

Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова

Талалаев
Дмитрий Валерьевич

Интегрируемые системы и квантование

Миникурс прочитанный в рамках НОЦ МИАН в 2011 году

Содержание

Лекция 1. Введение и краткий словарь	1
Лекция 2. Система Хитчина	4
Лекция 3. Система Хитчина на особых кривых	8
Лекция 4. Система Годена	15
Лекция 5. Задача квантования	22
Лекция 6. Квантовый Метод Обратной Задачи	26
Лекция 7. Методы решения квантовых систем	36
Лекция 8. Приложения	47

Лекция 1. Введение и краткий словарь

Цель курса В теории классических интегрируемых систем имеется универсальный метод решения, состоящий в интерпретации динамических потоков, как потоков на специальном пространстве - пространстве модулей голоморфных расслоений на некоторой алгебраической кривой - или близких обобщений. Подобная интерпретация позволяет строить решение в терминах отображения Абеля этой кривой. Я расскажу о подходе в теории квантовых интегрируемых систем, восстанавливающем ингредиенты метода спектральной кривой и направленном на построение эффективных решений квантовых моделей. Мы начнем с изучения некоторых характеристических свойств классических интегрируемых систем.

Понятие интегрируемости

Определение 0.1. Пуассоново многообразие $\{M, \pi\}$ где π - невырожденный в общей точке бивектор $\pi \in \Gamma(T^{\wedge 2}M)$ и Пуассон-коммутативная подалгебра $H \in C(M)$ половинной функциональной размерности $\dim H = 1/2 \dim M$ называется интегрируемой системой.

Теорема 0.1. Пусть на симплектическом многообразии M размерности $2n$ задано n гладких функций в инволюции $F_1, \dots, F_n$ $\{F_i, F_j\} = 0$. Рассмотрим общее многообразие уровня

$$M_f = \{x \in M \mid F_i(x) = f_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

и предположим, что F_i независимы на многообразии уровня, т.е. $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \neq 0$ на M_f . Тогда M_f является гладким многообразием, инвариантным относительно фазового потока любого Гамильтониана из рассматриваемого семейства $H(F_1, \dots, F_n)$ и на нем существуют координаты $\phi_1, \dots, \phi_n$ в которых динамика является линейной $\dot{\phi}_i = \text{const}$, кроме того эти координаты находятся в квадратурах. Приведем здесь стандартное доказательство для случая $M = \mathbb{R}^{2n}$ с канонической симплектической формой: $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ и соответствующей 1-формой $\lambda = \sum_i p_i dq_i$. Предположим также, что M_f локально разрешимо относительно p_i т.е. $p_i = p_i(f, q)$ в карте U . В этом случае рассмотрим выражение

$$S(F, q) = \int_{m_0}^m \lambda = \int_{q_0}^q \sum_i p_i(f, q) dq_i.$$

Данное выражение является производящей функцией канонического преобразования к переменным "действие-угол действительно

$$dS = \sum \psi_i dF_i + p_i dq_i$$

где $\psi_i = \partial S / \partial F_i$. Осталось доказать, что данная функция определена корректно в рассматриваемой карте U , в частности не зависит от пути интегрирования. Пусть γ - замкнутый путь в $U \subset M_f$, ограничивающий область B , тогда

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_B d\lambda = 0$$

так как $\omega|_{M_f} = 0$.

Краткий словарь системы Хитчина Фазовым пространством системы Хитчина является кокасательное расслоение к пространству модулей голоморфных расслоений на некоторой алгебраической кривой. Поэтому обсудим сначала некоторые определения.

Определение 0.2. Локально тривиальным расслоением на B со слоем F называется такое отображение $\pi : E \rightarrow B$, что $\forall x \in B$ существует открытая окрестность $x \in U$ такая что $\pi^{-1}U \simeq U \times F$. Собственно отображение, осуществляющее биекцию прообраза U и прямого произведения, называется тривиализацией. Традиционным способом конструкции нетривиальных расслоений является процедура их склейки из тривиальных на открытых картах некоторого атласа U_α , $\alpha \in I$. Пусть задан набор автоморфизмов $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Aut}(F)$, тогда можно определить структуру локально тривиального расслоения на следующем фактор пространстве

$$\{(\alpha, x, f_\alpha) : \alpha \in I, x \in U_\alpha, f_\alpha \in F\} / \sim$$

где отношение эквивалентности определено для троек определяется следующим образом:

$$(\alpha, x, f_\alpha) \sim (\beta, x, f_\beta)$$

если $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ и $f_\beta = \psi_{\beta\alpha} f_\alpha$.

