

А. С. Кочуров

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОПЕРЕЧНИКОВ

Часть 1

В данном пособии излагается первая часть специального курса "Введение в теорию поперечников", читаемого на механико-математическом факультете МГУ. Основное внимание уделено общим связям между различными поперечниками и некоторым примерам точного вычисления значений поперечников.

Вводная часть

С понятиями приближения и поперечника обычно приходится иметь дело при анализе задач, в которых требуется получить определённый количественный ответ, однако точное его значение указать или невозможно, или слишком сложно. Простейшей (и, в некотором смысле, универсальной) схемой такой задачи (см. [3], [4]) может служить вопрос о вычислении значения

$$F(x)$$

при заданных величине $x \in A$ и отображении $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ (часто требуется организовать вычисление $F(x)$ для ряда точек $x_1, x_2, x_3, \dots$). Если считать, что при этом можно использовать только 4 арифметических операции: "+", "-", "×", ":", и ограниченное количество конечных ячеек для хранения промежуточных и окончательных результатов, то, в связи с этим, появляются несколько задач. Один ряд из них связан с необходимостью экономить ячейки памяти и время работы, т.е. в конечном итоге количество используемых для вычисления арифметических операций. Другой ряд задач связан с тем, что для проведения реальных вычислений требуется заменить элементы x множества A на новые элементы $\tilde{x}$, которые полностью определяются конечным числом " n " параметров (при этом каждый такой параметр имеет длину " m ", например, в десятичной записи) нового множества $\tilde{A} = \tilde{A}(n, m)$, и которые будут использоваться в вычислениях вместо x . Требуется также заменить вычисление $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ конечным набором арифметических операций $\tilde{F} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$ и, в итоге, вместо вычисления $F(x)$ в точке $x \in A$ в качестве ответа выдавать другое число $\tilde{F}(\tilde{x})$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \tau \downarrow & & \uparrow id \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Однако, если осуществить эту процедуру, то необходимо научиться отвечать на вопрос о её качестве. Поскольку количественной

оценкой такой замены можно считать, например, величину

$$\sup_{x \in A} |F(x) - \tilde{F}(\tau(x))|, \quad (1)$$

то, если указанная численная характеристика в некотором смысле мала, то и предъявленная замена $(\tau, \tilde{F})$ вместо F удовлетворительна, если же величина из (1) велика, то и замена плоха. Тем самым, решение задачи (1) может быть использовано при оценивании замены F на $(\tau, \tilde{F})$.

Другим (несколько упрощённым) вариантом оценки является подход, при котором задано нормированное (или может быть даже метрическое) пространство X и задача (1) разделена на две части: считаем, что имеются $A, \tilde{A} \subset X$, $F, \tilde{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$, а качество метода $(\tau, \tilde{F})$ определяется двумя характеристиками (2) и (3):

$$\sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|, \quad (2)$$

$$\sup_{x \in A} |F(x) - \tilde{F}(x)|, \quad (3)$$

а также гладкостью отображения F или отображения $\tilde{F}$

$$\sup_{x \in A} |F(x) - \tilde{F}(\tau(x))| \leq \sup_{x \in A} |F(x) - \tilde{F}(x)| + \sup_{x \in A} |\tilde{F}(x) - \tilde{F}(\tau(x))| \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in A} |F(x) - \tilde{F}(\tau(x))| \leq \\ & \sup_{x \in A} |F(x) - F(\tau(x))| + \sup_{x \in A} |F(\tau(x)) - \tilde{F}(\tau(x))|. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом обычные предположения о гладкости F или $\tilde{F}$ применяются, например, в виде

$$|F(x) - F(\tau(x))| \leq C\|x - \tau(x)\| \text{ или } |\tilde{F}(x) - \tilde{F}(\tau(x))| \leq C\|x - \tau(x)\|.$$

Видно, что такой подход требует предположить, что элементы x и $\tau(x)$ можно сравнивать между собой: считается, что $A, \tilde{A}$ — это подмножества линейного пространства X с нормой $\|\cdot\|_X$ (нормированного пространства). Если так, то для сравнения элементов

x и $\tau(x)$ следует найти разность между ними и вычислить длину получившегося вектора

$$\text{dist}(x, \tau(x)) = \text{dist}(x - \tau(x), 0) = \|x - \tau(x)\|.$$

Примеры 1. (нормированного пространства)

а) если $X = \mathbb{R}$ – числовая прямая, то $\|x - \tau(x)\| = |x - \tau(x)|$,
 б) на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в пространстве $\mathbb{R}^3$ в качестве нормы можно выбрать привычное измерение длины как (евклидовой) длины вектора.

В общем случае линейное пространство X называется нормированным (см. [9]) (над полем скаляров $\mathbb{R}$), если в дополнение к свойствам линейности на нём задана неотрицательная функция $\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ (норма), удовлетворяющая трём аксиомам

1. $\|x\|_X \geq 0$, $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – неотрицательность нормы,
2. $\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha| \cdot \|x\|_X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – однородность нормы,
3. $\|x_1 + x_2\|_X \leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X$ – неравенство треугольника.

Нормированное пространство, удовлетворяющее свойству полноты, называется банаховым пространством, а запись $X \in (B)$ означает, что X – банахово пространство.

Если же аксиома неотрицательности в определении нормированного пространства выполняется в сокращённом виде

$$1'. \|x\|_X \geq 0,$$

то линейное пространство X (с аксиомами 1', 2, 3) называется полунормированным.

Разделение задачи (1) на две части, как в (4) и в (5), считается весьма удобным, поскольку позволяет сократить количество модельных задач вида (1), которые требуется изучить: вместо сравнения $F(\cdot)$ с $\tilde{F}(\tau(\cdot))$ нужно порознь сравнить $F(\cdot)$ с $\tilde{F}(\cdot)$ и тождественное отображение с отображением $\tau(\cdot)$.

Главным образом именно величина второй части этого сравнения является основой для постановки задач теории аппроксимации

$$\sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|_X, \quad (6)$$

поскольку первую его часть

$$\sup_{x \in A} |F(x) - \tilde{F}(x)|$$

можно переписать в виде (6).

Определения поперечников. Обозначения и примеры

Обсудим задачу (6) более подробно. В ней A – подмножество нормированного пространства X , $\tau : A \rightarrow \tau(A)$ – отображение, каждому $x \in A$ сопоставляющее $\tau(x) \in X$, причём так, что совокупность $\tau(A)$ всех таких элементов представляет " n "-параметрическое семейство:

$$\tau(A) \subset M \leftrightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Введём специальные обозначения для некоторых " n "-параметрических подмножеств X , часто используемых в теории приближений:

1) $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(X)$ – все линейные подпространства размерности не выше n . В частности, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X)$ – это совокупность всех прямых пространства X , проходящих через $0 \in X$ и нулевое подпространство (начало координат). Через $\mathcal{L}_n^* = \mathcal{L}_n^*(X)$ будем обозначать все линейные подпространства X размерности в точности равной n .

2) $\mathcal{Aff}_n = \mathcal{Aff}_n(X)$ – все линейные подпространства размерности не выше n , а также всевозможные их сдвиги на вектора из нормированного пространства X . Это семейство " n "-параметрических подмножеств X будем называть семейством линейных многообразий размерности не выше n . В частности, $\mathcal{Aff}_1(X)$ – это совокупность всех прямых пространства X , объединённая с совокупностью всех точек пространства X . Пусть $\mathcal{Aff}_n^* = \mathcal{Aff}_n^*(X)$ – все линейные подпространства X (и их сдвиги на вектор) размерности в точности n .

3) $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^n(X)$ – все замкнутые линейные подпространства коразмерности не выше n . Другими словами, то что $M \in \mathcal{L}^n$ означает (для $M \neq X$) существование непрерывных линейных функционалов $x_i^* : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, $k \leq n$, для которых $M = \{x \in X : x_i^*(x) = 0, i = 1, \dots, k\}$. Семейство $\mathcal{L}^n(X)$ будем называть семейством линейных подпространств коразмерности не

выше n . В частности, $\mathcal{L}^1(X)$ – это совокупность всех гиперплоскостей в X и само пространство X . Через $\mathcal{L}^{n*} = \mathcal{L}^{n*}(X) \subset \mathcal{L}^n(X)$ будем обозначать все линейные подпространства X коразмерности в точности n .

4) $\Xi_n = \Xi_n(X)$ – все непустые точечные множества из X , с числом элементов в каждом из которых не больше чем $n \in \mathbb{N}$. Это семейство также удобно относить к семейству " n "-параметрических. В качестве примера отметим, что $\Xi_1(X)$ можно естественным образом отождествить с X . Через $\Xi_n^* = \Xi_n^*(X)$ обозначаем совокупность всех точечных подмножеств из X , число элементов в каждом из которых равно n .

5)

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n(X) = \{\cup_{i=1}^k M_i : M_i \in \mathcal{A}ff_n(X), i = 1, \dots, k\}.$$

– все конечные объединения линейных многообразий из X размерности не выше $n \in \mathbb{Z}_+$. Как следует из определения,

$$\mathcal{C}_0(X) = \cup_{k=1}^{\infty} \Xi_k(X).$$

Пусть $\mathcal{C}_n^* = \mathcal{C}_n^*(X)$ – все конечные объединения линейных многообразий из X размерности равной $n \in \mathbb{Z}_+$.

Вновь обратимся к задаче (6). Понятно, что имеется большой произвол в выборе алгоритма

$$\tau : A \rightarrow \tau(A) \subset M.$$

Это и множество M , и само отображение $\tau(\cdot)$. При этом, вообще говоря, не каждый вариант пары (τ, M) нас устраивает. Если множество M каким-либо образом фиксировано, то следует задаться вопросом об удовлетворительности замены A множеством M и сразу возникает необходимость рассмотрения "эталона" или "наилучшего варианта" такой замены:

$$\inf_{\tau} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|. \quad (7)$$

Рассмотрев такую величину, мы вплотную подошли к введению понятия поперечника множества. Однако, прежде чем написать

формальное его определение, обсудим вопрос об операции взятия $\inf_\tau$ в (7). При этом выделим такую черту замены A на M как "сложность". Конечно, когда выбрано " n "-параметрическое множество M , возникает желание следующим образом определить отображение $\tau : A \rightarrow M$

$$\tau(x) \in \arg\left\{ \inf_{z \in M} \|x - z\| \right\} -$$

каждому $x \in A$ сопоставим **элемент наилучшего приближения** $\tau(x)$ из множества M (если таких элементов несколько, то выбираем какой-нибудь один).

Замечание 1. Очень часто, в теории приближений в качестве аппроксимирующих используют, так называемые, **ограниченно компактные** множества M : такие множества, что их пересечения с любым шаром нормированного пространства X является компактом. Для таких множеств элемент наилучшего приближения из M всегда существует.

Однако обычно, нахождение такого элемента $\tau(x)$ (наилучшего приближения) достаточно трудоёмкая процедура. Для её упрощения вводят дополнительные ограничения на отображения τ :

пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $M \in \text{Aff}_n(X)$,

1) $\tau \in \mathcal{E}(X, M)$, $\mathcal{E}(X, M)$ – класс всевозможных отображений из X в M (это соответствует отсутствию каких-либо ограничений на выбор соответствия $x \rightarrow \tau(x) \in M$, $x \in X$),

2) $\tau \in \mathcal{C}(X, M)$, $\mathcal{C}(X, M)$ – класс всех непрерывных отображений из X в M ,

3) $\tau \in \mathcal{A}(X, M)$, $\mathcal{A}(X, M)$ – класс всех непрерывных аффинных отображений из X в M . Запись $\tau \in \mathcal{A}(X, M)$ означает, что

$$\tau(x) = l(x) + x_0, \quad x \in X,$$

$l(\cdot)$ – линейное, непрерывное отображение из X в линейное подпространство $(M - x_0)$ пространства X , x_0 – фиксированный элемент M . Линейность отображения l складывается из двух свойств:

– аддитивности $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$ и

– однородности $l(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot l(x)$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Помимо класса аффинных отображений рассматривают класс $\mathcal{L}(X, M)$ всех непрерывных линейных отображений $l(\cdot)$ из X в линейное подпространство $M \in \mathcal{L}_n(X)$.

Непрерывность отображения $l(\cdot)$ на всём пространстве X эквивалентна непрерывности $l(\cdot)$ в одной точке, например, в нуле, и эквивалентна конечности величины (см. [9])

$$\sup_{x: \|x\| \leq 1} \|l(x)\|.$$

4) $\tau \in \mathcal{P}(X, M)$, $\mathcal{P}(X, M)$ – класс всех непрерывных аффинных проекторов из X в M , т.е. непрерывных аффинных отображений из X в M , являющихся суммой линейного непрерывного проектора $l(\cdot) \in \mathcal{L}(X, X)$ (линейного и непрерывного оператора, удовлетворяющего равенству $l(l(\cdot)) = l(\cdot)$) и постоянного отображения.

5) В случае $M \in \mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$, обычно рассматривают только класс $\mathcal{E}(X, M)$. Это связано с тем, что для множеств A , которые встречаются в задачах теории приближений, и любых непрерывных отображений $\tau(\cdot)$ этих множеств в $M \in \mathcal{E}_n$, образ $\tau(A)$ чаще всего является одноточечным множеством, а эта ситуация не представляет интереса для исследования.

6) В случае $n \in \mathbb{Z}_+$, $M \in \mathcal{C}_n(X)$ принято рассматривать только класс $\mathcal{C}(X, M)$.

Как видно из приведённых примеров, одно из дополнительных и часто употребляемых ограничений на выбор отображения $\tau(\cdot)$ состоит в том, что это **отображение должно быть задано и обладать определёнными свойствами не только для элементов $x \in A$, но и для всех $x \in X$. В дальнейшем всегда будем предполагать это ограничение выполненным.**

Переходим к определению поперечника порядка $n \in \mathbb{Z}_+$ непустого множества A , лежащего в нормированном пространстве X (для несколько более общей ситуации полунормированного или линейного метрического пространства X определение даётся по аналогии).

Колмогоровским поперечником множества A порядка n

в пространстве X называют величину

$$d_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z\|$$

– среди всех возможных замен множества A линейным пространством M размерности не выше n (или его сдвигом на вектор) выбирается то, которое доставляет наименьшую погрешность при такой замене.

Замечание 2. В определении поперечника по Колмогорову три раза используются операции перехода к точным нижней и верхней грани. При взятии нижней грани по $M \in \mathcal{Aff}_n(X)$ эта грань, вообще говоря, может и не достигаться (см. [6]), достижимость верхней грани по $x \in A$ можно гарантировать лишь при условии некоторой компактности A . Точная нижняя грань по $z \in M$ для любого $x \in A$ всегда достигается в силу конечномерности $M \in \mathcal{Aff}_n(X)$: если обозначить $r = \inf_{z \in M} \|x - z\|$, то

$$\inf_{z \in M} \|x - z\| = \min_{z \in M, \|x - z\| \leq r+1} \|x - z\| = \min_{z \in M} \|x - z\|$$

из-за компактности множества $\{z \in M : \|x - z\| \leq r + 1\}$. Таким образом, определение колмогоровского поперечника может быть дано таким образом

$$d_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \sup_{x \in A} \min_{z \in M} \|x - z\|.$$

Аналогичные замечания можно сделать по поводу других рассматриваемых ниже поперечников. $\triangleright$

Иногда удобнее пользоваться альтернативным определением поперечника по Колмогорову; следующее простое предложение показывает совпадение двух определений

Предложение 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $A \subset X$. Тогда

$$d_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{E}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|.$$

Доказательство. Неравенство

$$d_n(A, X) \leq \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{E}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|$$

следует из того, что если $M \in \mathcal{Aff}_n(X)$ и $\tau \in \mathcal{E}(X, M)$ выбраны произвольно, то

$$d_n(A, X) \leq \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|. \quad (8)$$

При доказательстве неравенства в другую сторону рассмотрим случаи. Если $d_n(A, X) = \infty$, то неравенство (8) обращается в равенство. Пусть $d_n(A, X) < \infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно, а $M \in \mathcal{Aff}_n(X)$ так, чтобы

$$d_n(A, X) \geq \sup_{x \in A} \inf_{y \in M} \|x - y\| - \varepsilon$$

(т.е. выберем почти наилучшее подпространство и его сдвиг); для $x \in X$ зададим $\tau_0(x) \in M$ произвольно с единственным условием, чтобы

$$\inf_{y \in M} \|x - y\| \geq \|x - \tau_0(x)\| - \varepsilon.$$

Совмещая два последних неравенства, получим

$$\begin{aligned} d_n(A, X) &\geq \sup_{x \in A} \inf_{y \in M} \|x - y\| - \varepsilon \geq \sup_{x \in A} \|x - \tau_0(x)\| - 2\varepsilon \geq \\ &\inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{E}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\| - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

из чего следует неравенство в обратную сторону. $\triangleright$

При введении дополнительных ограничений на выбор отображения $\tau(\cdot)$ возникают другие поперечники:

линейный поперечник множества A порядка n в X :

$$\lambda_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{A}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|,$$

проекционный поперечник множества A порядка n в X :

$$\pi_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{P}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|$$

и ряд других: **поперечник**

$$\gamma_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{C}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|$$

относительно которого в дальнейшем будет доказано, что он совпадает с поперечником $d_n(A, X)$,

энтропийный поперечник A порядка n в пространстве X

$$\varepsilon_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{E}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{E}(X, M)} \sup_{x \in X} \|x - \tau(x)\|.$$

Величины d_n были введены А.Н. Колмогоровым [7], величины λ_n , π_n — В.М. Тихомировым [17], величины γ_n — Р.Л. Фрум-Кетковым.

Следующие два утверждения и следствия из них показывают разницу в асимптотическом поведении некоторых из введённых величин.

Теорема 1. (см. [9] и др.) Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Тогда из компактности M следует, что для любого $\varepsilon > 0$ в M найдётся конечная ε -сеть для M (т.е. конечное множество точек $\{r_k\} \subset M$, что $\min_k \varrho(r, r_k) \leq \varepsilon$ для любого $r \in M$). $\square$

Следствие 1. (теоремы 1). Пусть X — нормированное пространство, $A \subset X$. Если замыкание A — компактное подмножество X , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(A, X) = 0. \quad \triangleright$$

Теорема 2. (о колмогоровских поперечниках компактов). Так как $d_n(A, X) \leq \varepsilon_{n+1}(A, X)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то из компактности замыкания A следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A, X) = 0. \quad \triangleright$$

Теорема 3. (см. [21], о линейных поперечниках компактов). Существуют нормированное пространство X и компактное $A \subset X$ такие, что величины $\lambda_n(A, X)$ не стремятся к нулю с ростом n к бесконечности. $\square$

Александровским поперечником множества A порядка n в пространстве X будем называть

$$a_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{C}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{C}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|. \quad (9)$$

Если определять величину

$$\tilde{a}_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{C}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{E}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|,$$

то такая аппроксимационная характеристика будет неудачной:

Упражнение 1. Доказать, что $\tilde{a}_n(A, X) = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для любого компактного множества $A \subset X$.

