня,  $i = 1, \dots, 6$ . Предлагается методика определения базовых констант модели по данным стандартных усталостных испытаний с учетом результатов проведенного анализа физических закономерностей по развитию хрупких трещин.

Предлагаемая модель позволяет подбирать вид функций  $F_i = F_i(\sigma_a)$  и  $R_i = R_i(n)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , в выражениях (2) – (5) для конкретных материалов.

Здесь рассмотрено ограничено функциями следующего вида:

$$F_i = \left( \frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} \right)^{\beta_i}, R_i = \left( \frac{\lg n - \lg n_i(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_i(\sigma_i)} \right)^{\phi_i}, i = 1, \dots, 4; \quad (6)$$

$$F_i = \left( \frac{\sigma_a - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} \right)^{\chi_i}, R_i = \left( \frac{\lg n - \lg n_4(\sigma_a)}{\lg N_i - \lg n_4(\sigma_i)} \right)^{\phi_i}, G_i = \left( \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_a}{\sigma_{i+1} - \sigma_i} \right)^{\chi_i}, i = 4, 5$$

где  $\beta_i = \beta_i(\alpha_2, \alpha_3, \omega)$ ,  $\phi_i = \phi_i(\alpha_2, \alpha_3, \omega)$ ,  $\chi_i = \chi_i(\alpha_2, \alpha_3, \omega)$  – материальные функции.

9. Для определения материальных функций

$$(\sigma_i = \sigma_i(\alpha_2, \alpha_3, \omega), N_i, i_{f,i}^*(\alpha_2)), i = 1, \dots, 6,$$

требуется большой объем экспериментов с обработкой шпифов методами анализа микроструктуры. В силу трудоемкости и недостаточности имеющихся

данных это в большинстве случаев не представляется возможным. Поэтому на основе анализа физических закономерностей развития хрупких трещин вводятся ряд предположений. Вначале рассмотрим метод нахождения материальных функций для базовых нагружений ( $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0, 1, -1$ ). Полагается, что пределы выносливости металла при базовых видах нагружения являются материальными константами для дефектов четвертого уровня  $(\sigma_4, N_4)$ , при которых функция  $i_4^* = i_4^*(n)$  достигает предельного значения  $i_{f,4}^*$  и имеет место макро разрушение по дефектам четвертого уровня.

Заметное изменение микро- и макроструктуры металла, средних размеров и плотности микро- и макротрещин наблюдается при изменении чисел циклов нагружения на десятичные порядки. Следуя этому принимается:

$$\lg N_i = \lg N_4 + 4 - i, i = 1, \dots, 4, \lg N_i = \lg N_4 + 3 - i, i = 5, 6.$$

На микроуровне в выражениях (6) можно положить:  $\beta_i = \chi_i = 1$ ,  $\phi_i = 1/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом в качестве материальных констант можно выбрать амплитуды  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , при которых достигается соответствующее предельное значение  $i_i^*$  при числе циклов  $N_4$ . Отсюда по модели при числе  $N_4 = 10^6$  циклов базовые амплитуды следующие:  $\sigma_1 \approx 0.5\sigma_4$ ,  $\sigma_2 \approx 0.604\sigma_4$ ,  $\sigma_3 \approx 0.75\sigma_4$ . Если известны значения пределов чувствительности материала к циклическим напряжениям  $\sigma_T^H$ , ниже которых не наблюдается структурных изменений, то материальные константы выбираются так:  $(\sigma_1(\alpha_2) = \sigma_T^H, N_1), \alpha_2 = 0, -1, 1$ .

Серии поверочных экспериментов для базовых характеристик  $(\sigma_i(\alpha_2), N_i, i_{f,i}^*(\alpha_2))$   $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\alpha_2 = 0, -1, 1$ , могут быть построены таким образом. При амплитуде, равной пределу выносливости, партия образцов доводится до макро разрушения, определяется число циклов  $N_4$ , в хрупком изломе измеряются размеры дефектов четвертого уровня, находится их плотность и значение  $i_{f,4}^*$ . Осуществляется нагружение с амплитудой  $\sigma_i$  до числа циклов

$N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , по фотографиям микроструктуры определяются дефекты  $i$ -го уровня и их плотность. Вычисляется значение  $i_i^*(N_i)$ , и, догружая образец, по

данным со шлифов проверяется, является ли оно максимальным, равным  $l_{f,i}^*$ , в противном случае число циклов  $N_i$  корректируется.