Определение 0.3. Расслоение называется голоморфным, если E, F, B - комплексные многообразия, π - голоморфное, и существует атлас, для которого отображения тривиализации также голоморфны.

Пример 0.1. Расслоение $\mathcal{O}(k)$ на $\mathbb{CP}^1$ может быть определено для покрытия из двух карт: U_0 - окрестности $z = 0$, U_∞ - окрестности $z = \infty$ с помощью функции переклейки $\psi = z^k$.

Определение 0.4. Сечением расслоения $\pi : E \rightarrow B$ называется отображение $\sigma : B \rightarrow E$ такое что $\pi \circ \sigma = \text{id}$.

Пример 0.2. Для голоморфных расслоений можно говорить о голоморфных сечениях. В частности для расслоения $\mathcal{O}(k)$ можно предъявить базис голоморфных сечений в следующем виде: $(z^k, 1); (z^{k-1}, z^{-1}); \dots; (1, z^{-k})$ где в скобках первый компонент соответствует сечению расслоения в карте U_0 , а второй в карте U_∞ .

Упомянет здесь, что с алгебраической точки зрения голоморфное расслоение описывается локально-свободным пучком модулей над структурным пучком многообразия базы.

Деформации расслоений Напомним здесь конструкцию коцепного комплекса Чеха для пучка абелевых групп на B . В настоящем разделе под пучком $\mathcal{F}$ будет пониматься функтор из категории открытых множеств на B в соответствующую категорию (в рассматриваемом случае - в категорию абелевых групп).

Определение 0.5. *Комплексом Чеха пучка F связанным с покрытием $\{U_\alpha\}$ называется $\{C^k = \times_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_{k+1}})$ с дифференциалом*

$$(d\sigma)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sigma_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{k+1}}.$$

Определение 0.6. *Стабильным голоморфным расслоением на компактной римановой поверхности Σ называется голоморфное расслоение E , для которого $\forall F \subset E$*

$$\frac{\deg(F)}{\operatorname{rk}(F)} < \frac{\deg(E)}{\operatorname{rk}(E)}.$$

Оказывается, что условие стабильности обеспечивает существование гладкого пространства модулей расслоений $\mathcal{M}_{\Sigma, n}^s$. Доказательство этого факта уходит в геометрическую теорию инвариантов и здесь приводиться не будет. Укажем только, что касательное пространство к пространству модулей голоморфных расслоений может быть охарактеризовано следующим образом: пусть E стабильное голоморфное расслоение ранга n , тогда

$$T_E(\mathcal{M}_{\Sigma, n}^s) \simeq H^1(\Sigma, \operatorname{End}(E))$$

где в правой части рассматриваются когомологии комплекса Чеха пучка эндоморфизмов рассматриваемого расслоения. Наглядно этот изоморфизм может быть продемонстрирован в терминах функций переклейки, деформации расслоений строятся с помощью нетривиальных деформаций функций переклейки, то есть таких которые не могут быть устранены выбором тривиализации.

Лекция 2. Система Хитчина

Определение Пусть Σ_0 алгебраическая кривая, рассмотрим $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{r, d}^s(\Sigma_0)$ - пространство модулей голоморфных стабильных расслоений над

Σ_0 ранга r с детерминантным расслоением d [32]. Рассмотрим каноническую голоморфную симплектическую структуру на кокасательном расслоении к данному пространству модулей $T^*\mathcal{M}$. Из краткого обзора теории деформаций предыдущей лекции следует, что касательный вектор к пространству модулей в точке E , может быть реализован элементом линейного пространства $H^1(\text{End}(E))$. В свою очередь кокасательный вектор в точке E пространства модулей $\mathcal{M}$ благодаря двойственности Серра может быть представлен элементом пространства когомологий $\Phi \in H^0(\text{End}(E) \otimes \mathcal{K})$, здесь $\mathcal{K}$ обозначает канонический класс Σ_0 . В таком описании на кокасательном расслоении $T^*\mathcal{M}$ может быть определено семейство функций

$$h_i : T^*\mathcal{M} \rightarrow H^0(\mathcal{K}^{\otimes i}); \quad h_i(E, \Phi) = \frac{1}{i} \text{tr} \Phi^i. \quad (0.1)$$

Прямая сумма семейства отображений h_i

$$h : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \oplus_{i=1}^r H^0(\mathcal{K}^{\otimes i})$$

называется отображением Хитчина [16] и задает лагранжево слоение фазового пространства, определяя тем самым интегрируемую систему.