Задача 1. Пусть $A \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Какие значения может принимать величина $\tilde{a}_n(A, X)$ а) при $n = 0$, б) при $n > 0$?

Поперечник $k_n(A, X)$ множества A порядка n в X

$$k_n(A, X) = \inf_{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, X)} \sup_{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)} \sup_{x \in A} \|x - (f \circ g)(x)\|.$$

Определение поперечника a_n данное выше несколько отличается от общепринятого определения александровского поперечника ([1], [16] и др.), в котором вместо семейства $\mathcal{C}_n(X)$ рассматривается иное семейство $\tilde{\mathcal{C}}_n(X)$, состоящее из компактных подмножеств X размерности не выше n (см. [2], [12], [20] и др.). Связь между этими двумя определениями проясняется теоремой (формулируемой в частном случае)

Теорема 4. (см. [2], [12] и др.) Пусть $\widetilde{M}$ – компакт размерности не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ в нормированном пространстве X . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $M \in \mathcal{C}_n(X)$ и $\tau \in \mathcal{C}(\widetilde{M}, M)$ такие, что

$$\|x - \tau(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \widetilde{M}. \quad \square \quad (10)$$

В то же время любое множество $M \in \mathcal{C}_n(X)$ имеет размерность не более n . Более подробно останавливаться на понятии размерности множества не предполагается, поскольку в дальнейшем будет использоваться определение (9), и оно основано на аппроксимирующем классе множеств $\mathcal{C}_n(X)$, а не на $\tilde{\mathcal{C}}_n(X)$.

Фурье поперечник множества A порядка n в пространстве X (другое его название – ортопроекционный поперечник). Предположим, что в нормированном пространстве X определено скалярное произведение векторов и для любого $M \in \mathcal{Aff}_n(X)$ оператор ортогонального проектирования τ_M пространства X на M непрерывен. Тогда Фурье поперечник множества A порядка n в пространстве X определяется как

$$\varphi_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \sup_{x \in A} \|x - \tau_M(x)\|.$$

Примеры 2. Пусть $X = \ell_2^2$ – двумерная плоскость с евклидовым расстоянием между точками, A – круг радиуса $r > 0$ с центром в начале координат.

а) если $n = 0$, то

$$d_0(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_0(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z\| = \inf_{z \in X} \sup_{x \in A} \|x - z\|.$$

Поэтому

$$d_0(A, X) \leq \sup_{x \in A} \|x\| = r.$$

С другой стороны, $d_0(A, X) =$

$$\inf_{z \in X} \sup_{x \in X} \|x - z\| \geq \inf_{z \in Z} \max\{\|(r, 0) - z\|, \|(r, 0) - z\|\} = r.$$

б) если $n = 1$, то

$$d_1(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_1(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z\|.$$

Из определения следует, что

$$d_1(A, X) \leq d_0(A, X) = r.$$

С другой стороны, $d_1(A, X) \geq$

$$\inf_{M \in \mathcal{Aff}_1(X)} \sup_{x \in A \cap M^\perp} \inf_{z \in M} \|x - z\| = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_1(X)} \sup_{x \in X \cap M^\perp} \|x - z_M^\perp\|,$$

где $M^\perp$ – прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно прямой M , $z_M^\perp$ – пересечение прямых M и $M^\perp$. Поскольку $A \cap M^\perp$ – отрезок длины $2r$, а $z_M^\perp$ – точка (на прямой $M^\perp$), то

$$\sup_{x \in A \cap M^\perp} \|x - z_M^\perp\| \geq r.$$

Поэтому $d_1(A, X) = r$.

в) если $n = 2$, то

$$d_2(A, X) = \inf_{M \in \text{Aff}_2(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z\| = \sup_{x \in A} \inf_{z \in X} \|x - z\| = 0. \quad \triangleright$$

Упражнение 2. Доказать, что если $X = \ell_2^k$, $k \in \mathbb{N}$, – евклидово пространство размерности k , A – евклидов шар радиуса $r > 0$, то

$$d_n(A, X) = r, \quad n < k, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad \triangleright$$

Упражнение 3. Доказать, что в евклидовом пространстве X для любого непустого $A \subset X$

$$d_n(A, X) = \lambda_n(A, X) = \pi_n(A, X) = \varphi_n(A, X), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad \triangleright$$

Теорема 5. (о поперечнике шара, [16], [17]). Пусть X – нормированное пространство, $n \in \mathbb{Z}_+$, $L \in \mathcal{L}_{n+1}^*(X)$ – подпространство X размерности $(n + 1)$,

$$A = \{z \in Z \mid \|z\| \leq r\}$$

– шар радиуса $r > 0$ в пространстве X . Тогда

$$d_n(A \cap L, X) = r.$$

Доказательство этой теоремы будет приведено позже. $\triangleright$

Упражнение 4. Пользуясь теоремой 5 (о поперечнике шара), доказать, что при выполнении её условий

$$\lambda_n(A \cap L, X) = \pi_n(A \cap L, X) = r.$$

Будем обозначать через BX **единичный шар** в нормированном пространстве X :

$$BX = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Примеры 3. (конечномерных нормированных пространств)

а) евклидово пространство ℓ_2^k размерности $k \in \mathbb{N}$:

$$\ell_2^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^k x_i^2)^{1/2}\}.$$

б) пространство ℓ_1^k размерности k :

$$\ell_1^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|\},$$

в) пространство ℓ_p^k , $1 \leq p < \infty$, размерности k :

$$\ell_p^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_p = (\sum_{i=1}^k |x_i|^p)^{1/p}\},$$

г) пространство ℓ_∞^k размерности k :

$$\ell_\infty^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |x_i|\}.$$

Упражнение 5. Доказать, что неотрицательный функционал $\|x\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, задаёт норму в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Единичные шары $B\ell_p^k$ обозначают также более коротко

$$B_p^k, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Упражнение 6. Доказать теорему о поперечнике шара для евклидового пространства непосредственно.

Упражнение 7. Доказать, что

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p. \quad \triangleright$$

Задача 2. При $k = 2, 3$, $n = 0, 1, 2$, $1 \leq p, q \leq \infty$ вычислить величины $d_n(B_p^k, \ell_q^k)$, $\lambda_n(B_p^k, \ell_q^k)$, $\pi_n(B_p^k, \ell_q^k)$, $\varphi_n(B_p^k, \ell_q^k)$, $a_n(B_p^k, \ell_q^k)$.

Примеры 4. (см. [16], поперечники в евклидовом пространстве).

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $X = \ell_2^k$, $A = \{(x_1, \dots, x_k) \mid \sum_{i=1}^k \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} \leq 1\}$ – эллипсоид в евклидовом пространстве, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > 0$.

Тогда

а) $d_0(A, \ell_2^k) = \alpha_1$ (наибольшая полуось эллипсоида),

б) $d_k(A, \ell_2^k) = 0$.

в) $d_n(A, \ell_2^k) = \alpha_{n+1}$, если $n = 0, 1, \dots, k-1$.

Доказательство. Оценка сверху. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k) \in \ell_2^k$, $P_n : x \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ – ортогональный проектор из ℓ_2^k на $M = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ (этот же оператор является оператором метрического проектирования из ℓ_2^k на M ; он сопоставляет точке $x \in \ell_2^k$ ближайшую точку из M). Тогда $d_n(A, \ell_2^k)^2 \leq$

$$\sup_{x \in A} \|x - P(x)\|_2^2 = \sup_{x \in A} \sum_{i=n+1}^k x_i^2 = \sup_{x \in A} \sum_{i=n+1}^k \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} \cdot \alpha_i^2 = \alpha_{n+1}^2.$$

Поэтому $d_n(A, \ell_2^k) \leq \alpha_{n+1}$. Теперь в обратную сторону: пусть

$$L = \{(x_1, \dots, x_{n+1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k \mid x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}\}$$

– подпространство X размерности $(n+1)$. Тогда множество

$$A \cap L = \{(x_1, \dots, x_{n+1}, 0, \dots, 0) \mid \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} \leq 1\}$$

содержит $\alpha_{n+1} \cdot B_2^k \cap L$. Воспользуемся теоремой 5 (о поперечнике шара):

$$d_n(A, \ell_2^k) \geq d_n(\alpha_{n+1} \cdot B_2^k \cap L, \ell_2^k) = \alpha_{n+1}. \quad \triangleright$$

Примеры 5. (см. [16]) Пусть $X = L_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ – пространство существенно ограниченных функций (см. [9]), A – класс липшицевых с константой $C > 0$ функций на отрезке $[0, 1]$,

$$A = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|\}.$$

Тогда $d_n(A, X) = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Множество A неограничено в X , поэтому $d_0(A, X) = \infty$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Проведём оценку поперечника сверху: пусть

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{i,n} \mid c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\},$$

$\chi_{i,n}(\cdot)$ – характеристическая функция отрезка $\Delta_i := [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$.

Определим отображение $\tau : X \rightarrow M$

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{i,n}, \quad c_i = n \int_{\Delta_i} f(x) dx.$$

Тогда, по предложению 1, $d_n(A, X) \leq \sup_{f \in A} \|f - \tau(f)\|_\infty =$

$$n \cdot \sup_{f \in A} \max_{i=1, \dots, n} \sup_{t \in \Delta_i} \left| \int_{\Delta_i} (f(t) - f(x)) dx \right| \leq n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} x dx = \frac{1}{2n}.$$

Теперь оценим поперечник снизу. Пусть φ_k – ограничение на отрезок $[0, 1]$ непрерывной функции, равной нулю всюду вне отрезка $[\frac{k-1}{2n}, \frac{k+1}{2n}]$, равной $\frac{1}{2n}$ в точке $\frac{k}{2n}$ и линейной на отрезках $[\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}]$ и $[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}]$, $k = 0, 1, \dots, n$; пусть L – линейная оболочка $\{\varphi_k\}_{k=0}^n$, так что размерность $\dim L = (n + 1)$. Тогда

$$2n \cdot A \cap L = BX \cap L.$$

Поэтому, по теореме 5 (о поперечнике шара), $d_n(A, L_\infty[0, 1]) \geq$

$$d_n(A \cap L, L_\infty[0, 1]) = \frac{1}{2n} \cdot d_n(BX \cap L, BX) = \frac{1}{2n}. \quad \triangleright$$

Общие свойства поперечников множеств

(см. [16], [17], [18], [3], [24] и др.) Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $p_n(A, X)$ – любой из рассмотренных поперечников: $d_n(A, X)$, $\lambda_n(A, X)$, $\pi_n(A, X)$, $\varphi_n(A, X)$, $\gamma_n(A, X)$, $a_n(A, X)$, $\varepsilon_n(A, X)$, $k_n(A, X)$. Тогда из определения следует, что

1) поперечники монотонны по параметру $n \in \mathbb{Z}_+$

$$p_0(A, X) \geq p_1(A, X) \geq p_2(A, X) \geq p_3(A, X) \geq \dots, \quad (11)$$

2) поперечники монотонны по множеству

$$p_n(A, X) \leq p_n(C, X), \quad A \subseteq C \subset X, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (12)$$

3) справедливы неравенства

$$d_n(A, X) \leq \gamma_n(A, X) \leq \lambda_n(A, X) \leq \pi_n(A, X) \leq \varphi_n(A, X), \quad (13)$$

$$a_n(A, X) \leq k_n(A, X) \leq \gamma_n(A, X), \quad d_n(A, X) \leq \varepsilon_n(A, X). \quad (14)$$

Для каждого из рассмотренных поперечников широко используется ещё одно обозначение:

$$p_n(A, X) =: p_n(A, BX),$$

в котором подчёркивается как выглядит единичный шар в нормированном пространстве X . Критерием тому, что например, множество B является единичным шаром некоторой нормы служит одновременное выполнение трёх требований (см. также **функционал Минковского**, [9])

- центральной симметрии B ,
- выпуклости B ,
- принадлежности $0 \in X$ ядру B : это условие означает, что каждая прямая $\ell \in \mathcal{L}_1^*(X)$ пересекает B_1 по невырожденному отрезку.

Данные выше определения поперечников множества A в пространстве X используют понятие нормы. Однако, вместо используемого в этих определениях функционала нормы можно пользоваться понятием единичного шара BX (как это делается при рассмотрении функционала Минковского, [9] и др.). Так для поперечника по Колмогорову

$$d_n(A, BX) = \inf_{M \in \text{Aff}_n(X)} \inf\{\alpha > 0 \mid A \subset M + \alpha \cdot BX\}, \quad (15)$$

для линейного поперечника $\lambda_n(A, BX) =$

$$\inf_{M \in \text{Aff}_n(X), \tau \in \mathcal{A}(X, M)} \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \tau(x) + \alpha \cdot BX \quad \forall x \in A\} \quad (16)$$

и т. д. Свойства 4) и 5) поперечников предполагают, что в линейном пространстве X имеются множества B_1, B_2 , которые могут выступать в роли единичного шара для X .

Пусть $\alpha > 0$, A, C – непустые подмножества нормированного пространства X . Обозначим

$$\alpha \cdot A := \{\alpha \cdot x \mid x \in A\},$$

$$A + C := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in A, x_2 \in C\}.$$

4) пусть $\alpha > 0$, $B_2 = \alpha \cdot B_1$, $A \subset X$. Тогда $p_n(A, B_1) = \alpha \cdot p_n(A, B_2)$. Это свойство следует из определений поперечника, функционала Минковского и

$$\|x\|_{B_2} \leq 1 \Leftrightarrow x \in B_2 = \alpha \cdot B_1 \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} \in B_1 \Leftrightarrow \|x\|_{B_1} \leq \alpha.$$

5) пусть $A \subset X$, $X_1 = (X, B_1)$, $X_2 = (X, B_2)$, – нормированные пространства над линейным пространством X с единичными шарами B_1 и B_2 , $B_1 \subset B_2$. Тогда

$$p_n(A, B_2) \leq p_n(A, B_1) \tag{17}$$

для колмогоровского поперечника и совпадающего с ним поперечника γ_n , так как

$$\|x\|_{B_2} \leq \|x\|_{B_1}, \quad x \in X.$$

Для остальных поперечников неравенство (17) заведомо выполняется, если для любого $M \in \mathcal{Aff}_n(X)$ справедливы, например, соответствующие включения $\mathcal{A}(X_1, M) \subset \mathcal{A}(X_2, M)$ либо $\mathcal{C}(X_1, M) \subset \mathcal{C}(X_2, M)$ (из-за конечномерности M каждое из этих включений в этом случае является равенством, поскольку если V открыто в M , $\tau \in \mathcal{C}(X_2, M)$, то $\tau^{-1}(V)$ открыто в X_2 и, значит, также в X_1 , т.е. $\tau \in \mathcal{C}(X_1, M)$).

В этом случае, например, для линейного поперечника

$$\begin{aligned} \lambda_n(A, X_1) &= \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X), \tau \in \mathcal{A}(X_1, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|_{B_1} \geq \\ &\inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X), \tau \in \mathcal{A}(X_2, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|_{B_2} \geq \lambda_n(A, X_2). \end{aligned}$$

Поскольку все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны (см. [9]), то и условия непрерывности отображения из X в M также эквивалентны. Поэтому неравенство (17) в конечномерном пространстве X справедливо для всех рассмотренных поперечников.

Пользуясь теоремой 17 (см. ниже), можно показать справедливость (17) для линейных и проекционных поперечников для $A = C + E$, являющихся суммой конечномерного пространства E и компактного в X_2 множества C . Так для поперечника π_n

$$\begin{aligned} \pi_n(A, X_1) &= \inf_{M \in \text{Aff}_n(X), \tau \in \mathcal{P}(X_1, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|_{B_1} \geq \\ &\inf_{M \in \text{Aff}_n(X), \tau \in \mathcal{P}(X_1, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|_{B_2} \geq \pi_n^\#(A, X_2) = \pi_n(A, X_2) \end{aligned}$$

(определения поперечников $\pi_n^\#, \lambda_n^\#$ даны перед формулировкой теоремы 17).

б) пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \subset X$. Тогда $p_n(\alpha \cdot A, BX) = |\alpha| \cdot p_n(A, BX)$. Проверим это равенство для колмогоровского поперечника, для остальных поперечников эти равенства устанавливаются по аналогии: если $\alpha = 0$ и $d_n(A, BX) \neq \infty$, утверждение очевидно. Если $\alpha = 0$ и $d_n(A, BX) = \infty$, то проверяемое равенство будем считать выполненным по определению. Если $\alpha \neq 0$, то

$$\begin{aligned} d_n(\alpha A, BX) &= \inf_{M \in \text{Aff}_n(X)} \sup_{y \in A} \inf_{z \in M} \|\alpha y - z\| = \\ &|\alpha| \inf_{M \in \text{Aff}_n(X)} \sup_{y \in A} \inf_{w \in \alpha^{-1} \cdot M} \|y - w\| = |\alpha| \cdot d_n(A, BX). \end{aligned}$$

Некоторым обобщением свойства б) служит такое свойство

б а) Пусть $\Lambda : X \rightarrow Y$ – линейная изометрия нормированных пространств X и Y , так что $BY = \Lambda(BX)$, и $A \subset X$. Тогда

$$p_n(A, BX) = p_n(\Lambda(A), BY). \quad (18)$$

Проверим это свойство, например, для линейного поперечника:

$$\begin{aligned}
& \lambda_n(\Lambda(A), BY) = \\
& \inf_{M \in \text{Aff}_n(Y), \tau \in \mathcal{A}(Y, M)} \inf \{ \alpha > 0 \mid y \in \tau(y) + \alpha \cdot BY \quad \forall y \in \Lambda(A) \} = \\
& \inf_{M \in \text{Aff}_n(X), \tau \in \mathcal{A}(Y, \Lambda M)} \inf \{ \alpha > 0 \mid \Lambda x \in \tau(\Lambda x) + \alpha \cdot \Lambda(BX) \quad \forall x \in A \} \\
& = \lambda_n(A, BX).
\end{aligned}$$

Следующие два общих свойства поперечников связаны с понятиями выпуклой оболочки и замкнутой оболочки множества. Пусть $A \subset X$ — подмножество в нормированном пространстве, $n \in \mathbb{Z}_+$. Черта $\bar{}$ над множеством A обозначает **операцию замыкания** A , т.е. операцию добавления к A всех его предельных точек. Множество $\bar{A}$ является замкнутым, и это позволяет дать ещё одно определение $\bar{A}$ как пересечение всех замкнутых подмножеств $B \subset X$, содержащих A .