На мезоуровне для базовых нагрузений полагается:  $\sigma_6 = \sigma_s$ ,  $\sigma_6 = \tau_s$ ,  $\hat{\sigma}_6 = \hat{\sigma}_s$  ( $\sigma_s, \tau_s$  — пределы текучести при одноосном нагружении, сдвиге и двухосном равномерном нагружении соответственно) при числе циклов  $N_6$ . По данным серии опытов с различными амплитудами напряжений из диапазона  $\sigma_a \in (\sigma_{-1}, \sigma_s)$  и анализа микроструктуры экспериментально определяется амплитуда напряжений  $\sigma_5$ , при которой на базе  $N_5$  циклов функция  $l_5^* = l_5^*(n)$  достигает предельного значения  $l_{f,5}^*$ . При  $(\sigma_i, N_i)$ ,  $i = 5, 6$ , возможно как полное хрупкое макроразрушение образца, так и образование одиночных трещин длины, в среднем, равной  $L = l_{f,i}^*$ ,  $i = 5, 6$ .

Для нахождения функций  $\beta_i, \phi_i, \chi_i$  необходимо задавать дополнительные базовые характеристики модели.

#### 10. Выражение для материальных функций

$$(\sigma_i = \sigma_i^*(\alpha_2, \alpha_3, \omega), N_i, l_{f,i}^*(\alpha_2)), i = 1, \dots, 6,$$

при произвольном процессе (1) предлагается представлять в следующем виде:

$$(\sigma_i = \sigma_i(N_i, \omega) \bar{\sigma}_i(\alpha_2, \alpha_3, \hat{\eta}_i, \hat{\eta}_i), i = 1, \dots, 6 \quad (7)$$

$$\text{где } \hat{\eta}_i = \frac{\sigma_i(\alpha_2 = 0, N_i, \omega)}{\sigma_i(\alpha_2 = -1, N_i, \omega)}, \quad \hat{\eta}_i = \frac{\sigma_i(\alpha_2 = 0, N_i, \omega)}{\sigma_i(\alpha_2 = 1, N_i, \omega)}$$

Для дефектов первых трех уровней можно также принять такие выраже-

$$\text{ния: } \hat{\eta}_i = \frac{1}{3} (\hat{\eta}_4(i-1) + 4 - i), \hat{\eta}_i = \frac{1}{3} (\hat{\eta}_4(i-1) + 4 - i), i = 1, 2, 3.$$

Функции  $\bar{\sigma}_i(\alpha_2, \alpha_3, \hat{\eta}_i, \hat{\eta}_i)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , в (7) выбираются так:

$$\text{для хрупких материалов}$$

$$\text{при } -1 \leq \alpha_2 \leq 0 \quad \bar{\sigma}_i = \left[ 6 - \hat{\eta}_i - \alpha_2(2\hat{\eta}_i - 6) + \alpha_0(3\hat{\eta}_i - 15) \right]^{-1},$$

$$\text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_3 \geq 0 \quad \bar{\sigma}_i = \left[ 1 + \alpha_2(\hat{\eta}_i - 1) + \alpha_3(\hat{\eta}_i - 1) \right]^{-1},$$

$$\text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_3 < 0 \quad \bar{\sigma}_i = \left[ 6 - \hat{\eta}_i - \alpha_3(2\hat{\eta}_i - 6) + \alpha_0(3\hat{\eta}_i - 15) \right]^{-1},$$

Для пластичных материалов

$$\text{при } -1 \leq \alpha_2 \leq 0 \quad \bar{\sigma}_i = \left[ 3\alpha_0(1 + \alpha_2) + \frac{1}{2} \hat{\eta}_i^2(1 - \alpha_2 - 3\alpha_0) \right]^{-1/2}$$

$$\text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_3 \geq 0 \quad \bar{\sigma}_i = \left[ 3\alpha_0(1 + \alpha_2) + \frac{1}{2} \hat{\eta}_i^2(1 - \alpha_2 - 3\alpha_0) \right]^{-1/2}$$

$$\text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_3 < 0 \quad \bar{\sigma}_i = \left[ 3\alpha_0(1 + \alpha_3) + \frac{1}{2} \hat{\eta}_i^2(1 - \alpha_3 - 3\alpha_0) \right]^{-1/2}$$

