

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Подорога Анастасия Владимировна

E-mail: anastasjonok@rambler.ru

Кафедра математической физики

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Тихонов Иван Владимирович

В последнее время внимание специалистов по математическому моделированию привлекают задачи из теории транспортных потоков. Эти задачи допускают исследование как на языке дифференциальных уравнений из механики сплошной среды, так и с помощью компьютерного моделирования. В моей дипломной работе удалось совместить оба подхода и провести численную проверку некоторых общих положений.

Для математического описания процесса дорожного движения по однополосной дороге вводятся следующие характеристики: координата x вдоль дорожного полотна, время t , скорость потока $v(x, t)$, плотность потока $\rho(x, t)$ и величина потока $q(x, t)$ (подробнее см. [1]).

Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q(x, t) = \rho(x, t) v(x, t), \quad (1)$$

$$v(x, t) = V(\rho(x, t)), \quad V = V(\rho) \downarrow, \quad Q = Q(\rho) = \rho V(\rho). \quad (2)$$

Первое соотношение в (1) есть закон сохранения автомобилей, второе — формула потока. Специфику дорожного движения определяет первое соотношение в (2), которое называется законом безопасного движения. Оно означает, что при увеличении плотности потока, скорости уменьшаются. Отсюда следует зависимость величины потока от плотности, которая называется фундаментальной диаграммой $Q(\rho)$.

Возникающие задачи разбиваются на два класса. В прямых задачах диаграмма $Q(\rho)$ считается заданной, и значения ρ , v , q находятся из возникающих дифференциальных уравнений с помощью начальных и краевых условий. Если же фундаментальная диаграмма неизвестна, то возникает обратная задача о нахождении зависимости $Q(\rho)$ по дополнительным измерениям величин ρ и v .

На практике зависимость $Q(\rho)$ обычно неизвестна, и есть несколько конкурирующих моделей движения. Дополнительно вводится одномерный аналог уравнения Эйлера, где роль давления играет плотность:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Особое значение имеет коэффициент k , называемый скоростью распространения возмущений. Знание k позволяет восстановить фундаментальную диаграмму $Q(\rho)$. В дипломной работе рассмотрены разные модели, где коэффициент k зависит от плотности ρ .

Первая модель — модель Гринберга, соответствующая постоянному значению k . Если коэффициент k прямо пропорционален ρ , то возникает модель Гриншильдса. Рассмотрена также модель «с обратной зависимостью», когда коэффициент k обратно пропорционален плотности ρ .

Возникает вопрос о том, какая из моделей предпочтительнее. На практике обычно прибегают к эмпирическим замерам «в полевых условиях». В дипломе предложен принципиально иной подход. Мною была разработана компьютерная программа “Cars”, имитирующая движение группы автомобилей по однополосной дороге и позволяющая снимать основную цифровую информацию о скоростях и плотностях транспортного потока.

Программа основана не на уравнениях (1)–(3), а на имитации процесса управления индивидуальным автомобилем с помощью соображений из кинематики. Физические параметры выбирались в точном соответствии с реальными дорожными условиями. Программа “Cars” позволяет смоделировать движение больших групп автомобилей ($2 \leq N \leq 1000$) по прямолинейным и кольцевым однополосным дорогам значительной протяженности. В результате тестирования на многих режимах были подтверждены эффекты, известные ранее из общей теории.

Так, при движении автомобилей по кольцевой автодороге детально исследован механизм образования локальных пробок, перемещающихся со временем против движения потока. Возникновение таких пробок было предсказано в [2] на основе уравнений (1)–(3).

Также проведены расчеты зависимости скорости v от плотности ρ при разных дорожных ситуациях на кольце. Результаты весьма точно соответствуют теоретическому закону «с обратной зависимостью», в отличие от моделей Гринберга и Гриншильдса, которые плохо сочетаются с полученными данными.

В итоге решена задача о нахождении фундаментальной диаграммы, соответствующей компьютерной программе “Cars”. Получены большие объемы других числовых данных, анализ которых весьма полезен для практики. Некоторые результаты коротко анонсированы в [3].

Литература

1. Гасников А. В. и др. *Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие*. М.: МЦНМО, 2013.
2. Смирнов Н. Н., Киселев А. Б., Никитин В. Ф., Юмашев М. В. *Математическое моделирование автотранспортных потоков*. М.: Мехмат МГУ, 1999.
3. Подорога А. В. *Имитационные компьютерные модели в задачах однополосного дорожного движения* // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XV Международной научной конференции. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. — С. 42–44.