Напомним, что множество A называется **выпуклым**, если вместе с каждыми двумя точками $x_1, x_2 \in A$ оно содержит весь отрезок $[x_1, x_2]$, соединяющий эти точки:

$$[x_1, x_2] = \{ \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \mid \alpha \in [0, 1] \}.$$

Выпуклой оболочкой $\text{conv } A$ множества A называют пересечение всех выпуклых подмножеств $B \subset X$, содержащих A .

Примеры 6. Если $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ — три аффинно независимые точки на плоскости, то $\text{conv } A$ — это треугольник с вершинами $\{x_1, x_2, x_3\}$ (его называют также **двумерным симплексом**). Обобщение этого примера в пространстве большего числа измерений называют **n -мерным симплексом**, $n \in \mathbb{N}$: при условии аффинной независимости системы точек $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ так называют множество $\text{conv } \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$.

Упражнение 8. Доказать, что пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто, а пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло.

7) Для всех поперечников $p_n(A, X)$, кроме александровского, энтропийного и поперечника k_n , справедливы равенства

$$p_n(A, X) = p_n(\text{conv } A, X). \quad (19)$$

Проведём рассуждения для колмогоровского и линейного поперечников: неравенство $p_n(A, X) \leq p_n(\text{conv } A, X)$ справедливо вообще для каждого из введённых поперечников (см. (12)). Докажем обратное неравенство. Если поперечник множества A равен бесконечности, то и поперечник его выпуклой оболочки также равен бесконечности, т.е. (19) выполнено. Пусть $d = d_n(A, X) < \infty$. Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем почти наилучшее пространство $L \in \mathcal{Aff}_n(X)$ так, чтобы

$$d_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z\| \leq \sup_{x \in A} \inf_{z \in L} \|x - z\| \leq d + \epsilon,$$

т.е. для любого $x \in A$ найдётся $y \in L$, для которого $\|x - y\| \leq d + \epsilon$. Рассмотрим выпуклое множество

$$\tilde{A} = \{x \in X \mid \exists y \in L \text{ такой, что } \|x - y\| \leq d + \epsilon\}.$$

Упражнение 9. Проверить, что множество $\tilde{A}$ выпукло.

Для $\tilde{A}$ выполнены включения $A \subset \text{conv } A \subset \tilde{A}$ и неравенства

$$d_n(\text{conv } A, X) \leq d_n(\tilde{A}, X) \leq d + \epsilon.$$

Так как $\epsilon > 0$ произвольно, то выполнено $d_n(\text{conv } A, X) \leq d$ и, значит, (19) выполняется для колмогоровского поперечника.

Также доказывается равенство (19) для величин λ_n : если значение поперечника меньше бесконечности, выберем почти наилучшие $L \in \mathcal{Aff}_n(X)$ и $\bar{\tau} \in \mathcal{A}(X, L)$ так, чтобы $\lambda = \lambda_n(A, X) =$

$$\inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{A}(X, M)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\| \leq \sup_{x \in X} \|x - \bar{\tau}(x)\| \leq \lambda + \epsilon,$$

т.е. $\|x - \bar{\tau}(x)\| \leq \lambda + \epsilon$ для любого $x \in A$. Рассмотрим выпуклое множество

$$\tilde{A} = \{x \in X \mid \|x - \bar{\tau}(x)\| \leq \lambda + \epsilon\}.$$

Упражнение 10. Проверить, что множество $\tilde{A}$ выпукло.

Для него $A \subset \text{conv } A \subset \tilde{A}$ и

$$\lambda_n(\text{conv } A, X) \leq \lambda_n(\tilde{A}, X) \leq \lambda + \epsilon.$$

Это доказывает (19) для линейных поперечников. $\triangleright$

Задача 3. Пусть A – график функции $y = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда а) $a_1(A, \mathbb{R}^2) = 0$, б) $a_1(\text{conv } A, \mathbb{R}^2) = r$, где r – радиус вписанной в $\text{conv } A$ окружности.

8) Для всех поперечников $p_n(A, X)$ справедливы равенства

$$p_n(A, X) = p_n(\bar{A}, X). \quad (20)$$

Проведём рассуждения для колмогоровского и александровского поперечников: оценка

$$p_n(A, X) \leq p_n(\bar{A}, X)$$

справедлива по свойству монотонности поперечников (см. (12)). Докажем неравенство в обратную сторону. Если поперечник A равен бесконечности, то и поперечник его замыкания также равен бесконечности и (20) выполняется. Пусть $d = d_n(A, X) < \infty$. Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем почти наилучшее $L \in \mathcal{Aff}_n(X)$ так, чтобы

$$d_n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{Aff}_n(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z\| \leq \sup_{x \in A} \inf_{z \in L} \|x - z\| \leq d + \epsilon,$$

т.е. для любого $x \in X$ найдётся $y \in L$, для которого $\|x - y\| \leq d + \epsilon$. Как при доказательстве (19) рассмотрим замкнутое множество

$$\tilde{A} = \{x \in X \mid \exists y \in L \text{ такой, что } \|x - y\| \leq d + \epsilon\}.$$

Упражнение 11. Проверить, что множество $\tilde{A}$ замкнуто.

Для него $A \subset \bar{A} \subset \tilde{A}$ и

$$d_n(\bar{A}, X) \leq d_n(\tilde{A}, X) \leq d + \epsilon.$$

Так как $\epsilon > 0$ произвольно, то $d_n(\bar{A}, X) \leq d$ и, значит, (20) выполняется для колмогоровского поперечника.

Аналогично доказывается равенство (20) для величин a_n : если значение поперечника меньше бесконечности, пусть $M \in \mathcal{C}_n(X)$ и $\bar{\tau} \in \mathcal{C}(X, M)$ таковы, что $a = a_n(A, X) =$

$$\inf_{C \in \mathcal{C}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{C}(X, C)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\| \leq \sup_{x \in A} \|x - \bar{\tau}(x)\| \leq a + \epsilon,$$

т.е. $\|x - \bar{\tau}(x)\| \leq a + \epsilon$ для любого $x \in A$. Рассмотрим замкнутое множество

$$\tilde{A} = \{x \in X \mid \|x - \bar{\tau}(x)\| \leq a + \epsilon\}.$$

Упражнение 12. Проверить, что множество $\tilde{A}$ замкнуто.

Для него $A \subset \bar{A} \subset \tilde{A}$ и, значит,

$$a_n(\bar{A}, X) \leq a_n(\tilde{A}, X) \leq a + \epsilon.$$

Это доказывает (20) для александровских поперечников. $\triangleright$

Замечание 3. Свойства 7) и 8) объясняют тот факт, что вычисления и оценки поперечников обычно проводят для замкнутых и выпуклых множеств.

9) Пусть $A = (-A)$ – центрально-симметричное подмножество нормированного пространства X . Тогда

$$d_n(A, X) = d := \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in A} \inf_{z \in L} \|x - z\|.$$

Действительно, неравенство $d_n(A, X) \leq d$ следует из определения. В обратную сторону. Если $d_n(A, X) = \infty$, то всё доказано. Пусть $d_n(A, X) < \infty$, $\epsilon > 0$, подпространство $L \in \mathcal{L}_n(X)$ и элемент $a \in X$ таковы, что

$$\sup_{x \in A} \inf_{z \in L+a} \|x - z\| \leq d_n(A, X) + \epsilon.$$

Возьмём $x \in A$ и подберём элементы l_1, l_2 из L так, чтобы

$$\|x - l_1 - a\| \leq d_n(A, X) + \epsilon, \quad \|-x - l_2 - a\| \leq d_n(A, X) + \epsilon.$$

Тогда

$$\|x - \frac{l_1 - l_2}{2}\| = \frac{1}{2}\|x - l_1 - a - (-x - l_2 - a)\| \leq d_n(A, X) + \epsilon.$$

Устремив ϵ к нулю, получим $d \leq d_n(A, X)$. $\triangleright$

Аналогичное утверждение справедливо также для линейных и проекционных поперечников. Так, если $A = (-A)$, то

$$\pi_n(A, X) = \alpha := \inf_{L \in \mathcal{Aff}_n(X)} \inf_{\tau \in \mathcal{P}(X, L)} \sup_{x \in A} \|x - \pi(x)\|.$$

Как и в случае поперечников d_n неравенство $\pi_n(A, X) \leq \alpha$ является следствием определения. Если $\pi_n(A, X) = \infty$, то и $\alpha = \infty$. Пусть $\pi_n(A, X) < \infty$, $\epsilon > 0$, $L \in \mathcal{Aff}_n(X)$ и проектор $\tau \in \mathcal{P}(X, L)$ таковы, что

$$\sup_{x \in X} \|x - \tau(x)\| \leq \pi_n(A, X) + \epsilon.$$

Определим линейный оператор $\tau_1(x) = (\tau(x) - \tau(-x))/2$. Он является линейным проектором и его образ лежит в подпространстве $(L - L)$ размерности не выше n . Если $\tau(x) = l_1 + a$, $\tau(-x) = l_2 + a$, $l_1 = -l_2$, то

$$\|x - \frac{l_1 - l_2}{2}\| = \frac{1}{2}\|x - l_1 - a - (-x - l_2 - a)\| \leq \pi_n(A, X) + \epsilon. \quad \triangleright$$

Проблема 0.1. Справедлив ли аналог свойства 9) для поперечников по Александрову?

10) Пусть A, C – два непустых подмножества пространства X , $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$d_{n+k}(A + C, X) \leq d_n(A, X) + d_k(C, X). \quad (21)$$

Для доказательства воспользуемся определением поперечника по Колмогорову в форме (15). Пусть $M_1 \in \mathcal{Aff}_n(X)$, $M_2 \in \mathcal{Aff}_k(X)$ произвольны, $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ таковы, что

$$A \subset M_1 + r_1 \cdot BX, \quad C \subset M_2 + r_2 \cdot BX.$$

Тогда $(M_1 + M_2) \in \mathcal{Aff}_{n+k}(X)$ и

$$A + C \subset (M_1 + M_2) + (r_1 + r_2) \cdot BX,$$

то есть $d_{n+k}(A + C, X) \leq (r_1 + r_2)$, что и доказывает (21). $\triangleright$

Вопрос о справедливости свойства (21) для других поперечников будет обсуждаться позже.

Равенство поперечников d_n и γ_n

(см. [16]).

Пусть X – нормированное пространство, $A \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При доказательстве равенства

$$d_n(A, X) = \gamma_n(A, X) \quad (22)$$

(см. [16], В.М. Тихомиров, Р.Л. Фрум-Кетков) будем существенно опираться на **теорему Майкла** (1956) о непрерывных сечениях многозначных отображений.

Замечание 4. Неравенство $d_n(A, X) \leq \gamma_n(A, X)$ следует из определения и предложения 1. Необходимость использования теоремы Майкла при проверке неравенства

$$\gamma_n(A, X) \leq d_n(A, X)$$

тесно связана с вопросом о непрерывности оператора, который точке $x \in X$ сопоставляет один из элементов наилучшего приближения $y(x) \in L \in \mathcal{Aff}_n(X)$:

$$y(x) \in P_L(x) := \operatorname{argmin}\{\|y - x\| \mid y \in L\}$$

(отображение, сопоставляющее точке x все элементы наилучшего приближения из L , называют **оператором метрической проекции и обозначают $P_L(x)$**). В силу конечномерности L хотя бы один элемент $y(x) \in P_L(x)$ найдётся всегда. Но, из-за того, что таких элементов может быть несколько, отображение $y(\cdot)$ вообще говоря построить непрерывным можно не всегда.

Определение 1. Пусть M – непустое подмножество нормированного пространства X , $x \in X$. Величину

$$\inf\{\|x - y\| : y \in M\}$$

называют расстоянием от x до M и обозначают $\text{dist}(x, M)_X$.

Примеры 7. (*доказательство (22) для некоторых нормированных пространств*). Пусть L – конечномерное подпространство X , для которого при любом $x \in A \subset X$ задача

$$\min\{\|x - y\| \mid y \in L\}$$

имеет единственное решение $y(x) = P_L(x) \in L$. Тогда отображение $P_L(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{C}(A, L)$ (см. [16] и др.).

Доказательство. Пусть $x_m \rightarrow x$, $x, x_m \in A$, $m \in \mathbb{N}$. Выберем подпоследовательность x_{m_k} так, чтобы для оператора метрической проекции P_L выполнялось

$$P_L(x_{m_k}) \rightarrow \xi \in L.$$

Тогда

$$\|x - P_L(x_{m_k})\| \leq \|x - x_{m_k}\| + \|x_{m_k} - P_L(x_{m_k})\|.$$

Отображение

$$x \rightarrow \text{dist}(x, L)_X := \inf\{\|x - y\| : y \in L\}$$

из X в $\mathbb{R}_+$ является непрерывным (и даже удовлетворяющим условию Липшица) при любом выборе пространства L нормированного пространства X .

Упражнение 13. Доказать, что отображение $x \rightarrow \text{dist}(x, L)_X$ из X в $\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию Липшица.

Поэтому

$$\|x - \xi\| \leq \|x - P_L(x)\|,$$

т.е. $\xi = P_L(x)$ из-за единственности элемента наилучшего приближения. Это и означает непрерывность оператора $P_L(\cdot)$. $\triangleright$

Следствие 2. (см. [16] и др.) Если единичный шар BX нормированного пространства X не содержит отрезков на своей границе (такое пространство X называется **строго выпуклым**), то оператор метрической проекции $P_L : X \rightarrow L$ непрерывен для любого конечномерного пространства L .

Доказательство. Если L – подпространство X , $x \in X$ и $\text{dist}(x, L)_X := \inf\{\|x - y\| : y \in L\}$, то

$$P_L(x) = (x + \text{dist}(x, L)_X \cdot BX) \cap L.$$

По определению $\text{dist}(x, L)_X$ это пересечение не может содержать внутренних точек множества $(x + \text{dist}(x, L)_X \cdot BX)$. Кроме того, оно непусто и выпукло, а, значит, по определению строгой выпуклости, состоит из единственной точки. $\triangleright$

Следствие 3. (см. [16] и др.). Если пространство X строго выпукло, A – непустое подмножество X , $n \in \mathbb{Z}_+$, то

$$d_n(A, X) = \gamma_n(A, X).$$

Доказательство. Неравенство $d_n(A, X) \leq \gamma_n(A, X)$ следует из определения и предложения 1. Поскольку при $L \in \mathcal{L}_n(X)$ оператор метрического проектирования $P_L : X \rightarrow L$ однозначен и непрерывен, то

$$\begin{aligned} d_n(A, X) &= \inf_{M \in \mathcal{L}_n(X), a \in X} \sup_{x \in A} \inf_{z \in M} \|x - z - a\| = \\ &= \inf_{M \in \mathcal{L}_n(X), a \in X} \sup_{x \in A} \|x - a - P_M(x - a)\| \geq \gamma_n(A, X). \quad \triangleright \end{aligned}$$

Перейдём к доказательству (22) в общем случае. Для этого предварительно дадим несколько определений и докажем вспомогательные утверждения (см. [23], [20]). Пусть M – метрическое пространство $M = \langle M, \varrho \rangle$, Y – нормированное пространство, 2^Y – совокупность непустых подмножеств Y . Любое отображение

$$\varphi : M \rightarrow 2^Y$$

называют **многозначным отображением** из M в Y и обозначают коротко $\varphi : M \rightarrow Y$, добавляя слова "многозначное отображение". **Непрерывным сечением** многозначного отображения $\varphi : M \rightarrow Y$ называют любое непрерывное однозначное отображение $f : M \rightarrow Y$, для которого при всех $x \in M$

$$f(x) \in \varphi(x).$$

Упражнение 14. Пусть $f : M \rightarrow Z$ – однозначное отображение из метрического пространства M в метрическое пространство Z . Доказать, равносильность двух условий

$$- f \in C(M, Z)$$

- для любого открытого в Z подмножества V множество $f^{-1}(V)$ открыто в M . $\triangleright$

Определение 2. (см. [23], [20] и др.) Многозначное отображение $\varphi : M \rightarrow Y$ называют **полунепрерывным снизу**, если для любого открытого в Y подмножества V открытым в M будет множество

$$\{x \in M \mid \varphi(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Примеры 8. (к определению полунепрерывности многозначного отображения, см. [23] и др.)

Пусть $u : Y \rightarrow M$ – однозначное отображение "на". Определим $\varphi : M \rightarrow 2^Y$, положив $\varphi(x) = u^{-1}(x)$. Тогда φ – полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда отображение $u(\cdot)$ открыто.

Доказательство. Условие φ – многозначное полунепрерывное снизу отображение из M в Y равносильно тому, что для любого открытого $V \subset Y$ множество $\{x \in X \mid \varphi(x) \cap V \neq \emptyset\} =$

$$\{x \in X \mid u^{-1}(x) \cap V \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid x \in u(V)\} \quad - \text{открыто},$$

так как условие $u^{-1}(x) \cap V \neq \emptyset$ равносильно условию: $\exists y \in V$, такой что $y \in u^{-1}(x)$, что в свою очередь равносильно тому, что $\exists y \in V : x = u(y)$, т.е. $x \in u(V)$. $\triangleright$

Примеры 9. (к определению полунепрерывности многозначного отображения, см. [23] и др.)

Если $\varphi : M \rightarrow Y$ – многозначное полунепрерывное снизу отображение, а $\psi : M \rightarrow Y$ – многозначное отображение, заданное равенством

$$\psi(x) = \overline{\varphi(x)}$$

(т.е. замыкание $\varphi(x)$ в Y), то ψ – полунепрерывно снизу.

Доказательство. Если V открыто в Y , то

$$\varphi(x) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{\varphi(x)} \cap V \neq \emptyset. \quad \triangleright$$

Примеры 10. (к определению полунепрерывности многозначного отображения, см. [23] и др.)

Пусть $\varphi : M \rightarrow Y$ – многозначное полунепрерывное снизу отображение, U – открытое подмножество Y такое, что

$$\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$$

для всех $x \in M$. Тогда многозначное отображение $\theta : M \rightarrow Y$, заданное равенством

$$\theta(x) = \varphi(x) \cap U, \quad x \in M,$$

полунепрерывно снизу.