Спектральная кривая Метод спектральной кривой предполагает явное решение системы в терминах естественных объектов некоторой алгебраической кривой. Рассмотрим (нелинейное) отображение расслоений

$$\text{char}(\Phi) : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^{\otimes r}, \quad (0.2)$$

определенное с помощью выражения

$$\text{char}(\Phi)(\mu) = \det(\Phi - \mu * Id) \quad (0.3)$$

где μ определяет точку слоя $\mathcal{K}$, а выражение Id - тождественное сечение расслоения $\text{End}(E)$. Спектральная кривая Σ определяется как прообраз нулевого сечения $\mathcal{K}^{\otimes r}$ в проективизации тотального пространства канонического расслоения $\mathcal{K}$.

Линейное расслоение Непосредственно решение интегрируемых систем (нахождение переменных "действие-угол") в описании Хитчина может быть построено в терминах следующего линейного расслоения. Рассмотрим отображение проекции π соответствующее каноническому расслоению $\mathcal{K}$

$$\pi : \mathcal{K} \rightarrow \Sigma_0$$

и отображение обратных образов

$$\pi^* E \xrightarrow{\Phi - \tilde{\mu}^* Id} \pi^*(E \otimes \mathcal{K}),$$

здесь $\tilde{\mu}$ - тавтологическое сечение $\pi^*\mathcal{K}$. Рассмотрим также фактор-пучок $\mathcal{F}$, отвечающий этому вложению

$$0 \longrightarrow \pi^* E \xrightarrow{\Phi - \mu^* Id} \pi^*(E \otimes \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0. \quad (0.4)$$

Носитель $\mathcal{F}$ совпадает с определенной выше спектральной кривой модели Σ , по причине того, что решение задачи на собственный вектор линейного оператора существует тогда и только тогда, когда соответствующий скаляр является собственным числом. Ограничим точную последовательность (0.4) на Σ

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \pi^* E|_{\Sigma} \xrightarrow{\Phi - \mu^* Id} \pi^*(E \otimes \mathcal{K})|_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{F}|_{\Sigma} \longrightarrow 0.$$

Оказывается, что $\mathcal{L}$ определяет линейное расслоение на спектральной кривой, ассоциированное с собственным вектором поля Хиггса.

Определим отображение Абеля следующим образом: пусть $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ базис в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ с индексом пересечения $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, пусть $\{\omega_i\}$ базис голоморфных дифференциалов $H^0(\mathcal{K})$, нормированный условием $\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$, и пусть $B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j$ - матрица b -периодов. Тогда определим решетку Λ в $\mathbb{C}^g$ порожденную целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^g$ и решеткой с базисом, состоящим из строк матрицы B . Зафиксируем точку кривой $P_0 \in \Sigma$. Отображение Абеля может быть определено следующей формулой

$$A : \Sigma \rightarrow Jac(\Sigma) = \mathbb{C}^g / \Lambda; \quad A(P) = \begin{pmatrix} \int_{P_0}^P \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{P_0}^P \omega_g \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

Данное определение не зависит от пути интегрирования благодаря рассмотрению факторпространства. Оно обобщается до отображения дивизоров и позволяет явно параметризовать пространство модулей линейных голоморфных расслоений на алгебраических кривых. Для этого рассмотрим экспоненциальную точную последовательность:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

и ассоциированную длинную точную последовательность в когомологиях:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}^*) \\ \xrightarrow{i} H^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^1(\mathcal{O}) \xrightarrow{k} H^1(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отображение i является нулевым, так как левая часть точной последовательности совпадает с короткой последовательностью. Будем интересоваться пространством модулей расслоений Pic_0 степени 0. В данном случае оно будет совпадать с $\text{Im}(k)$ который в свою очередь совпадает с факторпространством:

$$Pic_0 \simeq H^1(\mathcal{O})/H^1(\mathbb{Z}),$$

которое совпадает с описанным выше определением Якобиана, если воспользоваться двойственностью Серра. Действительно, пространство $\mathbb{C}^g$ из определения $Jac(\Sigma)$ это пространство $H^0(\mathcal{K})^*$, а решетку можно отождествить с $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, что в свою очередь может быть отождествлено с $H^1(\mathbb{Z})$ благодаря двойственности Пуанкаре