Такой выбор выражений обеспечивается проведенным сравнением предсказаний циклической прочности по предлагаемой модели с известными временными критериями и представительным объемом экспериментальных данных. Так, для симметричного одноосного нагружения с кручением ( $-1 \leq \alpha_2 \leq 0, \alpha_3 = 0$ ) предлагаемое соотношение для хрупких материалов пре-

образуется к виду:  $\bar{\sigma}_i = \left[ 1 - \alpha_2(\eta_i - 1) \right]^{-1}$ , и совпадает с известными критериями МакДиамида, Магаке, Финдли, Данг Вана, Зеннера Ли, Пападопулоса, Кенмена, Завойчинского [15, 18, 19] и имеет удовлетворительное соответствие следствиям подходов Сайнса, Кросслэнда, Какуно, Кавады, Делперо для большого класса материалов, имеющих широкое экспериментальное обоснование. Для двухосных нагружений ( $0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_3 = 0$ ) хрупких материалов выражение имеет вид:  $\bar{\sigma}_{1,i} = \left[ 1 + \alpha_2(\hat{\eta}_i - 1) \right]^{-1}$ , и совпадает со следствиями подходов МакДиамида, Данг Вана и др. Для симметричного одноосного нагружения с кручением ( $-1 \leq \alpha_2 \leq 0, \alpha_3 = 0$ ) пластичных материалов предлагаемое соотношение вида:

$$\bar{\sigma}_i = \left[ (1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2 \eta_i^2 \right]^{-1/2}$$

совпадает с критериями Гафа, Полларда, Ли и имеет удовлетворительное соответствие следствиям подходов Карпинтери, Сланьоли и др. Для двухосных

напряжений пластичных материалов ( $0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_3 = 0$ ) следствия предельных соотношений вида:  $\bar{\sigma}_i = [(1 - \alpha_2)^2 + \alpha_2 \bar{\sigma}_i^2]^{-1/2}$ , удовлетворя-

тельно соответствуют следствиям подходов Гюфа, Завойчинского и др. [15, 19]. По предложенной модели проведен анализ экспериментальных данных по развитию трещин в представительном ряде конструкционных сталей: углеродистых, аустенитно-мартенситных, коррозионно-стойких, нержавеющей, легированных, трубных сталей; чугунов; металлов: молибдена, никеля, свинца, титана и др.; никелевых, магниевых, алюминиевых, титановых сплавов при различных процессах пропорционального нагружения: одноосном нагружении; сдвиге; двухосных нагружениях и одноосных нагружениях с кручением с различными отношениями амплитуд.

В качестве примера на рис. 1 представлены результаты анализа опытных данных [20] и исследований микроструктуры трубной стали S135 (0.32% C) (характеристики стали: временное сопротивление  $\sigma_d = 1197 \text{ МПа}$ , предел те-

кучести  $\sigma_s = 1112 \text{ МПа}$ , характерный средний размер зерна  $d \approx 0.02 \text{ мм}$ ) при симметричном осевом нагружении с кручением,  $\alpha_2 = -0.72$ . На рис. 1, а изображены базовые константы (крестиками), области развития I-VII и границы зарождения 1-1., 6-6 дефектов шести уровней и кривая усталости по методу Зоддефектам  $\bar{f}t$ , рассчитанные по модели. По опытным данным построена кривая усталости по полному разрушению  $FT$ . При четырех амплитудах максимального главного напряжения  $\sigma_a$  (на рис. 1, а-d) на разных стадиях нагружения проводились исследования микроструктуры, соответствующие фотографии представлены на рис. 1, б и перед разрушением на рис. 1, в.