Доказательство. Если V открыто в Y , то $U \cap V$ также открыто в Y . Поэтому

$$\{x \in X : \mid \varphi(x) \cap \{V \cap U\} \neq \emptyset\} = \{x \in X : \mid \{\varphi(x) \cap U\} \cap V \neq \emptyset\}$$

– открыто в X . $\triangleright$

Теорема 6. (Майкл, см. [23] и дополнения) Пусть M – метрическое пространство, Y – банахово пространство, $\varphi : M \rightarrow Y$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение с выпуклыми и замкнутыми образами точек $\varphi(x)$, $x \in M$. Тогда существует непрерывное сечение для $\varphi(\cdot)$, т.е.

$$\exists f \in C(M, Y) : \quad f(x) \in \varphi(x) \quad \forall x \in M.$$

Чтобы установить равенство (22) удобнее применять не саму теорему Майкла, а используемую при её доказательстве лемму

Лемма 1. (Майкл, см. [23] и дополнения) Пусть $F(\cdot)$ – многозначное и полунепрерывное снизу отображение метрического пространства $M = \langle M, \varrho \rangle$ в нормированное пространство Y , пусть для каждого $x \in M$ множество $F(x)$ выпукло. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдётся $f \in C(M, Y)$ такое, что

$$\text{dist}(f(x), F(x))_Y < \epsilon \quad \forall x \in M.$$

Теорема 7. (см. [16], В.М. Тихомиров, Р.Л. Фрум-Кетков) Пусть X – нормированное пространство, A – непустое подмножество X , $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$d_n(A, X) = \gamma_n(A, X).$$

Доказательство. Неравенство $d_n(A, X) \leq \gamma_n(A, X)$ следует из определения и предложения 1. Если $d_n(A, X) = \infty$, то доказывать нечего. Установим, что

$$d_n(A, X) \geq \gamma_n(A, X)$$

для $d_n(A, X) < +\infty$. Пусть $\epsilon > 0$ – фиксировано, а $L \in \mathcal{Aff}_n(X)$ таково, что

$$d_n(A, X) + \epsilon \geq \sup_{x \in A} \inf_{y \in L} \|x - y\|_X$$

и $L = a + Y$, $Y \in \mathcal{L}_n$, $a \in X$. Определим многозначное отображение $F := F_{\epsilon, Y}$ из нормированного пространства X в конечномерное нормированное пространство Y по правилу

$$F(x) = Y \cap \{x + (\text{dist}(x, Y)_X + \epsilon) \cdot G\}, \quad x \in X,$$

где G – внутренность единичного шара пространства X :

$$G = \{x \in X : \|x\|_X < 1\}.$$

Из определения следует, что $F(x)$ непусто и выпукло при любом $x \in X$; проверим полунепрерывность снизу $F(\cdot)$: пусть $x_0 \in X$ и $d = \text{dist}(x_0, Y)_X$, V открыто в Y , $y_0 \in F(x_0) \cap V$ – произвольно. Тогда

$$\|x_0 - y_0\| < d + \epsilon.$$

Подберём $\delta > 0$ так, чтобы

$$\|x_0 - y_0\| < d + \epsilon - \delta.$$

Пусть теперь $\|x - x_0\|_X < \delta/2$. Тогда

$$\text{dist}(x, Y)_X = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X \geq \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|_X - \|x_0 - x\|_X \geq d - \frac{\delta}{2},$$

$$\|x - y_0\|_X \leq \|x_0 - y_0\|_X + \|x_0 - x\|_X < d + \epsilon - \delta + \frac{\delta}{2} = d + \epsilon - \frac{\delta}{2},$$

т.е. точка $y_0 \in V$ удалена от точки x менее чем на $(d + \epsilon - \frac{\delta}{2})$. Поэтому $y_0 \in V$ попадает в открытый шар с центром в точке x радиуса

$$\text{dist}(x, Y)_X + \epsilon \geq d + \epsilon - \frac{\delta}{2}.$$

Таким образом, для каждой точки x , $\|x - x_0\| < \delta/2$,

$$y_0 \in F(x), \quad \text{т.е.} \quad F(x) \cap V \neq \emptyset,$$

что и требовалось для проверки полунепрерывности.

По лемме 1 найдётся однозначная функция $f \in C(X, Y)$ такая, что при любом $x \in X$

$$f(x) \in F(x) + \epsilon \cdot G, \quad \text{т.е.} \quad \|x - f(x)\|_X \leq \text{dist}(x, Y)_X + 2\epsilon.$$

Поэтому

$$\gamma_n(A, X) \leq \inf_{\tau \in C(X, a+Y)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|_X \leq \sup_{x \in A} \|(x - a) - f(x - a)\|_X \leq$$

$$\sup_{x \in A} \text{dist}(x - a, Y)_X + 2\epsilon = \sup_{x \in A} \text{dist}(x, L)_X + 2\epsilon \leq d_n(A, X) + 3\epsilon. \quad \triangleright$$

Обозначим через $b_n(A, X)$ – **поперечник по Бернштейну** множества A в пространстве X порядка $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$b_n(A, X) = \sup_{L \in \mathcal{L}_{n+1}^*(X), x \in X, \alpha \in \mathbb{R}_+} \{\alpha \mid x + \alpha \cdot (BX \cap L) \subset A\}$$

(напомним, что семейство $\mathcal{L}_{n+1}^*(X) \subset \mathcal{L}_{n+1}(X)$ состоит из подпространств размерности ровно $(n + 1)$).

Замечание 5. Если относительно множества A из определения поперечника по Бернштейну известно, что оно выпукло и центрально симметрично ($A = -A$), то обычно используется такое определение поперечника $b_n(A, X)$

$$b_n(A, X) = \sup_{L \in \mathcal{L}_{n+1}^*(X), \alpha \in \mathbb{R}_+} \{\alpha \mid \alpha \cdot (BX \cap L) \subset A\}.$$

В этом случае оба определения совпадают, поскольку если $x \in X$ и $(x + \alpha \cdot (BX \cap L)) \subset A$, то

$$-(x + \alpha \cdot (BX \cap L)) \subset A \quad \text{и} \quad \alpha \cdot (BX \cap L) \subset A. \quad \triangleright$$

При доказательстве теоремы 5 (о поперечнике шара) будем пользоваться известной теоремой Борсука (см. [16], дополнения и др.). Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_{\ell_2^{n+1}} = 1\}$$

– **единичная сфера** в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве.

Теорема 8. (Борсук, см. [12], [2], [16], дополнения). Для непрерывного отображения $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, всегда существует $x_0 \in S^n$ такое, что $f(x_0) = f(-x_0)$.

Следующая лемма используется для того, чтобы обобщить некоторые рассматриваемые теоремы топологического характера с евклидовых конечномерных пространств на произвольные нормированные:

Лемма 2. Пусть $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное и центрально-симметричное тело, ∂V – его граница. Тогда существует нечётный гомеоморфизм между ∂V и S^n .

Доказательство. Поскольку V – центрально-симметричное, выпуклое и замкнутое тело, то $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ – внутренняя точка V и любой луч с центром в начале координат, проходящий через точку $x \in S^n$, пересекает множество V по невырожденному отрезку

$$[0, r_V(x) \cdot x], \quad r_V(x) > 0.$$

Проверим, что отображение

$$f(\cdot) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad f(x) = r_V(x) \cdot x, \quad x \in S^n,$$

– искомое. Из определения следует, что $f : S^n \rightarrow \partial V$ – нечётно и взаимно-однозначно. Так как S^n – компакт, то остаётся проверить лишь непрерывность $f(\cdot)$. Предположим, что последовательность $x_m \in S^n$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к $x_0 \in S^n$. Тогда, пользуясь свойствами выпуклости и замкнутости множества V , получим

$$[0, r \cdot x_0] \subset V, \quad r := \overline{\lim} \, r_V(x_m),$$

так что $r_V(x_0) \geq r$. С другой стороны неравенство $r_V(x_0) > r$ невозможно, поскольку точки $r_V(x_m) \cdot x_m$, $m \in \mathbb{N}$, лежат на границе V , а если $r_V(x_0) > r$, то $(r \cdot x_0)$ – внутренняя точка V :

пусть для $\alpha \in (0, 1]$ выполнено равенство $\alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot r_V(x_0) = r$, W – окрестность нуля, лежащая в V ; тогда открытое множество

$$\alpha \cdot W + (1 - \alpha) \cdot r_V(x_0) \cdot x_0$$

содержит $r \cdot x_0$ и содержится в V . Противоречие показывает, что $r_V(x_0) = r$, а из этого следует уже и непрерывность $f(\cdot)$. $\triangleright$

Следствие 4. (Борсук). Пусть $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное и центрально-симметричное тело, ∂V – его граница, $f : \partial V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует $x_0 \in \partial V$, такое что $f(x_0) = f(-x_0)$.

Теорема 9. (см. [16]). Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, A – непустое подмножество нормированного пространства X . Тогда

$$b_n(C, X) \leq \gamma_n(C, X) = d_n(C, X).$$

Доказательство. Зафиксируем $L \in \mathcal{L}_{n+1}^*(X)$ и произвольные $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$, для которых

$$x + \alpha \cdot (BX \cap L) \subset A.$$

Для них (по общим свойствам поперечников)

$$\gamma_n(A, X) \geq \gamma_n(x + \alpha \cdot (BX \cap L), X) = \alpha \cdot \gamma_n(BX \cap L, X).$$

Покажем, что

$$\gamma_n(BX \cap L, X) = 1.$$

Неравенство $\gamma_n(BX \cap L, X) \leq \gamma_0(BX \cap L, X) \leq 1$ следует из общих свойств поперечников. Установим неравенство в обратную сторону. Выберем $M \in \text{Aff}_n(X)$ и непрерывное отображение $f(\cdot)$ пространства X (а, значит, и границы $\partial(BX \cap L)$ множества $(BX \cap L)$) в M . Пусть $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ – произвольный гомеоморфизм, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$. По следствию 4 для $g \circ f : \partial(BX \cap L) \rightarrow \mathbb{R}^m$ найдётся точка $x_0 \in \partial(BX \cap L)$, такая что

$$g(f(x_0)) = g(f(-x_0)).$$

Так как $g(\cdot)$ – гомеоморфизм, то $f(x_0) = f(-x_0) \in M$. Значит,

$$\begin{aligned} 2 = \|x_0 - (-x_0)\| &= \|x_0 - f(x_0) - ((-x_0) - f(-x_0))\| \leq \\ &\|x_0 - f(x_0)\| + \|((-x_0) - f(-x_0))\|, \end{aligned}$$

т.е. или $\|x_0 - f(x_0)\| \geq 1$, или $\|(-x_0) - f(-x_0)\| \geq 1$. Поэтому

$$\sup_{x \in BX \cap L} \|x - f(x)\| \geq 1.$$

Поскольку $M \in \text{Aff}_n(X)$ и $f \in C(X, M)$ взяты произвольно, то

$$\gamma_n(BX \cap L, X) = \inf_{M \in \text{Aff}_n(X)} \inf_{f \in C(X, M)} \sup_{x \in BX \cap L} \|x - f(x)\| \geq 1.$$

В итоге (по теореме 7) приходим к утверждению теоремы 9. $\triangleright$

Следствие 5. (теорема о поперечнике шара, см. [16]). Пусть X – нормированное пространство, $L \in \mathcal{L}_{n+1}^*(X)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $C = BX \cap L$. Тогда

$$b_n(C, X) = d_n(C, X) = \gamma_n(C, X) = \lambda_n(C, X) = \pi_n(C, X) = 1.$$

Доказательство. По теореме 9 и общим свойствам поперечников $1 = b_n(C, X) \leq \gamma_n(C, X) =$

$$d_n(C, X) \leq \lambda_n(C, X) \leq \pi_n(C, X) \leq \pi_0(C, X) \leq 1. \quad \triangleright$$

Пусть $-A = A$ – непустое, центрально-симметричное подмножество нормированного пространства X , $n \in \mathbb{Z}_+$.

Поперечником по Гельфанду (или **гельфандовским поперечником**) порядка n множества A в X называют

$$d^n(A, X) = \inf_{M \in \mathcal{L}^n(X)} \sup_{x \in A \cap M} \|x\|.$$

Теорема 10. (Ю.И. Маковоз, см. [10]). Пусть X – нормированное пространство, $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное и центрально-симметричное тело, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f : \partial V \rightarrow X$ – нечётное и непрерывное отображение границы множества V в X ,

$$\rho := \min_{x \in f(\partial V)} \|x\|. \quad \text{Тогда}$$

$$d_n(f(\partial V), X) \geq \rho, \quad d^n(f(\partial V), X) \geq \rho.$$

Доказательство. Так как $d_n(A, X) = \gamma_n(A, X)$ для любого непустого $A \subset X$ (по теореме 7), то для проверки первого неравенства теоремы достаточно показать, что $\gamma_n(f(\partial V), X) \geq \rho$. Выберем произвольно $L \in \mathcal{Aff}_n(X)$ – аффинное подпространство и $\tau \in \mathcal{C}(X, L)$. Пусть $g : L \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гомеоморфизм, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$. По следствию 4 (из теоремы Борсука) для отображения $(g \circ \tau \circ f) : \partial V \rightarrow \mathbb{R}^m$ найдётся точка $\lambda \in \partial V$, для которой

$$(g \circ \tau \circ f)(\lambda) = (g \circ \tau \circ f)(-\lambda),$$

а, значит, и $(\tau \circ f)(\lambda) = (\tau \circ f)(-\lambda)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{x \in f(\partial V)} \|x - \tau(x)\| &\geq \frac{1}{2} \left(\|f(\lambda) - (\tau \circ f)(\lambda)\| + \|f(-\lambda) - (\tau \circ f)(-\lambda)\| \right) \geq \\ &\geq \left\| \frac{f(\lambda) - (\tau \circ f)(\lambda)}{2} - \frac{f(-\lambda) - (\tau \circ f)(-\lambda)}{2} \right\| = \|f(\lambda)\| \geq \rho. \end{aligned}$$

Для доказательства второго неравенства выберем $M \in \mathcal{L}^n(X)$ и непрерывные линейные функционалы $x_i^* : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k \leq n$, так чтобы

$$M = \{x \in X : x_i^*(x) = 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Тогда отображение, сопоставляющее $z \in \partial V$ вектор с координатами $x_i^*(f(z))$, $i = 1, \dots, k$, действует из $\partial V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^k$, $k \leq n$, является непрерывным и нечётным. По следствию 4 (из теоремы Борсука) и из-за нечётности отображений $f(\cdot)$, $x_i^*(\cdot)$, $i = 1, \dots, k$, для некоторого $z_0 \in \partial V$ выполняются равенства $x_i^*(f(z_0)) = x_i^*(f(-z_0)) = 0$, $i = 1, \dots, k$, т.е. $f(z_0) \in f(\partial V) \cap M$. Так как подпространство $M \in \mathcal{L}^n(X)$ выбиралось произвольно, отсюда и из определения поперечника по Гельфанду следует второе неравенство теоремы. $\triangleright$

Замечание 6. (о гельфандовских поперечниках). Иногда для подмножеств в функциональных пространствах при определении гельфандовского поперечника удобно рассматривать не только непрерывные линейные функционалы, но и некоторые разрывные. Например, если $X = L_p[0, 1]$, а M – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1, то в качестве функционалов можно брать значение функции в точке. В этой связи введём следующую величину:

пусть X_0, X – нормированные пространства, $J : X_0 \rightarrow X$ – линейный непрерывный оператор, $\ker J = \{0\}$, $M \subset X_0$. Положим

$$d_{X_0, J}^n(J(M), X) = \inf_{L^n \in \mathcal{L}^n(X_0)} \sup_{x \in L^n \cap M} \|J(x)\|_X,$$

где $\mathcal{L}^n(X_0)$ – совокупность подпространств в X_0 коразмерности не выше n .

Вопрос 0.1. При каких условиях на X_0, J выполнено равенство

$$d_{X_0, J}^n(J(M), X) = d^n(J(M), X) ?$$

Замечание 7. Нижнюю оценку для гельфандовских поперечников в теореме 10 (Маковоза) можно получить и для $d_{X_0, J}^n$:

если $S = \partial B_2^{n+1}$, $F : S \rightarrow X_0$ – непрерывное нечётное отображение, то

$$d_{X_0, J}^n(J(F(S)), X) \geq \inf_{\lambda \in S} \|J(F(\lambda))\|_X.$$

Для доказательства выбираем $M \in \mathcal{L}^n(X)$ и непрерывные линейные функционалы $x_i^* : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k \leq n$, так чтобы

$M = \{x \in X_0 : x_i^*(x) = 0, i = 1, \dots, k\}$. Далее рассматриваем непрерывное, нечётное отображение $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$\varphi(\lambda) = (x_1^*(F(\lambda)), \dots, x_k^*(F(\lambda)))$$

и, пользуясь теоремой 8 (Борсука), точку $x = F(\lambda_0)$ для $\lambda_0 \in S$ такого, что $\varphi(\lambda_0) = 0$. $\triangleright$

Часто в качестве X_0 берут плотное подпространство в X с более сильной нормой, а в качестве J — оператор тождественного включения.

Приведём как приложение леммы Маковоза (теорема 10) теорему о равенстве поперечника класса $W_{\infty, g}^1[a, b]$ и наилучшего приближения кусочно-постоянными функциями первообразной $G(\cdot)$ от веса $g(\cdot)$.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L_1([a, b], \mathbb{R}_+)$, $v \in L_p([a, b], \mathbb{R}_+)$, $AC[a, b]$ — пространство **абсолютно непрерывных функций**, т.е. функций $f(\cdot)$, для каждой из которых найдётся $u \in L_1[a, b]$ такое, что $f(z) = f(a) + \int_a^z u(\tau) d\tau$ при любом $z \in [a, b]$ (точнее, $u \in L_1[a, b]$ — это класс эквивалентных функций, но для каждой из них значение интеграла $\int_a^z u(\tau) d\tau$ одинаково, а разные функции класса отличаются друг от друга не более чем на множестве меры нуль). Для каждой $f \in AC[a, b]$ произвольно выберем одну из класса $u(\cdot)$ эквивалентных и обозначим её $f'(\cdot)$. Пусть

$$W_{\infty, g}^1[a, b] = \{f \in AC[a, b] : |f'(t)| \leq g(t) \text{ п.в.}\},$$

$$L_{p, v}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{p, v} := \|vf\|_{L_p[a, b]} < \infty\}$$

с нормой $\|\cdot\|_{p, v}$.

Для $E \subset [a, b]$ обозначим характеристическую функцию E

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in E, \\ 0, & \text{если } t \notin E. \end{cases}$$

Положим $G(t) = \int_a^t g(\tau) d\tau$, $a = t_0$, $b = t_n$, $S_n[a, b] =$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[t_{i-1}, t_i]} : t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

(множество кусочно-постоянных функций с n нефиксированными участками постоянства).