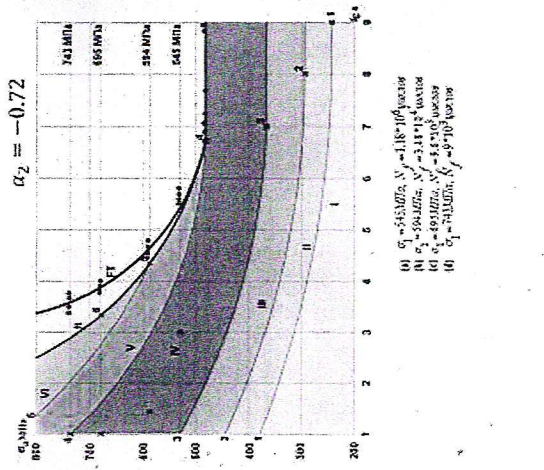


Рис. 1

Из анализа следует, что согласно модели, в стали развиваются дефекты четвертого уровня при ( $\sigma_a = 545 \text{ МПа}, n = 10^3 \text{ циклов}$ ), ( $\sigma_a = 594 \text{ МПа}, n = 40 \text{ циклов}$ ) и ( $\sigma_a = 695 \text{ МПа}, n = 10 \text{ циклов}$ ) (точки отмечены крестиками в области IV на рис. 1 (а)); при ( $\sigma_a = 743 \text{ МПа}, n = 10 \text{ циклов}$ ) достигаются предельное состояние дефектами четвертого уровня и образуются дефекты пятого уровня. Состояние перед разрушением при амплитудах  $\sigma_a = 545 \text{ МПа}$  и  $\sigma_a = 594 \text{ МПа}$  характеризуется достижением предельного состояния дефектами пятого уровня; при амплитудах  $\sigma_a = 695 \text{ МПа}$  и  $\sigma_a = 743 \text{ МПа}$  – достижением предельного состояния дефектами шестого уровня, что подтверждается опытными данными. Расчетная кривая усталости  $\bar{f}t$  по хрупким дефектам мезоуровня лежит левее кривой полного разрушения  $FT$ , в материале развивается вязкое разрушение, которое тормозит развитие хрупких трещин и увеличивает долговечность стали.

Рассчитанные по модели области развития I-VII и границы зарождения 1-1., 6-6 дефектов шести уровней в зависимости от отношения амплитуд  $\alpha_2$  симметричного осевого нагружения с кручением изображены на рис. 2.

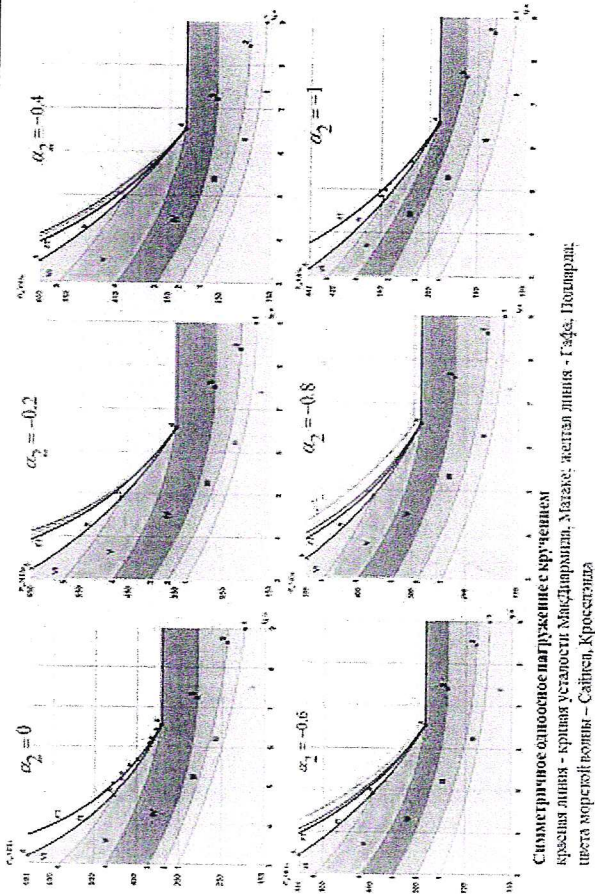


Рис. 2. а - при  $\alpha_2 = 0$ ; б - при  $\alpha_2 = -0.4$ ; в - при  $\alpha_2 = -0.8$ , г - при  $\alpha_2 = -1$  для стали 12XН2А с пределами выносливости  $\sigma_{-1} = 390$  МПа, и  $\tau_{-1} = 252$  МПа при одноосном нагружении и сдвиге соответственно ( $\sigma_{\sigma} = 900$  МПа,  $\sigma_{\tau} = 683$  МПа,  $\tau_{\sigma} = 581$  МПа,  $\tau_{\tau} = 442$  МПа,  $\eta_{\sigma} = 0.9$  [21]).