Теорема 11. (А.А. Васильева, 2005, см. также [5]). Выполнено равенство

$$d_n(W_{\infty,g}^1[a, b], L_{p,v}[a, b]) = \inf\{\|G - s\|_{p,v} : s \in S_n[a, b]\}.$$

Доказательство. Докажем оценку сверху для поперечника. Зафиксируем разбиение $T = \{t_i\}_{i=0}^n$. Тогда множество функций

$$M_T = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[t_{i-1}, t_i]} : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

является подпространством в $L_{p,v}[a, b]$ размерности не выше n . Значит,

$$d_n(W_{\infty,g}^1[a, b], L_{p,v}[a, b]) \leq \sup_{f \in W_{\infty,g}^1[a, b]} \inf_{s \in M_T} \|f - s\|_{p,v}.$$

Заметим, что если $\|G - s_0\|_{p,v} = \inf_{s \in L_T} \|G - s\|_{p,v}$ для некоторого $s_0 = \sum_{i=1}^n c_i^0 \chi_{[t_{i-1}, t_i]}$, то для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдётся точка $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ такая, что $G(\tau_i) = c_i^0$ (**упражнение**).

Поэтому, если $f \in W_{\infty,g}^1[a, b]$, то для $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$,

$$|f(t) - f(\tau_i)| = \left| \int_{\tau_i}^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{\tau_i}^t g(\tau) d\tau \right| = |G(t) - c_i^0|.$$

Значит, $\inf_{s \in L_T} \|f - s\|_{p,v}^p \leq$

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} v^p(t) |f(t) - f(\tau_i)|^p dt \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} v^p(t) |G(t) - c_i^0|^p dt =$$

$\inf_{s \in L_T} \|G - s\|_{p,v}^p$. Взяв точную верхнюю грань по $f \in W_{\infty,g}^1[a, b]$ и затем точную нижнюю грань по всем разбиениям T , получим

$$\begin{aligned} d_n(W_{\infty,g}^1[a, b], L_{p,v}[a, b]) &\leq \inf_T \inf_{s \in L_T} \|G - s\|_{p,v} = \\ &= \inf\{\|G - s\|_{p,v} : s \in S_n[a, b]\}. \end{aligned}$$

Докажем нижнюю оценку для поперечников. Для этого воспользуемся теоремой 10 (лемма Маковского, [10]) и методом из той же работы. Положим

$$S^n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| = b - a \right\}$$

– граница $(n+1)$ -мерного октаэдра B_1^{n+1} . Обозначим

$$\tau_0(\lambda) = a, \quad \tau_i(\lambda) = \tau_{i-1}(\lambda) + |\lambda_i|, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

(в частности, $\tau_{n+1}(\lambda) = b$). Пусть Δ – множество пар (α, β) чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Если пара $(\alpha, \beta) \in \Delta$ выберем $\gamma = \gamma_{\alpha, \beta} \in [\alpha, \beta]$ так, чтобы

$$\int_{\alpha}^{\gamma} g(t) dt = \int_{\gamma}^{\beta} g(t) dt,$$

и положим $\Psi(\alpha, \beta) = \psi_{\alpha, \beta}(\cdot)$, $(\alpha, \beta) \in \Delta$, $\psi_{\alpha, \beta}(t) =$

$$\int_{\alpha}^t g(\tau) d\tau \text{ для } \alpha \leq t \leq \gamma, \quad \psi_{\alpha, \beta}(t) = \int_t^{\beta} g(\tau) d\tau \text{ для } \gamma \leq t \leq \beta, \\ \psi_{\alpha, \beta}(t) = 0 \text{ для } t \in [a, b] \setminus [\alpha, \beta].$$

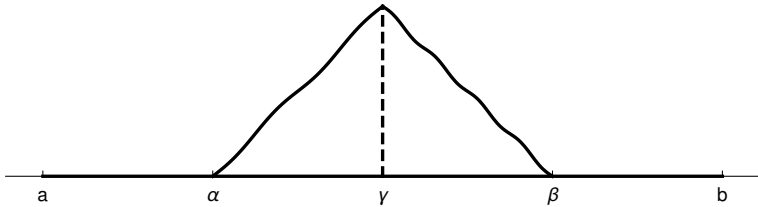


График $\psi_{\alpha, \beta}(\cdot)$.

Если $a \leq \alpha \leq b$ положим $\Psi_{\pm}(\alpha) = \psi_{\alpha}^{\pm}(\cdot)$,

$$\psi_{\alpha}^{-}(t) = \int_t^{\alpha} g(\tau) d\tau, \quad \psi_{\alpha}^{+}(t) = 0 \quad \text{для } a \leq t \leq \alpha,$$

$$\psi_{\alpha}^{-}(t) = 0, \quad \psi_{\alpha}^{+}(t) = \int_{\alpha}^t g(\tau) d\tau \quad \text{для } \alpha \leq t \leq b.$$

Теперь определим отображение $F : S^n \rightarrow L_{p,v}[a, b]$. Пусть

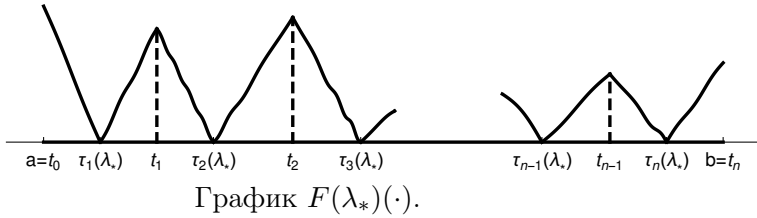
$$F(\lambda) = (\operatorname{sgn} \lambda_1) \psi_{\tau_1(\lambda)}^{-} + \sum_{i=2}^{n-1} (\operatorname{sgn} \lambda_i) \psi_{\tau_i(\lambda), \tau_{i+1}(\lambda)} + (\operatorname{sgn} \lambda_n) \psi_{\tau_n(\lambda)}^{+}.$$

Упражнение 15. Проверить, что $\psi_{\alpha, \beta}(\cdot)$, $\psi_{\delta}^{\pm}(\cdot) \in AC[a, b]$ при любых $(\alpha, \beta) \in \Delta$ и $\delta \in [a, b]$. Проверить, что $\Psi \in C(\Delta, L_{p,v}[a, b])$ и $\Psi_{-}, \Psi_{+} \in C([a, b], L_{p,v}[a, b])$. Проверить, что также непрерывно как отображение из S^n в $L_{p,v}[a, b]$ каждое слагаемое в определении функции $F(\cdot)$.

Таким образом, отображение $F(\cdot)$ непрерывно и нечётно. По лемме Маковского (теорема 10)

$$d_n(W_{\infty, g}^1[a, b], L_{p,v}[a, b]) \geq \inf_{\lambda \in S^n} \|F(\lambda)\|_{p,v}.$$

Из компактности получаем, что точная нижняя грань достигается на некотором $\lambda_* \in S^n$. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что все координаты вектора λ_* неотрицательны. Положим $t_0 = a$, $t_n = b$, $t_i = \gamma_{\tau_i(\lambda_*), \tau_{i+1}(\lambda_*)}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$.



Тогда $F(\lambda_*)(t) = |G(t) - G(\tau_i(\lambda_*))|$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, т.е. $F(\lambda_*)(t) = |G(t) - s_*|$, где $s_* = \sum_{i=1}^n G(\tau_i(\lambda_*)) \chi_{[t_{i-1}, t_i]}$. Отсюда

$$\inf_{\lambda \in S^n} \|F(\lambda)\|_{p,v} = \|G - s_*\|_{p,v} \geq \inf \{\|G - s\|_{p,v} : s \in S_1[a, b]\}. \quad \triangleright$$

Замечание 8. (А.А. Васильева, 2005) Повторяя рассуждения теоремы 11, можно показать, что такое же равенство выполнено и для поперечников по Гельфанду. Для получения верхней оценки поперечника следовало бы выбрать подпространство $L^n = \{f : f(\tau_i) = 0, \ 1 \leq i \leq n\}$. Однако, функционалы $f \mapsto f(\tau_i)$ не являются непрерывными в $L_{p,v}[a, b]$, поэтому их заменяем на функционалы $f \mapsto (2\delta)^{-1} \int_{\tau_i-\delta}^{\tau_i+\delta} f(t) dt$ и затем делаем предельный переход при $\delta \rightarrow 0$. Для гельфандовских поперечников, определённых по функционалам, непрерывным на $C[a, b] \subset L_{p,v}[a, b]$ или на соответствующем пространстве Соболева, равенство также выполнено (см. замечание 7 после леммы Маковоза). $\triangleright$

Поперечники p -эллипсоидов в ℓ_q^n

При $r = (r_1, \dots, r_n)$ и $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0$ множества

$$B_p^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^p \leq 1\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$B_\infty^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, \dots, n} \left| \frac{x_i}{r_i} \right| \leq 1\}, \quad p = \infty,$$

называют **p -эллипсоидами** (в $\mathbb{R}^n$). Оказывается, что задача вычисления поперечников этих множеств в пространствах ℓ_q^n связана со следующей (её иногда называют **основной изопериметрической**) задачей (см. [16], стр. 232)

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^q \rightarrow \sup \quad (x_1, \dots, x_n) \in B_p^n(r). \quad (23)$$

Решая (23) по методу Лагранжа ([16]), получим ряд значений (спектральных чисел) $\alpha_k(r, p, q)$, $\beta_k(r, p, q)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k < n$, играющих важную роль в задаче о поперечниках.

При $1 < p, q < \infty$ найдём стационарные точки (23), т.е. такие точки, для которых выполнены необходимые условия экстремума 1-го порядка. Пусть $L = -\lambda_0 \sum_{i=1}^n |x_i|^q + \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^p$ — функция

Лагранжа задачи. Тогда для любой стационарной точки найдутся $(\lambda_0, \lambda_1) \neq 0$ такие, что а) $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$, б) $\lambda_1 = 0$ или $\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^p = 1$, в) $L'(x) = 0$:

$$-\lambda_0 q |x_i|^{q-1} \operatorname{sgn} x_i + \lambda_1 p \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^{p-1} \frac{\operatorname{sgn} x_i}{r_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 \neq 0$ и тогда $x = 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\lambda^q |x_i|^q = |x_i|^p r_i^{-p}$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda^q := \frac{q\lambda_0}{p\lambda_1}$. Полученная система уравнений при $p = q = 2$ решает задачу о нахождении собственных векторов; в общем случае такая система – это нелинейный аналог спектральной задачи. При решении каждого из её уравнений для $p \neq q$ могут возникнуть два варианта: $x_i = 0$ или $\left| \frac{x_i}{r_i} \right| = (\lambda r_i)^{-\frac{q}{q-p}}$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому стационарные точки (23) имеют вид $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, где $\xi_i = \pm r_i (\lambda r_i)^{-\frac{q}{q-p}}$ или $\xi_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Из равенства $\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^p = 1$ получим

$$\lambda^{-1}(r, p, q, i_1, \dots, i_k) = \left(\sum_{j=1}^k r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Решая уравнения для $p = q$, получим, что в этом случае спектр состоит из чисел r_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$.

Задача (23) при $p, q \in \{1, \infty\}$ не является гладкой. Однако её можно привести к гладкой задаче, добавляя ограничения вида $x_i \geq 0$ или $x_i \leq r_i$, $i = 1, \dots, n$, и т.п.

Пусть $\alpha_k(r, p, q) = \beta_k(r, p, q) = r_{k+1}$ при $1 \leq p = q \leq \infty$, а при $1 \leq p, q \leq \infty$ и $p \neq q$

$$\alpha_k(r, p, q) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} r_i^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \quad \beta_k(r, p, q) = \left(\sum_{i=k+1}^n r_i^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Теорема 12. (Пич–Стесин–Ходулёв, [16], [14], [19]) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq n$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда, если p_k – любой из попереч-

ников $a_k, d_k, \lambda_k, \pi_k, \varphi_k$ то

$$\begin{aligned} \text{в случае } p = q & \quad b_k(B_p^n(r), \ell_p^n) = p_k(B_p^n(r), \ell_p^n) = r_{k+1}, \\ \text{в случае } p > q & \quad p_k(B_p^n(r), \ell_q^n) = \beta_k(r, p, q), \\ \text{в случае } p < q & \quad a_k(B_p^n(r), \ell_q^n) = \alpha_k(r, p, q). \end{aligned}$$

При доказательстве теоремы 12 будем использовать несколько важных результатов:

Теорема 13. (А.Б. Ходулёв, [19]). Пусть Y, Z – нормированные пространства на одном и том же линейном пространстве L , BY – единичный шар в Y и $C(Y, Y) \subseteq C(Z, Z)$, A – выпуклое подмножество L , $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для александровских поперечников выполняется свойство мультипликативности

$$a_{k_1+k_2}(A, Z) \leq a_{k_1}(A, Y) \cdot a_{k_2}(BY, Z)$$

(если в этом неравенстве поперечник a_{k_2} равен бесконечности, а поперечник a_{k_1} – нулю, то их произведение считаем равным бесконечности и неравенство – выполненным по определению).

Доказательство. Выберем $M_i \in \mathcal{C}_{k_i}(L)$, $i = 1, 2$, и отображения $f \in \mathcal{C}(Y, M_1)$, $g \in \mathcal{C}(Z, M_2)$; обозначим

$$b_1 = \sup_{x \in A} \|x - f(x)\|_Y, \quad b_2 = \sup_{y \in BY} \|y - g(y)\|_Z.$$

Если $b_1 = 0$, то A лежит в M_1 , а так как A выпукло, то отсюда следует, что линейная оболочка A , имеет размерность не выше чем k_1 , так что оба поперечника $a_{k_1+k_2}$ и a_{k_1} равны нулю. В этом случае утверждение теоремы выполнено. Далее не ограничивая общности считаем, что $b_1 > 0$, $b_2 < \infty$. Пусть

$$y(x) = \frac{1}{b_1}(x - f(x)), \quad x \in L.$$

Из определения следует, что $y(x) \in BY$ при $x \in A$. Пусть

$$h(x) = f(x) + b_1 \cdot g(y(x)).$$

Так как $C(Y, Y) \subseteq C(Z, Z)$, то $h \in C(Z, Z)$ и $\|x - h(x)\|_Z =$
 $\|x - f(x) - b_1 \cdot g(y(x))\|_Z = b_1 \cdot \|y(x) - g(y(x))\|_Z \leq b_1 \cdot b_2.$

Кроме того,

$$\text{Im } h = \text{Im } f + b_1 \cdot \text{Im } g \subset M_1 + b_1 \cdot M_2 \in \mathcal{C}_{k_1+k_2}(L).$$

Таким образом,

$$a_{k_1+k_2}(BX, Z) = \inf_{M \in \mathcal{C}_{k_1+k_2}(L)} \inf_{\tau \in \mathcal{C}(X, M)} \sup_{x \in BX} \|x - \tau(x)\|_Z \leq$$

$$\sup_{x \in BX} \|x - h(x)\|_Z \leq b_1 \cdot b_2.$$

Замечание 9. (А.Б. Ходулёв, [19]). Неравенства, аналогичные неравенству теоремы 13, выполняются и для линейного и колмогоровского поперечников:

$$\lambda_{k_1+k_2}(A, Z) \leq \lambda_{k_1}(A, Y) \cdot \lambda_{k_2}(BY, Z),$$

$$d_{k_1+k_2}(A, Z) \leq d_{k_1}(A, Y) \cdot d_{k_2}(BY, Z). \quad \triangleright$$

Теорема 14. (Брауэр, см. [16], [20] и др.) Пусть $B_2^n \subset \mathbb{R}^n$ – евклидов шар, $n \in \mathbb{N}$, $F : B^n \rightarrow B^n$ – непрерывно. Тогда найдётся $x \in B^n$, для которого $F(x) = x$ (такая точка называется неподвижной точкой отображения F).

Доказательство этого утверждения приводится в дополнении. $\triangleright$

Следствие 6. Пусть M гомеоморфно B_2^n , $F : M \rightarrow M$. Тогда найдётся $x \in M$, для которого $F(x) = x$.

Доказательство. Пусть φ – гомеоморфизм между M и B^n . Из определения следует, что

$$\varphi \circ F \circ \varphi^{-1} : B^n \rightarrow B^n$$

– непрерывно. По теореме 14 (Брауэра) найдётся $x_0 \in B^n$, для которой $(\varphi \circ F \circ \varphi^{-1})(x_0) = x_0$. Поэтому точка $x = \varphi^{-1}(x_0)$ является неподвижной для отображения F . $\triangleright$

Отображение F метрического пространства $\langle M, \rho \rangle$ в себя называется ϵ -сдвигом, если $\rho(x, F(x)) \leq \epsilon$ для любого $x \in M$.

Предложение 2. (теорема об ϵ -сдвиге, см. [16], [20] и др.) Пусть B – единичный шар конечномерного банахова пространства X , $F : B \rightarrow X$ – непрерывный ϵ -сдвиг, $\delta < 1 - \epsilon$. Тогда $\delta \cdot B \subset F(B)$.

Доказательство. Предположим обратное: найдётся вектор $x_0 \in (\delta \cdot B) \setminus F(B)$. Так как $F(B)$ – замкнуто, то также и некоторая окрестность x_0 не содержит точек из $F(B)$. Пользуясь этим, построим непрерывное отображение $\xi(\cdot)$ шара B в границу ∂B без неподвижных точек:

для каждого $x \in B$ проведём луч с началом в точке $F(x)$, проходящий через x_0 ; пусть $\xi(x)$ – точка на этом луче и границе ∂B , отделённая точкой x_0 от точки $F(x)$ относительно этого луча. Тогда такое отображение ξ из B в ∂B непрерывно: оно может быть задано формулой $\xi(x) = (1 - \alpha)F(x) + \alpha x_0$, где $\alpha > 1$ таково, что $\|\xi(x)\| = 1$.

Если X – евклидово пространство, то для $y := (F(x) - x_0)$ выполняется $\|y\|_2 > \iota > 0$,

$$1 = \|(1 - \alpha)y + x_0\|_2^2 = (1 - \alpha)^2\|y\|_2^2 + 2(1 - \alpha)\langle y, x_0 \rangle + \|x_0\|_2^2,$$

$$1 - \alpha = \frac{-\langle y, x_0 \rangle - \sqrt{\langle y, x_0 \rangle^2 + \|y\|_2^2 \cdot (1 - \|x_0\|_2^2)}}{\|y\|_2^2},$$

то есть $\alpha(\cdot)$ – непрерывное отображение из $X \setminus \iota \cdot BX$ в $\mathbb{R}$. В случае произвольного нормированного пространства X для построения $\xi(\cdot)$ можно дополнительно воспользоваться леммой 2.

Отображение $\xi(\cdot)$ не имеет неподвижных точек: $\|x - \xi(x)\| \geq \|F(x) - \xi(x)\| - \|x - F(x)\| > \|x_0 - \xi(x)\| - \epsilon \geq \|\xi(x)\| - \epsilon - \|x_0\| \geq 1 - \delta - \epsilon > 0$ – противоречие с теоремой 14 (Брауэра). $\triangleright$

Лемма 3. (о проекторе, см. [16]) Пусть X – нормированное пространство, $n \in \mathbb{Z}_+$, $A \subset X$, $L \in \mathcal{L}_{n+1}^*(X)$, $\delta > 0$, $(\delta \cdot BX \cap L) \subset A$, $\pi : X \rightarrow L$ – линейный проектор, $\|\pi\| = 1$. Тогда $a_n(A, X) \geq \delta$.

Доказательство. Предположим обратное: $a_n(A, X) < \delta$ и выберем пару (τ, K) , $\tau \in \mathcal{C}(X, K)$, $K \in \mathcal{C}_n(X)$, а также положительное ι , так чтобы при всех $x \in A$

$$\|x - \tau(x)\| \leq \delta - \iota.$$

Рассмотрим отображение $\psi : A \rightarrow L$, $\psi = (\pi \circ \tau)$. Образ ψ лежит в объединении плоскостей размерности не более n , а само ψ – непрерывный $(\delta - \iota)$ -сдвиг шара $(\delta \cdot BX \cap L)$ из L : если

$$x \in (\delta \cdot BX \cap L) \subset A, \quad \text{то}$$

$$\|x - (\pi \circ \tau)(x)\| = \|\pi(x) - (\pi \circ \tau)(x)\| \leq \|x - \tau(x)\| \leq \delta - \iota.$$

По предложению 2 (теореме об ϵ -сдвиге) образ отображения $\psi(\cdot)$ содержит некоторый шар размерности $(n+1)$ и это противоречит тому, что образ $\psi(\cdot)$ покрывается конечным числом плоскостей размерности не выше n . $\triangleright$

Следствие 7. (см. [16] и др.). Пусть X – n -мерное банахово пространство, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $0 \leq k \leq n-1$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$a_k(BX, BX) = 1. \quad \triangleright$$

Следствие 8. (см. [16] и др.). Пусть X – евклидово пространство, $A = -A$ – центрально-симметричное множество в X , $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} d_n(A, X) &= \lambda_n(A, X) = \pi_n(A, X), \\ d^n(A, X) &\leq d_n(A, X), \quad b_n(A, X) \leq a_n(A, X). \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство. Равенство колмогоровского, линейного и проекционного поперечников следует из определений поперечников и того, что в евклидовом пространстве оператор ортогонального проектирования на $L \in \text{Aff}_n(X)$ является одновременно линейным непрерывным проектором и оператором, сопоставляющим каждому $x \in X$ элемент наилучшего приближения из L .

Чтобы доказать неравенство, связывающее в евклидовом пространстве значения колмогоровского и гельфандовского поперечников, возьмём произвольно $L \in \mathcal{L}_n(X)$; пусть $L^\perp \in \mathcal{L}^n(X)$ – его ортогональное дополнение. Тогда

$$d^n(A, X) \leq \sup_{x \in A \cap L^\perp} \|x\| \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Так как $L \in \mathcal{L}_n(X)$ было произвольным, то $d^n(A, X) \leq d_n(A, X)$.

Неравенство между бернштейновским и александровским поперечниками следует из леммы 3 (о проекторе) и того, что на любое подпространство $L \in \mathcal{L}_{n+1}(X)$ имеется проектор с единичной нормой. $\triangleright$

Доказательство теоремы 12 проведём как это сделано в [19] (см. также [16] и др.). Установим неравенства

$$\varphi_k(B_p^n(r), \ell_q^n) \leq \beta_k(r, p, q), \quad p \geq q, \quad \text{и} \quad (25)$$

$$a_k(B_p^n(r), \ell_q^n) \leq \alpha_k(r, p, q), \quad p < q. \quad (26)$$

Чтобы доказать (25) возьмём $M \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^n)$ – подпространство, порождённое первыми k базисными векторами из $\mathbb{R}^n$, и проектор $\tau \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n, M)$,

$$\tau(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Для них при $q < p < \infty$ и любом $x \in B_p^n(r)$ $\|x - \tau(x)\|_q^q =$

$$\sum_{i=k+1}^n |x_i|^q = \sum_{i=k+1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^q \cdot r_i^q \leq \left(\sum_{i=k+1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\sum_{i=k+1}^n r_i^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} \leq$$

$\leq \beta_k^q(r, p, q)$ по неравенству Гёльдера или при $q = p < \infty$

$$\|x - \tau(x)\|_q^q = \sum_{i=k+1}^n |x_i|^q = \sum_{i=k+1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^q \cdot r_i^q \leq \sum_{i=k+1}^n \left| \frac{x_i}{r_i} \right|^q \cdot r_{k+1}^q \leq$$

$\leq \beta_k^q(r, p, q)$ и, значит, выполнено (25).

Упражнение 16. Доказать (25) для случая $p = \infty$.

Для доказательства (26) при $q < \infty$ выберем $x \in \mathbb{R}^n$, обозначим $\xi_i = r_i^{\frac{p}{q-p}} |x_i|$ и упорядочим последовательность ξ_i по неубыванию: $\xi_{i_1} \leq \dots \leq \xi_{i_n}$. Определим $\tau(x) = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$y_{i_1} = \dots = y_{i_{n-k-1}} = 0,$$

$$y_{i_j} = x_{i_j} - \left(\frac{r_{i_{n-k}}}{r_{i_j}} \right)^{\frac{p}{q-p}} |x_{i_{n-k}}| \operatorname{sgn} x_{i_j}, \quad j = n-k, \dots, n. \quad (27)$$

Заметим, что тем самым и $y_{i_{n-k}} = 0$, т.е. образ отображения τ лежит в объединении координатных плоскостей размерности k .

Из определения следует, что построенное отображение определено однозначно – оно не зависит от порядка следования равных значений в неравенствах $\xi_{i_1} \leq \dots \leq \xi_{i_n}$. Кроме того оно непрерывно:

для доказательства непрерывности рассмотрим область G , где при некоторой заданной перестановке $i_1, i_2, \dots, i_n$ чисел $1, \dots, n$ выполняются строгие неравенства $\xi_{i_1} < \dots < \xi_{i_n}$ и, одновременно, координаты точек $x \in G$ не обращаются в ноль и имеют постоянный знак. Пусть, например, G – это те точки, для которых $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ и $x_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для $\tau(x) = (y_1, \dots, y_n)$

$$y_1 = \dots = y_{n-k-1} = 0, \\ y_j = x_j - \left(\frac{r_{n-k}}{r_j} \right)^{\frac{p}{q-p}} x_{n-k}, \quad j = n-k, \dots, n, \quad (28)$$

т.е. отображение $\tau(\cdot)$ линейно в G и по линейности этой формулой может быть распространено на замыкание $\overline{G}$ области G . В точках области G формы записи (27) и (28) совпадают, а в её граничных точках (28) – одна из форм записи (27), т.е. отображение $\tau(\cdot)$, ограниченное на $\overline{G}$, непрерывно.

Упражнение 17. Доказать, что если отображение $f(\cdot)$ действует на объединении двух замкнутых множеств A и C и непрерывно на каждом из них по отдельности, то это отображение непрерывно и на их объединении.

Таким образом, отображение $\tau(\cdot)$ непрерывно на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Оценим погрешность аппроксимации $x \in B_p^n(r)$ элементом $\tau(x)$:

$$\begin{aligned} \|x - \tau(x)\|_q^q &= \sum_{j=1}^{n-k-1} |x_{i_j}|^q + r_{i_{n-k}}^{\frac{pq}{q-p}} \cdot |x_{i_{n-k}}|^q \cdot \sum_{j=n-k}^n r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-k-1} \xi_{i_j}^q r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} + \xi_{i_{n-k}}^q \cdot \sum_{j=n-k}^n r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}}, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{x_{i_j}}{r_{i_j}} \right|^p = \sum_{j=1}^n \xi_{i_j}^p \cdot r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} \leq 1. \quad (29)$$

Отсюда и из условия монотонности $\{\xi_{i_j}\}$ следует, что максимум $\|x - \tau(x)\|_q$ при ограничении $x \in B_p^n(r)$ достигается, когда $\xi_{i_{n-k}} = \dots = \xi_{i_n}$; (29) при таком условии преобразуется в

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{x_{i_j}}{r_{i_j}} \right|^p = \sum_{j=1}^{n-k-1} \xi_{i_j}^p \cdot r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} + \xi_{i_{n-k}}^p \sum_{j=n-k}^n r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} \leq 1. \quad (30)$$

Из (30), условий монотонности и того, что $q \geq p$, следует

$$\|x - \tau(x)\|_q^q \leq \xi_{i_{n-k}}^{q-p}.$$

Так как наибольшее значение $\xi_{i_{n-k}}^{q-p}$ при ограничениях (30) равно

$$\left(\sum_{j=n-k}^n r_{i_j}^{\frac{pq}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}}$$

то, окончательно,

$$\|x - \tau(x)\|_q \leq \alpha_k(r, p, q).$$

Упражнение 18. Доказать (26) для случая $q = \infty$.

Получим неравенство, противоположное (26) (см. [19]): будем использовать теорему 13 (о мультипликативности поперечников по Александрову), следствие 7 ($a_{n-1}(B_q^n, B_q^n) = 1$), общими свойствами 3), 6 а) для поперечников и равенством

$$\beta_{n-k-1}(r^{-1}, q, p) \cdot \alpha_k(r, p, q) = 1,$$

следующим из определения чисел α_k, β_k , а также уже доказанными оценками сверху (25) и (26). Итак,

$$1 = a_{n-1}(B_q^n, B_q^n) \leq a_k(B_p^n(r), B_q^n) \cdot a_{n-k-1}(B_q^n, B_p^n(r)),$$

$$a_k(B_p^n(r), B_q^n) \geq \frac{1}{a_{n-k-1}(B_q^n, B_p^n(r))} \geq \frac{1}{\varphi_{n-k-1}(B_q^n, B_p^n(r))} =$$

$$\frac{1}{\varphi_{n-k-1}(B_q^n(\frac{1}{r}), B_p^n)} \geq \frac{1}{\beta_{n-k-1}(\frac{1}{r}, q, p)} = \alpha_k(r, p, q), \quad q > p.$$

Точно также

$$\begin{aligned} a_k(B_p^n(r), B_q^n) &\geq \frac{1}{a_{n-k-1}(B_q^n, B_p^n(r))} = \frac{1}{a_{n-k-1}(B_q^n(\frac{1}{r}), B_p^n)} \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_{n-k-1}(\frac{1}{r}, q, p)} = \beta_k(r, p, q), \quad q < p, \end{aligned}$$

и это завершает доказательство теоремы 12. $\triangleright$

Среди точных значений поперечников конечномерных шаров $B_p^n(r)$ в ℓ_q^n для нижнего треугольника (т.е. при $1 \leq p < q \leq \infty$) ещё известен лишь один общий результат ([8], [11], см. [13] и [16]). Прежде чем его формулировать, отметим всеми широко используемое

Предложение 3. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $k < n$, X – нормированное пространство, $\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, X)$ невырождено (т.е. $\tau(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Тогда

$$d_k(\tau(B_1^n), X) = \lambda_k(\tau(B_1^n), X).$$

Доказательство. Пользуемся общими свойствами поперечников: 9) (о поперечниках центрально-симметричных множеств), 7) (о поперечнике выпуклой оболочки множества), тем, что B_1^n является выпуклой оболочкой базисных в $\mathbb{R}^n$ векторов $\{\pm e_j\}_{j=1}^n$, линейностью $\tau(\cdot)$ и тем, что для любого нечётного отображения $f : X \rightarrow M$, $M \in \mathcal{L}_k(X)$, найдётся $g \in \mathcal{L}(X, M)$ такое, что $f(\tau(e_j)) = g(\tau(e_j))$, $j = 1, \dots, n$. $\triangleright$

Теорема 15. (А.Н. Колмогоров, А.А. Петров, Ю.М. Смирнов, А.И. Мальцев, С.Б. Стечкин, см. [8], [11], [15], [16], [13]).

$$d_k(B_1^n, \ell_2^n) = \lambda_k(B_1^n, \ell_2^n) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}.$$

Доказательство. Для доказательства неравенства " $\geq$ " выберем $L \in \mathcal{L}_k^*(\ell_2^n)$ (т.е. $\dim L = k$) и ортонормированную систему $\{b_i\}_{i=1}^k$ в L . Пусть $\{e_m\}_m$ – базисные вектора в ℓ_2^n . Тогда

$$\sum_{m=1}^n b_{mi} b_{mj} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n b_{mi}^2 = k.$$

Задача 4. Доказать, что для $x \in \ell_2^n$ элемент $\sum_{i=1}^k \langle x, b_i \rangle b_i$ является элементом наилучшего приближения вектора x векторами подпространства L (здесь $\langle x, b_i \rangle$ – скалярное произведение векторов x и b_i , $i = 1, \dots, k$). $\triangleright$

Поэтому для величины $\text{dist}(x, L, \ell_2^n) = \text{dist}(x, L)_{\ell_2^n}$ наилучшего приближения $x \in \ell_2^n$ элементами L справедливо равенство

$$\text{dist}^2(x, L, \ell_2^n) = \|x - \sum_{i=1}^k \langle x, b_i \rangle b_i\|_2^2 = \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^k \langle x, b_i \rangle^2.$$

По общему свойству поперечников 7) (о поперечнике выпуклой оболочки множества), для уклонения $\text{dist}(B_1^n, L, \ell_2^n)$ октаэдра B_1^n от подпространства L в пространстве ℓ_2^n

$$\text{dist}^2(B_1^n, L, \ell_2^n) := \max_{1 \leq m \leq n} \text{dist}^2(e_m, L, \ell_2^n) = \max_{1 \leq m \leq n} (1 - \sum_{i=1}^k b_{mi}^2).$$

Значит, $n \cdot \text{dist}^2(B_1^n, L, \ell_2^n) \geq$

$$\sum_{m=1}^n (1 - \sum_{i=1}^k b_{mi}^2) = n - k \quad \text{или} \quad \text{dist}^2(B_1^n, L, \ell_2^n) \geq \frac{n - k}{n}. \quad (31)$$

Это доказывает оценку снизу для поперечника. В то же время, если предъявить любое подпространство $L \in \mathcal{L}_k^*(\ell_2^n)$, которое равноудалено от всех вершин $\{e_m\}_{m=1}^n$ октаэдра B_1^n , то неравенства в (31) обратятся в равенства, т.е. доказанная оценка снизу для поперечника $d_k(B_1^n, \ell_2^n)$ на таком L будет достигаться. Чтобы построить такое подпространство, рассмотрим линейный оператор (циклического сдвига) $\tau \in \mathcal{L}(\ell_2^n, \ell_2^n)$,

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1) \quad \text{для} \quad (x_1, \dots, x_n) \in \ell_2^n.$$

Если $(x_1, \dots, x_n)$ и λ – собственный вектор и собственное значение $\tau(\cdot)$, то $(x_2, \dots, x_n, x_1) = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)$,

$$x_1 = \lambda x_n = \lambda^2 x_{n-1} = \dots = \lambda^n x_1, \quad \lambda^n = 1.$$

В поле комплексных чисел уравнение $\lambda^n = 1$ имеет n различных корней, среди которых всегда присутствует $\lambda = 1$. Этому собственному значению соответствует собственный вектор, все координаты которого равны 1. Остальные корни уравнения $\lambda^n = 1$, не являющиеся действительными, распадаются на пары сопряжённых корней $(\lambda_j, \bar{\lambda}_j)$. Каждой такой паре в пространстве ℓ_2^n соответствует двумерное подпространство $L_j \in \mathcal{L}_2^*(\ell_2^n)$, переходящее в себя под действием оператора циклического сдвига $\tau(L_j) = L_j$. Это подпространство порождается парой собственных векторов $(z_j, \bar{z}_j)$ (над полем комплексных чисел: $\tau(z_j) = \lambda_j \cdot z_j$) и потому любое объединение в количестве s различных подпространств L_j порождает $2s$ -мерное подпространство в ℓ_2^n . Поэтому при любом $k < n$ из объединения двумерных и одномерных подпространств в ℓ_2^n , инвариантных относительно оператора $\tau(\cdot)$, можно составить подпространство $L \in \mathcal{L}_k^*(\ell_2^n)$, для которого $\tau(L) = L$. Так как отображение $\tau(\cdot)$ является изометрией (т.е. $\|\tau(x)\|_2 = \|x\|_2$), то подпространство L равноудалено от всех вершин октаэдра. Действительно, например, для $e_1 = \tau(e_2)$,

$$\inf_{y \in L} \|e_1 - y\|_2 = \inf_{z \in L} \|\tau(e_2) - \tau(z)\|_2 = \inf_{z \in L} \|e_2 - z\|_2$$

и т.д. $\triangleright$

Обобщением доказанной теоремы является

Теорема 16. (Л.Б. Софман, [13]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq n$, $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0$. Тогда

$$d_k(B_1^n(r), \ell_2^n) = \lambda_k(B_1^n(r), \ell_2^n) = \max_{k \leq m \leq n} \sqrt{(m - k) \left(\sum_{i=1}^m r_i^{-2} \right)^{-1}}.$$

Её доказательство дано в [13]. $\square$

Дополнения

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $A = -A$ – непустое, выпуклое и центрально-симметричное подмножество нормированного пространства X , $M \in \mathcal{L}_n(X)$. Обозначим через $\mathcal{L}^\#(X, M)$ – класс всех отображений из X в M , удовлетворяющих свойствам линейности, через $\mathcal{P}^\#(X, M)$ – класс всех отображений $\tau(\cdot)$ из X в M , удовлетворяющих свойствам линейности и условию $\tau^2 = \text{id}$ (т.е. все линейные операторы и все линейные проекторы не обязательно являющиеся непрерывными), $\mathcal{L}^{n,\#}(X)$ – класс всех, не обязательно замкнутых линейных подпространств X коразмерности не выше n ,

$$\begin{aligned}\lambda_n^\#(A, X) &= \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X), \tau \in \mathcal{L}^\#(X, L)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|, \\ \pi_n^\#(A, X) &= \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X), \tau \in \mathcal{P}^\#(X, L)} \sup_{x \in A} \|x - \tau(x)\|, \\ d^{n,\#}(A, X) &= \inf_{M \in \mathcal{L}^{n,\#}(X)} \sup_{x \in A \cap M} \|x\|.\end{aligned}$$

Теорема 17. (Heinrich S., [22]) Пусть $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, X – нормированное пространство, $K = -K$ – непустой, выпуклый и центрально-симметричный компакт в X , $E \in \mathcal{L}_m(X)$, $A = K + E$. Тогда $\lambda_n^\#(A, X) = \lambda_n(A, X)$,

$$\pi_n^\#(A, X) = \pi_n(A, X), \quad d^{n,\#}(A, X) = d^n(A, X). \quad \square$$

Доказательство теоремы Борсука

Теорема 18. (Борсук, см. [12], [2], [16]). Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, f – нечётное, непрерывное отображение единичной сферы S^n пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда найдётся $x \in S^n$, для которого $f(x) = 0$.