На рис. 2 представлены кривые усталости МакДиармида – Матаке, Гафа – Полярда, Сайнса – Кросслэнда; опытные данные (черные точки) и рассчитанная по модели кривая усталости  $F_T$  по полному разрушению (с учетом дороста хрупких трещин по соотношению Пэрриса), которая близка к кривой усталости МакДиармида – Матаке. Расчетная кривая усталости  $f_f$  определяет наименьшую долговечность по образованию хрупких макротрещин, в области  $N_f \in [10^5, 5 \cdot 10^6]$  циклов хорошо соответствует имеющимся экспериментальным данным для стали 12XН2А.

На рис. 3 представлены результаты расчетов для этой стали в зависимости от отношения амплитуд  $\alpha_2$  симметричного двухосного нагружения.

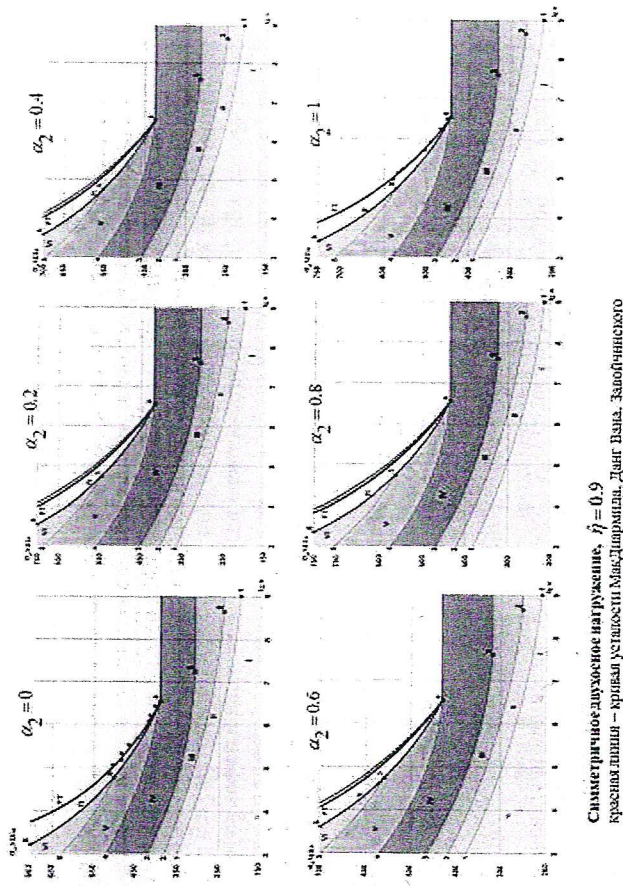


Рис. 3

Полученные теоретические результаты применяются при оценке безопасности конструкций в расчетах долговечности конструктивных элементов по образованию дефектов, описанных на физические закономерности устойчивого разрушения материала.

### БИБЛИОГРАФИЯ

1. Завойчинский Б.И., Завойчинская Э.Б. Физическая механика микро- и макроразрушения сталей и сплавов при циклическом нагружении//Приложение к журналу «Сравочник. Инженерный журнал», 8(173), 2011. 32 с.
2. Завойчинская Э.Б. Процесс микроразрушения металлов при сложном нагруженном состоянии //Механика машин, механизмов и материалов, № 3(16), 2011. с. 34–37.
3. Завойчинский Б.И., Завойчинская Э.Б.Микромеханика разрушения металлов при сложном нагруженном состоянии // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 2, 2011. с. 31–39.
4. Завойчинская Э.Б. Микро- и макромеханика разрушения элементов конструкций // Механика твердого тела, № 3, 2012. с. 54–77.
5. Завойчинская Э.Б. О теории поэтапного накопления усталостных повреждений в металлах при пропорциональном циклическом нагружении// Изв. МГТУ МАМИ. Естественные науки. Т. 4, № 2(24), 2015. С. 6875.