Отметим ещё несколько вариантов формулировки этой теоремы:

Теорема 19. (см. [12], [2], [16]). Не существует нечётного непрерывного отображения сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство (эквивалентности). $\Rightarrow$: Пусть $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ – нечётно и непрерывно. Тогда $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нечётно и непрерывно. По теореме 18 (Борсука) существует $x \in S^n$ такое, что $f(x) = 0$ – противоречие с $f(x) \in S^{n-1}$.

$\Leftarrow$: Пусть $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нечётно, непрерывно и не обращается в ноль на S^n . Тогда отображение

$$g(x) := \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

нечётно и непрерывно из S^n в S^{n-1} – противоречие. $\triangleright$

Теорема 20. (см. [12], [2], [16]). Для непрерывного $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, всегда существует $x \in S^n$ такое, что $f(x) = f(-x)$.

Доказательство (эквивалентности). $\Rightarrow$: Если отображение $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, то отображение

$$g(x) := f(x) - f(-x)$$

нечётно и непрерывно из S^n в $\mathbb{R}^n$. По теореме Борсука найдётся $x_0 \in S^n$, для которой $g(x_0) = 0$.

$\Leftarrow$: Пусть $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нечётно, непрерывно. Тогда для некоторой точки $x_0 \in S^n$

$$f(x_0) = f(-x_0).$$

Из-за нечётности $f(-x_0) = -f(x_0)$, что означает $f(x_0) = 0$. $\triangleright$

Теорема 21. (Люстерник и Шнирельман о покрытиях сфер, см. [12], [2], [16]). Если $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n + 1$, и открытые множества $U_1, \dots, U_m$ покрывают сферу S^n , то по крайней мере одно из множеств U_i , $i = 1, \dots, m$, содержит две диаметрально противоположные точки S^n .

Доказательство эквивалентности теорем Борсука и Люстерника-Шнирельмана будет использовать понятие нерва покрытия и простейшие свойства естественного отображения в нерв:

Пусть K – метрический компакт с метрикой ϱ , $U_1, \dots, U_m$ – открытые множества, покрывающие K , $m \in \mathbb{N}$, X – нормированное пространство, $\{e_i\}_{i=1}^m$ – точки из X , находящиеся в общем

положении (т.е. никакие k точек, $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq \dim(X) + 1$ из семейства $\{e_i\}_{i=1}^m$ не лежат в аффинной плоскости размерности $(k - 1)$). Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) &= \min\{\varrho(x, y) \mid y \in K \setminus U_k\}, \quad k = 1, \dots, m, \\ \mu_k(x) &= \varphi_k(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i(x)\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (32)$$

Свойства функций $\varphi_k, \mu_k, k = 1, \dots, m$:

- 1) функции φ_k, μ_k непрерывны,
- 2) $\varphi_k(x) \geq 0, \mu_k(x) \geq 0, \quad x \in K, \quad \varphi_k(x) > 0, \mu_k(x) > 0,$
если $x \in U_k$,
- 3) $\varphi_k(x) = \mu_k(x) = 0$ для $x \notin U_k$,
- 4) $\sum_{k=1}^m \mu_k(x) \equiv 1$.

Про семейство функций μ_k , удовлетворяющее свойствам 1)–4) говорят, что оно образует разбиение единицы, подчинённое покрытию $U_1, \dots, U_m$. Пусть

$$F(x) = \sum_{k=1}^m \mu_k(x) \cdot e_k.$$

Образ K при отображении $F(\cdot)$ называют нервом K , порождённым множеством $\{e_i\}_{i=1}^m$, и обозначают $N(e_1, \dots, e_m)$; отображение $F(\cdot)$ – называют отображением K в нерв $N(e_1, \dots, e_m)$. Из определения следует, что нерв является полиэдром.

Выведем теперь теорему Люстерника–Шнирельмана из теоремы Борсука: пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ – точки из $\mathbb{R}^n$, находящиеся в общем положении, $F(\cdot)$ – отображение из S^n в нерв $N(e_1, \dots, e_m)$, порождённое покрытием $U_1, \dots, U_m$. Отображение $F(\cdot)$ непрерывно из S^n в $\mathbb{R}^n$, поэтому по теореме Борсука найдётся $x \in S^n$, для которого

$$F(x) = F(-x). \quad (33)$$

По свойству 2) семейства $\{\mu_k\}$ найдётся $i \in \{1, \dots, m\}$, для которого $\mu_i(x) > 0$. Пусть $\{i_1, \dots, i_p\}$ – все индексы $i \in \{1, \dots, m\}$, для которых $\mu_i(x) > 0$. Тогда, по свойствам семейства $\{\mu_k\}$ и (33)

$$x, -x \in U_{i_k}, \quad k = 1, \dots, p.$$

В обратную сторону: пусть $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$ – нечётное векторное поле из S^n в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что для некоторого $x_0 \in S^n$

$$\eta(x_0) = 0,$$

что равносильно теореме Борсука. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим

$$A_i(\delta) := \{x \in S^n \mid \eta_i(x) \geq \delta\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Открытые множества

$$\text{int} \{A_i(\delta)\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad S^n \setminus \cup_{i=1}^n A_i(2\delta)$$

покрывают S^n . Так как множества $A_i(\delta)$, $i = 1, \dots, n$, не содержат диаметрально противоположных точек, то по теореме 21 Люстерника–Шнирельмана такие точки содержит множество

$$S^n \setminus \cup_{i=1}^n A_i(2\delta).$$

Таким образом, найдётся $x(\delta)$, такой что

$$\pm x(\delta) \in S^n \setminus \cup_{i=1}^n A_i(2\delta)$$

или

$$|\eta_i(x(\delta))| < 2\delta, \quad i = 1, \dots, n.$$

Устремив δ к нулю и воспользовавшись компактностью сферы S^n , получим, что полученные неравенства справедливы также для $\delta = 0$ при некотором $x(0) \in S^n$. $\triangleright$

Доказательство. (Теоремы Борсука см. [12], [2] и др.). Пусть X – нормированное пространство, $\dim X = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$. Через σ^s будем обозначать симплексы, построенные по аффинно независимой системе векторов:

$$\sigma^s := \text{conv}\{p_i\}_{i=0}^s =: [p_0, \dots, p_s], \quad \{p_i\}_{i=0}^s \subset X$$

(т.е. размерность симплекса – это верхний индекс; с помощью нижнего индекса различаются разные симплексы); гранью σ^k ,

$k \leq s$, симплекса σ^s называют симплекс, построенный по подсистеме вершин $\{p_{i_j}\}_{j=0}^k$ из $\{p_i\}_{i=0}^s$, $0 \leq i_j \leq s$, $j = 0, \dots, k$. Будем считать, что сферы S^k размерности k , $k = 0, 1, \dots, n$, реализованы в X как границы

$$\partial B_1^{k+1} := \{x = (x_1, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{k+1} |x_i| = 1\},$$

что $V^{n+1} := B_1^{n+1}$ и что для $k \leq n$

$$S_+^k := \{x \in S^k : x_{k+1} \geq 0\}, \quad S_-^k := \{x \in S^k : x_{k+1} \leq 0\}.$$

Конечное семейство симплексов $\varphi^k := \{\sigma_j\}$ называется триангуляцией S^k , $k \leq n$, если

1) $\sigma_i \cap \sigma_j$ либо $\emptyset$, либо общая грань σ_i и σ_j , $\sigma_i, \sigma_j \in \varphi^k$. При этом о симплексах σ_i и σ_j говорят, что они правильно расположены.

2) Все грани любого симплекса $\sigma_i \in \varphi^k$ принадлежат φ^k .

3) $S^k = \cup_{\sigma \in \varphi^k} \sigma$.

Триангуляцию Σ^n , состоящую из всех симплексов $[\pm e_1 \dots, \pm e_{n+1}]$, а также их всевозможных граней, называют базисной триангуляцией в S^n (здесь e_i — i -ый базисный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \dots, n+1$). Пусть $\alpha(\cdot)$ — оператор взятия противоположного элемента: $\alpha(x) = -x$, $x \in X$; φ^n — триангуляция S^n . Триангуляция φ_k сферы S^k , $k \leq n$, называется симметричной к φ^k , если для любых $s \leq k$ и $\sigma^s \in \varphi^k$

$$\alpha(\sigma^s) \in \varphi_k.$$

Триангуляцию φ^k называем симметричной, если $\varphi^k = \varphi_k$.

Отображение $f : \varphi^k \rightarrow \varphi^n$ триангуляции φ^k (сферы S^k) в триангуляцию φ^n (сферы S^n) называется симплициальным, если для любого $\sigma^s = [p_0, \dots, p_s] \in \varphi^k$ найдётся $\sigma^m \in \varphi^n$, такое что

$$\sigma^m = [f(p_0), \dots, f(p_s)]$$

(и, значит, $s \geq m$).

Для симплициального отображения $f : \varphi^k \rightarrow \Sigma^n$ симплекс $[p_0, \dots, p_r] \in \varphi^k$ назовём положительным, если

1) $[f(p_0), \dots, f(p_r)] = \sigma^r \in \Sigma^n$ (невырожденность отображения f на $[p_0, \dots, p_r]$),

2) $\sigma^r = [e_{i_0}, -e_{i_1}, \dots, (-1)^r e_{i_r}]$, а последовательность $\{i_j\}_{j=0}^r$ упорядочена по возрастанию.

Всякому симплициальному отображению $f : \varphi^k \rightarrow \Sigma^n$ и любому подмножеству $L \subset S^k$ сопоставим число $p(f, L, r)$ положительных r -мерных симплексов, лежащих внутри L .

Предложение 4. Пусть $k \leq n$, $f : \varphi^k \rightarrow \Sigma^n$ – симплициальное отображение (триангуляции сферы S^k в базовую триангуляцию) и триангуляция φ^k симметрична. Если $\alpha \circ f = f \circ \alpha$, то

$$p(f, S^k, k) \equiv p(f, S^{k-1}, k-1) \pmod{2}.$$

Доказательство. Запишем, что $S^k = S_+^k \cup S_-^k$, и определим

$$\{\sigma^k \subset S_+^k\} =: A_0 \cup A_+ \cup A_-,$$

где

$$A_+ := \{\sigma^k \subset S_+^k : \sigma^k \text{ — положителен}\},$$

$$A_- := \{\sigma^k \subset S_+^k : \alpha(\sigma^k) \text{ — положителен}\},$$

$$A_0 := \{\sigma^k \subset S_+^k : \sigma^k, \alpha(\sigma^k) \text{ — не положительны}\}.$$

Пусть для положительных $\sigma^{k-1} \subset S_+^k$

$$T := \sum_{\sigma^k \in A_+} p(f, \sigma^k, k-1) + \sum_{\sigma^k \in A_-} p(f, \sigma^k, k-1) + \sum_{\sigma^k \in A_0} p(f, \sigma^k, k-1).$$

Если $\sigma^{k-1} \in \varphi^k$ – положителен и лежит в S^{k-1} (а, значит, и в S_+^k), то существует единственный $\sigma^k \subset S_+^k$, для которого

$$\sigma^{k-1} \subset \sigma^k.$$

Если $\sigma^{k-1} \in \varphi^k$ – положителен и не лежит в S^{k-1} , но лежит в S_+^k , то существует ровно два симплекса $\sigma_1^k, \sigma_2^k \subset S_+^k$, для которых

$$\sigma^{k-1} \subset \sigma_i^k, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому

$$T \equiv p(f, S^{k-1}, k-1) \pmod{2}.$$

Далее, если для $\sigma^k \in A_0$

$$f(\sigma^k) = [\pm e_{i_0}, \dots, \pm e_{i_k}]$$

– невырожден, то $f(\alpha(\sigma^k))$ также невырожден и $\alpha(\sigma^k) \in A_0$. Поэтому, если $\sigma_1^{k-1} \subset \sigma^k$, σ_1^{k-1} – положительный, то имеется ещё один положительный симплекс $\sigma_2^{k-1} \subset \sigma^k$, $\sigma_1^{k-1} \neq \sigma_2^{k-1}$, получающийся удалением другой вершины из σ^k , препятствующей его положительности. Значит, $p(f, \sigma^k, k-1) = 2 \cdot l$, что влечёт

$$T \equiv \left(\sum_{\sigma^k \in A_+} p(f, \sigma^k, k-1) + \sum_{\sigma^k \in A_-} p(f, \sigma^k, k-1) \right) \pmod{2}.$$

Для каждого $\sigma^k \in A_+$ существует единственный положительный $\sigma^{k-1} \subset \sigma^k$ (убираем вершину с хвоста). Аналогично, для каждого $\sigma^k \in A_-$ существует единственный положительный $\sigma^{k-1} \subset \sigma^k$ (убираем вершину с начала). Значит,

$$T \equiv (\text{card } A_+ + \text{card } A_-) \pmod{2}.$$

Так как $\alpha \circ f = f \circ \alpha$, то

условие: $\sigma^k \subset S_+^k$ – отрицательный

и условие: $\alpha(\sigma^k) \subset S_-^k$ – положительный

равносильны. В итоге, $p(f, S^k, k) =$

$$= \text{card } A_+ + \text{card } A_- \equiv T \pmod{2} \equiv p(f, S^{k-1}, k-1) \pmod{2}. \quad \triangleright$$

Лемма 4. (Комбинаторная лемма). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f : \varphi^n \rightarrow \Sigma^n$ – симплицальное отображение, триангуляция φ^n симметрична, $\alpha \circ f = f \circ \alpha$. Тогда $p(f, S^n, n) = 2r + 1$ – нечётное число.

Доказательство.

$$p(f, S^n, n) \equiv p(f, S^0, 0) \pmod{2}, \quad p(f, S^0, 0) = 1. \quad \triangleright$$

Теорема 22. (Теорема Лебега, см. [20] и др.). Пусть $X = (X, \rho)$ – компактное метрическое пространство, $M_i \subset X$ – замкнуты, $i = 1, \dots, n$, $X = \cup_{i=1}^n M_i$. Тогда найдётся $\lambda > 0$ (называемое числом Лебега покрытия $\{M_i\}$) такое, что для любого $A \subset X$, $\text{diam } A < \lambda$, из условия

$$A \cap M_j \neq \emptyset, \quad j \in \{i_1, \dots, i_r\},$$

следует

$$M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_r} \neq \emptyset. \quad \square$$

Лемма 5. (Основная лемма, см. [12], [2]). Пусть $M_1, \dots, M_{n+1}$ – замкнутые подмножества S^n , не содержащие диаметрально противоположных точек,

$$S^n = \cup_{i=1}^{n+1} (M_i \cup \alpha(M_i)).$$

Тогда

$$M_1 \cap \dots \cap M_{n+1} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Для каждого $i \in \{1, \dots, n+1\}$ обозначим $M_{-i} = \alpha(M_i)$, $\epsilon_i = \text{dist}(M_i, M_{-i}) > 0$. Пусть $\lambda > 0$ – число Лебега покрытия

$$M_1, M_{-1}, M_2, \dots, M_{-n-1}$$

(упорядоченного), φ^n – такая симметричная триангуляция S^n , что $\sigma^n \in \varphi^n$ влечёт

$$\text{diam}(\sigma^n) < \epsilon := \min\{\lambda, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}\}.$$

Определим отображение f на вершинах триангуляции φ^n :

$$f(p) = s \cdot (-1)^{j+1} \cdot e_j \in S^n,$$

где $p \in M_{s,j}$, $s = \pm 1$, и $j > 0$ – минимальная позиция в выбранном выше порядке. Такой выбор отображения f обеспечивает его нечётность и симплициальность. Если некоторый симплекс из φ^n положителен, то он necessarily пересекается со всеми M_i , $i = 1, \dots, n+1$ и лемма 5 следует, таким образом, из леммы 4 (комбинаторной) и теоремы 22 (Лебега). $\triangleright$

Следствие 9. (Теорема Люстерника и Шнирельмана, см. [12], [2], [16] и др.). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n+1$, $M_1, \dots, M_m$ – замкнутое покрытие S^n . Тогда для некоторого i

$$M_i \cap (-M_i) \neq \emptyset.$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $m = n + 1$. Предположим обратное, что $M_i \cap \alpha(M_i) = \emptyset$, $i = 1, \dots, n + 1$. Тогда по лемме 5 (основной) найдётся $x \in S^n$ такой, что

$$x \in M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_{n+1},$$

т.е. $(-x) \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i$ – противоречие. $\triangleright$

Доказательство теоремы Брауэра

Теорема 23. (Теорема Стоуна–Вейерштрасса, см. [18] и др.). Если T – метрический компакт, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(T)$ – замкнутая подалгебра функций, содержащая функцию, тождественно равную 1, и разделяющая точки (т.е. для любых двух различных $t_1, t_2 \in T$ имеется $x \in \mathcal{A}$ такая, что $x(t_1) \neq x(t_2)$), то $\mathcal{A} = \mathcal{C}(T)$

(в данном случае алгеброй $\mathcal{A}$ называем линейное пространство, наделённое операцией умножения элементов, которая подчиняется аксиомам 1) $(xy)z = x(yz)$, 2) $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$, 3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Теорема 24. (Формула Стокса). Интеграл от внешнего дифференциала дифференциальной формы ω по ориентированному компактному многообразию M равен интегралу от самой формы ω по ориентированному согласованно с ориентацией многообразия M краю ∂M многообразия M :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Теорема 25. (Брауэр, см. [16], [20] и др.) Пусть $B = B_2^n \subset \mathbb{R}^n$ – единичный шар, $f \in C(B, B)$. Тогда существует неподвижная точка $x_0 \in B$, т.е. $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Предположим такой неподвижной точки нет. Тогда непрерывная функция $|x - f(x)|$ положительна на компакте B , и, следовательно, найдётся число $\delta > 0$, для которого она больше δ . Из теоремы 23 Стоуна–Вейерштрасса о равномерном приближении полиномами непрерывных функций, заданных на компакте, найдётся вектор полиномов $\varphi \in C^\infty(B, \mathbb{R}^n)$, что $\|f - \varphi\|_{C(B, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{2}$. Отсюда вытекает, что $\|\varphi\|_{C(B, \mathbb{R}^n)} \leq (1 + \frac{\delta}{2})$, $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{1 + \frac{\delta}{2}} \in C^\infty(B, B)$ и $|x - \tilde{\varphi}(x)| \geq$

$$\geq |x - f(x)| - |f(x) - \varphi(x)| - |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| > \delta - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 0$$

на B , т.е. функция $\tilde{\varphi}$ не имеет неподвижных точек на B . Построим непрерывно дифференцируемую функцию $g \in C^1(B, S)$, являющуюся ретракцией шара B на его границу S , т.е. $g|_S \equiv \text{Id}$. Для этого из уравнения $|\alpha y + x| = 1$ определим неотрицательную непрерывно дифференцируемую функцию $\alpha = \alpha(x, y)$ на множестве $B \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Имеет место формула для α

$$\alpha = \frac{-(x, y) + \sqrt{(x, y)^2 + |y|^2(1 - |x|^2)}}{|y|^2},$$

которая вытекает из решения квадратного уравнения

$$|\alpha y + x|^2 = 1, \quad \text{т.е.} \quad \alpha^2 |y|^2 + 2\alpha(x, y) + |x|^2 - 1 = 0.$$

Нетрудно видеть, что $\alpha(x, y) = 0 \Rightarrow |x| = 1$. И обратно, если $|x| = 1$ и $(x, y) \geq 0$, то $\alpha(x, y) = 0$. Тогда искомую функцию $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ можно определить как

$$g(x) = \alpha(x, x - f(x))(x - f(x)) + x.$$

Так как $(g(x), g(x)) \equiv 1$, то $(g(x), g'(x)[y]) = 0$ при любом $y \in \mathbb{R}^n$. Или иначе, так как $g(B) = \partial B$, то $g'(x)[\mathbb{R}^n]$ содержится в гиперподпространстве, параллельном касательной гиперплоскости к единичной сфере в точке $g(x)$, и, следовательно, $g'(x)$ – вырожденный линейный оператор, т.е. якобиан $\det g'(x) \equiv 0$. Применяя два раза формулу Стокса (теорема 24), получим равенства

$$0 = \int_B \det g'(x) dx = \int_B dg_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n = \int_B d(g_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n) =$$

$$\int_{\partial B} g_1 \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_n = \int_{\partial B} x_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n =$$

$$\int_B d(x_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = \int_B dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_B dx > 0 -$$

противоречие. Следовательно верно утверждение теоремы. $\triangleright$

Следствие 10. (Брауэр, см. [16], [20] и др.) Пусть D – метрический компакт, гомеоморфный единичному шару $B_2^n \subset \mathbb{R}^n$ и $f \in C(D, D)$. Тогда существует неподвижная точка $x_0 \in D$, т.е. $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Действительно, пусть $\varphi : B_2^n \rightarrow D$ – гомеоморфизм "на". Тогда отображение $\psi = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \in C(B_2^n, B_2^n)$, и для этого отображения по предыдущей теореме найдётся неподвижная точка $y_0 \in B_2^n$ отображения ψ . Поэтому

$$x_0 := \varphi(y_0) = \varphi(\psi(y_0)) = f \circ \varphi(y_0) = f(x_0). \quad \triangleright$$

Доказательство теоремы Майкла

(см. [23]). Прежде чем доказывать теорему Майкла установим несколько лемм, из которых она будет следовать. Первую лемму (о паракомпактности метрического пространства) приведём без доказательства.

Пусть X – метрическое пространство. Покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ пространства X называется вписанным в $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, если для любого $\beta \in B$ найдётся $\alpha \in A$, для которого $V_\beta \subseteq U_\alpha$. Покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ пространства X называется локально-конечным, если для любого $x_0 \in X$ найдётся окрестность x_0 , которая пересекается лишь с конечным числом элементов этого покрытия.

Лемма 6. (О паракомпактности метрических пространств, [20] и др.). Пусть X – метрическое пространство, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – открытое покрытие X . Тогда найдётся открытое покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ пространства X , которое является локально-конечным и вписанным в $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (т.е. X является паракомпактом).

Лемма 7. (Основная, см. [23]). Пусть $F(\cdot)$ – многозначное и полунепрерывное снизу отображение метрического пространства

$X = \langle X, \rho \rangle$ в нормированное пространство Y , пусть для каждого $x \in X$ множество $F(x)$ выпукло. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдётся $f \in C(X, Y)$ такое, что

$$\text{dist}(f(x), F(x)) < \epsilon \quad \forall x \in X.$$

Доказательство. Обозначим $B(y, \epsilon) = y + \epsilon \cdot \text{int}(BY)$,

$$U_y := \{x \in X \mid F(x) \cap B(y, \epsilon) \neq \emptyset\} =: F^{-1}(B(y, \epsilon)), \quad y \in Y.$$

Из полунепрерывности отображения $F(\cdot)$ следует, что множество U_y открыто в X при любом $y \in Y$. Поэтому семейство множеств

$$\{U_y\}_{y \in Y}$$

– открытое покрытие X . По лемме 6 (о паракомпактности X) найдётся открытое, локально-конечное и вписанное в $\{U_y\}_{y \in Y}$ покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ пространства X . Обозначим

$$d_\beta(x) := \text{dist}(x, X \setminus V_\beta), \quad x \in X.$$

Из определения следует, что $d_\beta(\cdot) \in C(X, \mathbb{R}_+)$,

$$d_\beta(x) = 0, \quad \text{если } x \in X \setminus V_\beta, \quad d_\beta(x) > 0, \quad \text{если } x \in V_\beta.$$

В силу локальной конечности открытого покрытия $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ для любого $x_0 \in X$ найдётся окрестность $O(x_0)$, которая пересекается лишь с конечным числом элементов этого покрытия и, значит, в сумме

$$d(x) := \sum_{\beta \in B} d_\beta(x), \quad x \in O(x_0),$$

можно выделить конечное число слагаемых, среди которых расположены все не обращающиеся в ноль в $O(x_0)$; из них хотя бы одно слагаемое строго больше нуля, а остальные неотрицательны. Поскольку это относится к каждой точке $x_0 \in X$, то $d(\cdot) \in C(X, \mathbb{R}_+)$ и $d(x) > 0$, $x \in X$. Так как покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ вписано в $\{U_y\}_{y \in Y}$, то для любого $\beta \in B$ найдётся $y(\beta) \in Y$, для которого $V_\beta \subseteq U_{y(\beta)}$; пусть

$$f(x) := \frac{1}{d(x)} \sum_{\beta \in B} d_\beta(x) \cdot y(\beta).$$

Также как и для функции $d(\cdot)$ из свойства локальной конечности покрытия $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ вытекает непрерывность суммы в определении функции $f(\cdot)$, а так как функция $d(\cdot)$ непрерывна и строго больше нуля в каждой точке $x \in X$, то $f \in C(X, Y)$. Пусть $x \in X$ произвольно,

$$\beta_1, \dots, \beta_n$$

– все те индексы, для которых $x \in V_{\beta_j} \subseteq U_{y(\beta_j)}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $F(x) \cap U_{y(\beta_j)} \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, n$, т.е. для некоторого $y_j \in F(x)$

$$\|y_j - y(\beta_j)\| < \epsilon, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{1}{d(x)} \left\| \sum_{j=1}^n d_{\beta_j}(x) \cdot y(\beta_j) - \sum_{j=1}^n d_{\beta_j}(x) \cdot y_j \right\| < \epsilon,$$

что означает

$$\text{dist}(f(x), F(x)) < \epsilon. \quad \triangleright$$

Доказанной леммы достаточно, чтобы установить (22). Дальнейший материал связан с доказательством теоремы Майкла.

Лемма 8. (см. [23]). Пусть $F(\cdot), G(\cdot)$ – многозначные полунепрерывные снизу отображения метрического пространства X в нормированное пространство Y , $\epsilon > 0$; пусть

$$H(x) := \{F(x) + \epsilon \cdot \text{int } BY\} \cap G(x) \neq \emptyset, \quad x \in X.$$

Тогда многозначное отображение $H(\cdot)$ полунепрерывно снизу.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in H(x_0)$, $O(y_0) \subset Y$ – некоторая окрестность точки y_0 . Из определения следует, что

$$\text{dist}(y_0, F(x_0))_Y < \epsilon \quad \Rightarrow \quad 3\delta := \epsilon - \text{dist}(y_0, F(x_0))_Y > 0.$$

Поэтому найдётся $y_1 \in F(x_0)$ такой, что

$$\|y_0 - y_1\| < \text{dist}(y_0, F(x_0))_Y + \delta.$$

Так как $y_1 \in F(x_0)$ и $y_0 \in H(x_0)$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 , для которой

$$F(x) \cap B(y_1, \delta) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad G(x) \cap B(y_0, \delta) \cap O(y_0) \neq \emptyset$$

при любом $x \in O(x_0)$.

Пусть $y \in G(x) \cap B(y_0, \delta) \cap O(y_0)$. Тогда для произвольного $x \in O(x_0)$

$$\text{dist}(y, F(x)) \leq \|y - y_1\| + \delta \leq \|y_0 - y_1\| + 2\delta < \epsilon,$$

т.е. $y \in O_\epsilon(F(x))$. Поэтому $y \in H(x)$,

$$H(x) \cap O(y_0) \neq \emptyset.$$

Значит, для произвольных $x_0 \in X$, $y_0 \in H(x_0)$, $O(y_0) \subseteq Y$ найдена окрестность $O(x_0)$ точки x_0 , для которой $H(x) \cap O(y_0) \neq \emptyset$ при любом $x \in O(x_0)$. $\triangleright$

Теорема 26. (Теорема Майкла, см. [23]). Пусть $F(\cdot)$ – многозначное, полунепрерывное снизу отображение метрического пространства X в банахово пространство Y и для каждого $x \in X$ множество $F(x)$ непусто, выпукло и замкнуто. Тогда найдётся $f \in C(X, Y)$ такое, что

$$f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X.$$

Доказательство. Пусть $A \subset Y$, $t > 0$,

$$O(A, t) := A + t \cdot \text{int } BY.$$

По индукции построим последовательность $f_i \in C(X, Y)$, $i \in \mathbb{N}$, для которой

$$\text{а) при } i \geq 2, x \in X, \quad f_i(x) \in O(f_{i-1}(x), 2^{-i+2}),$$

$$\text{б) при } i \geq 1, x \in X, \quad f_i(x) \in O(F(x), 2^{-i}).$$

По лемме 7 можно определить функцию $f_1(\cdot)$, удовлетворяющую условиям а) и б). Предположим, что функции $f_1, \dots, f_k$ уже построены. Для каждого $x \in X$ обозначим

$$F_{k+1}(x) = F(x) \cap O(f_k(x), 2^{-k}) \neq \emptyset \quad (\text{по условию б)).}$$

По лемме 8 многозначное отображение $F_{k+1}(\cdot)$ полунепрерывно снизу. Поэтому по лемме 7 найдётся $f_{k+1} \in C(X, Y)$ такая, что

$$f_{k+1}(x) \in O(F_{k+1}(x), 2^{-k-1}), \quad x \in X.$$

Для этой функции

$$\text{а) } f_{k+1}(x) \in O(O(f_k(x), 2^{-k}), 2^{-k-1}) = O(f_k(x), 2^{-k+1}),$$

$$\text{б) } f_{k+1}(x) \in O(F_{k+1}(x), 2^{-k-1}) \subset O(F(x), 2^{-k-1}),$$

т.е. условия а) и б) выполняются. Таким образом, последовательность $f_i \in C(X, Y)$, $i \in \mathbb{N}$, с нужными свойствами построена. Из условия а) следует, что

$$\|f_i(x) - f_{i+1}(x)\| \leq 2^{-i+1},$$

т.е. последовательность f_i является последовательностью Коши в пространстве $C(X, Y)$. Обозначим её предел через $f \in C(X, Y)$. Тогда по условию б) построенная функция $f(\cdot)$ является непрерывным сечением для $F(\cdot)$. $\triangleright$

Литература

- [1] *Александров П.С.* Über die Urisohnshen Konstanten. – Fund. Math., v. 20, 1933, p. 140–150.
- [2] *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973, 575 с.
- [3] *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986, 744 с.
- [4] *Бабенко К.И.* Об одном подходе к оценке качества вычислительных алгоритмов. – М.: ИПМ АН СССР, 1974, препр. 7.
- [5] *Васильева А.А.* Колмогоровские поперечники весовых классов Соболева на отрезке. – Матем. заметки, 2008, т. 84, вып. 5, с. 676–680.
- [6] *Гаркави А.Л.* О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве. – Изв. АН СССР, Сер. матем., 1962, т. 26, № 1, с. 97–106.
- [7] *Колмогоров А.Н.*, Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse. – Ann. of Math., 37, № 1, 1936, p. 107–111 (в кн. Колмогоров А.Н., Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985, с. 186–189.
- [8] *Колмогоров А.Н., Петров А.А., Смирнов Ю.М.* Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов. – Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 1947, с. 561–566.

- [9] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981, 342 с.
- [10] *Маковоз Ю.И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах. – Мат. сб., 87 (129), № 1, 1972, с. 136–142.
- [11] *Мальцев А.И.* Замечание к работе А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова и Ю.М. Смирнова "Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов". – Изв. АН СССР, Сер. матем., 11, 1947, с. 566–568.
- [12] *Понтрягин Д.С.* Основы комбинаторной топологии. – М.: Наука, 1986, 120 с.
- [13] *Софман Л.Б.* Поперечники октаэдров. – Мат. заметки, т. 5, № 4, 1969, с. 429–436.
- [14] *Стесин М.И.* Александровские поперечники множеств и классов гладких функций. – ДАН СССР, 1975, т. 220, № 6, с. 1278–1281.
- [15] *Стечкин С.Б.* О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами. – УМН, IX, вып. 1, 1954, с. 133–134.
- [16] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближения. – Изд-во Моск. ун-та, 1976, 304 с.
- [17] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближения. – Дисс. ... докт. физ.-мат. наук, М., 1970.
- [18] *Тихомиров В.М.* Теория приближений. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 14 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)". – М.: ВИНТИ, 1987, с. 103–260.
- [19] *Ходулев А.Б.* Замечание об александровских поперечниках конечномерных множеств. – Функц. анализ и его прилож., 1989, т. 23, № 2, с. 94–95.

- [20] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986, 751 с.
- [21] *Enflo P.* A contrexample to the approximation problem in Banach spaces. – Acta math., 1973, 130, № 3-4, p. 309–317.
- [22] *Heinrich S.* On the Relation between Linear n -Widths and Approximation Numbers. – Journal of Appr. Theory, 58, 1989, p. 315–333.
- [23] *Michael E.* Continuous selection. – I. Ann. Math., 1956, v. 63, No 2, p. 361–382.
- [24] *Pinkus A.* n -Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985, p. 1–291.

Предметный указатель

- χ_E , характеристическая функция, 39
 ϵ -сдвиг, 46
 p -эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, 43
 Т. Heinrich-а, 55
 Т. Борсука, 34, 35, 55, 56
 Т. Брауэра, 46, 63, 65
 Т. Ходулёва, 45
 Т. Колмогорова, Петрова, Смирнова, Мальцева, Стечкина, 52
 Т. Лебега, 62
 Т. Люстернака и Шнирельмана, 56
 Т. Майкла, 31, 65, 68
 Т. Маковского лемма, 37
 Т. Пича–Стезина–Ходулёва, 44
 Т. Софмана, 54
 Т. Стоуна–Вейерштрасса, 63
 Т. Васильевой, 40
 Т. формула Стокса, 63
 Т. лемма о проекторе, 47
 Т. о неравенстве $b_n \leq d_n$, 35
 Т. о поперечнике шара, 15, 36
 Т. о равенстве $d_n = \gamma_n$, 32
 Т. об ϵ -сдвиге, 47
 Лебега число покрытия $\{M_i\}$, 62
 абсолютно непрерывная функция, 39
 алгебра функций, 63
 банахово пространство, 5
 единичная сфера S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$, 34
 единичный шар BX , 16
 единичный шар $B\ell_p^k$, B_p^k , 16
 единичный шар нормы, 19
 эллипсоид в ℓ_2^k , 17
 изопериметрическая задача, 43
 класс функций $S_n[a, b]$, 40
 класс функций $W_{\infty, g}^1[a, b]$, 39
 класс функций $\mathcal{P}(X, M)$, 9
 класс липшицевых функций, 17
 классы функций $\mathcal{A}(X, M)$, $\mathcal{L}(X, M)$, 9
 классы функций $\mathcal{E}(X, M)$, $\mathcal{C}(X, M)$, 8
 лемма о паракомпактности метрических пространств, 65
 метрическая проекция $P_L(x)$, 27
 многозначное отображение, 30
 многозначное, полунепрерывное снизу отображение, 30
 множества ядро, 19
 множества замыкание $\overline{A}$, 22
 наилучшего приближения элемент, 8
 неподвижная точка отображения, 46
 непрерывное сечение многозначного отображения, 30
 нерв покрытия, 56, 57
 нормированное пространство, 5
 оболочка выпуклая $\text{conv } A$, 22
 общие свойства поперечников, 18
 ограниченно компактное множе-во, 8
 оператор циклического сдвига, 53
 отображение в нерв, 56, 57
 паракомпакт, 65
 покрытие вписанное, 65
 покрытие локально-конечное, 65
 полунепрерывное снизу отображение (многозначное), 30
 поперечник γ_n , 12
 поперечник λ_n (линейный), 11, 19
 поперечник π_n (проекционный), 11
 поперечник ε_n (энтропийный), 12
 поперечник φ_n (Фурье), 14
 поперечник a_n (александровск.), 13

поперечник b_n (по Бернштейну), 33
 поперечник d^n (по Гельфанду), 37
 поперечник d_n (колмогоровский), 9,
 19
 поперечник k_n (нелинейный), 13
 поперечники p -эллипсоидов в ℓ_q^n , 43
 пространство ℓ_p^k , 16
 пространство функций $L_{p,v}[a, b]$, 39
 расстояние от x до M , $\text{dist}(x, M)_X$, 28
 равенство поперечников d_n и γ_n , 27
 разбиение единицы подчинённое по-
 крытию, 57
 семейства $\mathcal{C}_n(X)$, $\Xi_n(X)$, 7
 семейства $\mathcal{L}_n(X)$, $\mathcal{L}_n^*(X)$, 6
 семейство $\mathcal{L}^n(X)$, 6
 симплекс n -мерный, 22
 симплициальное отображение, 59
 спектральные числа α_k , β_k , 43, 44
 строго выпуклое пространство, 29
 точки в общем положении, 57
 триангуляция сферы, 59