6. Завойчинская Э.Б. Развитие микро- и макротрещин в металлах и сплавах при пропорциональном циклическом нагружении // Проблемы машиностроения и автоматизации, № 1. 2016. С. 98–108.
7. Завойчинская Э.Б. О критерии поэтапного усталостного разрушения металлов на различных масштабно-структурных уровнях при одноосном нагружении с несимметричным циклом // Научные труды Международной конференции «Живучесть и конструкционное материаловедение» (ЖивКоМ-2016) (Москва, 26–28 окт. 2016 г.). М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2016. С. 67–70.
8. Завойчинская Э.Б. О критерии усталостного разрушения металлов на различных масштабно-структурных уровнях при одноосном нагружении с несимметричным циклом // Материалы XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. М.: ООО «ТРП», 2017. Т.2. С. 119–127.
9. Завойчинская Э.Б., Кийко И.А. Введение в теорию процессов разрушения твердых тел. М.: МГУ, 2004. 168 с.
10. Ботвина Л.Р. Разрушение. Кинетика, механизмы, общие закономерности. М.: Наука, 2008. 334 с.
11. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. М.: Металлургия, 1975. 456 с.
12. Клевцов Г.В., Ботвина Л.Р., Клевцова Н.А., Лимарь Л.В. Фрактодиагностика разрушения металлических материалов и конструкций. М.: МИСиС, 2007. 264 с.
13. Терентьев В.Ф., Коралева С.А. Усталость металлов. М.: Наука, 2015. 480 с.
14. Miller K.J., de Los Rios E.R. The Behaviour of Short Fatigue Cracks. John Wiley & Sons Inc., 2005. 560 p.
15. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб: «Профессия», 2012. 552 с.
16. Черемский П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И. Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990. 376 с.
17. Работнов Ю.Н. Сопроотивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
18. Махутов Н.А. Сопроотивление элементов конструкций хрупкому разрушению. М.: Машиностроение, 1973. 201 с.
19. Завойчинский Б.И. Долговечность магистральных и технологических трубопроводов (теория, методы расчета, проектирование). М.: Недра, 1992. 271 с.
20. Luo She-ji, Zhao Kang, Wang Rong. Biaxial Fatigue Behavior Under Combined Axial and Torsional Loading for S135 Drill Pipe Steel. Journal of Materials Engineering, 2013. vol. 3. N 1. P. 40-44.
21. Прочность материалов и конструкций // Троценко В.Т. и др. Киев: Академперлюдика, 2005. 1088 с.

## Ле Тхи Тхань, И.М. Лавит ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Тульский государственный университет

Рассматривается решение задачи о краевой трещине нормального разрыва в полуплоскости, отличающееся простотой и позволяющее не только найти коэффициент интенсивности напряжений, но и легко вычислить напряжения в любой точке, что важно, например, для решения упругопластических задач и задач о взаимодействии трещины. Решение основано на методе решения плоских задач, который применим, когда исходную задачу можно представить, как объединение более простых задач, решение которых известно. В рамках этого подхода поставленная задача формулируется как предельный случай задачи о двух пересекающихся трещинах в плоскости при условии, что длина одной из них стремится к бесконечности. При этом решение задачи получается, как суперпозиция известных решений задачи о трещине конечной длины в плоскости и задачи о полуплоскости, находящейся под действием распределенной нагрузки. Взаимовлияние решений этих двух задач учитывается введением дополнительных нагрузок, для определения которых получается интегральное уравнение типа Фредгольма. Для его решения в данной работе использовался метод Галеркина. В качестве координатных функций брались полиномы Лежандра. Рассмотрение тестовых задач позволяет сделать вывод о приемлемой точности и быстрой сходимости полученного решения.

Рассматривается упругая полуплоскость с краевой прямолинейной трещиной длиной  $a$  (рис. 1), к краям которой симметрично приложена распределенная нормальная нагрузка интенсивностью  $P(x_1)$ . Требуется рассчитать коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  и напряжения во внутренних точках полуплоскости.

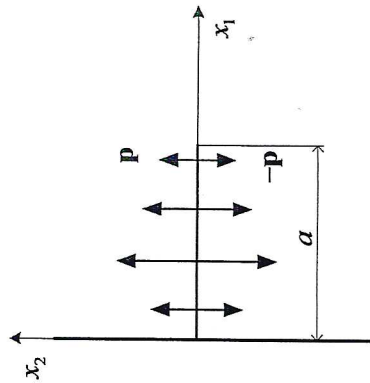


Рис. 1. Полуплоскость с краевой трещиной:  $a$  – длина трещины. К краям трещины приложены равные противоположно направленные нагрузки, причем  $P_1 = 0, P_2 = P(x_1)$

Для решения этой задачи поступим следующим образом [1, 2]. Рассмотрим плоскость с двумя пересекающимися трещинами (рис. 2): трещиной 1 длиной