Теорема 0.2 ([16]). *Линейные координаты на Якобиане $Jac(\Sigma)$ взятые от образа преобразования Абеля $A(\mathcal{L})$ являются переменными типа „угол“ для системы Хитчина.*

Задача обращения Якоби Прокомментируем здесь "практическую" важность данного результата. В определенном смысле вершиной метода является так называемое общее решение в θ - функциях, которое строится благодаря теореме Абеля в задаче обращения Якоби. Напомним, что преобразование Абеля определяет отображение из симметрических степеней кривой Σ^k в $Jac(\Sigma)$. Оказывается, что при $k = g$ это отображение в общей точке может быть обращено. Буквально теорема Абеля утверждает следующее:

Теорема 0.3. $\forall \lambda \in \mathbb{C}^g \exists p_1, \dots, p_g \in \Sigma$ и некоторые пути γ_i из фиксированной точки p_0 в p_i такие что

$$\sum_i \int_{\gamma_i} \omega_j = \lambda_j \tag{0.6}$$

и в общей точке этот набор данных единственен.

Данная теорема имеет и более эффективную форму. Для этого введем многомерные θ - функции формулой

$$\theta(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi(l, Bl) + 2i\pi(l, z)) \quad (0.7)$$

здесь B - матрица b - периодов абелевых дифференциалов нормированных так, что a - периоды дают единичную матрицу. Обозначим через θ_λ - множество нулей $\theta(z - \lambda)$. Также введем обозначение для образа кривой при отображении Абеля $A(\Sigma)$. Рассмотрим пересечение $A(\Sigma) \cdot \theta_\lambda = z_1(\lambda) + \dots + z_g(\lambda)$.

Лемма 0.4. *Если $A(\Sigma) \not\subset \theta_\lambda$ то*

$$\sum_i A(z_i(\lambda)) = \lambda + \kappa \quad (0.8)$$

где κ - так называемый вектор Римановых констант, не зависящий от точки.

Данное утверждение позволяет восстанавливать нули дивизора как корни некоторого θ - функционального выражения.

Лекция 3. Система Хитчина на особых кривых

Традиционные обобщения Конструкция Хитчина может быть обобщена на случай особых кривых и кривых с отмеченными точками [34], [35]. Это обобщение позволяет строить явные параметризации широкого класса интегрируемых систем, сохраняя при этом аналогию с геометрическими объектами классической системы Хитчина.

- **Отмеченные точки:** Может быть рассмотрено пространство модулей голоморфных расслоений на алгебраических кривых с дополнительными данными, а именно с тривиализациями в отмеченными точками. Такое пространство модулей получается факторизацией пространства функций переклейки по таким заменам тривиализаций в атласе открытых множеств, которые не меняют тривиализацию в отмеченных точках. Обозначим данное пространство модулей символом $\mathcal{M}_{r,d}(z_1, \dots, z_k)$. Касательный вектор к пространству $\mathcal{M}_{r,d}(z_1, \dots, z_k)$ в точке E является элементом пространства

$$T_E \mathcal{M}_{r,d}(z_1, \dots, z_k) \simeq H^1(\text{End}(E) \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^k z_i))$$

Кокасательный вектор может быть представлен сечением следующего расслоения

$$\Phi \in H^0(\text{End}(E) \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^k z_i))$$

- **Особые точки:** Пространство модулей расслоений может быть рассмотрено на кривых с особенностями типа „двойная точка“, „касп“ или так называемая „схемная двойная точка“. В этой ситуации также может быть построен содержательный формализм системы Хитчина, приводящий к большому количеству важных примеров интегрируемых систем. При этом алгебраическое описание дуализирующего пучка и пространства модулей расслоений оказывается более явным, чем в случае неособой кривой того же алгебраического рода.

Схемные точки Опишем подробнее формализм системы Хитчина на кривых с двойными схемными точками. В работах [35] были построены обобщения ингредиентов системы Хитчина для особых кривых данного типа, а именно, была найдена алгебраическая интерпретация для пространства модулей голоморфных расслоений, касательного вектора к пространству модулей, сечений дуализирующего пучка, а также для канонической симплектической формы на кокасательном расслоении, была доказана интегрируемость.

Класс особенностей Рассмотрим кривую Σ^{proj} получающуюся склейкой 2 произвольных подсхем $A(\epsilon), B(\epsilon)$ на $\mathbb{CP}^1$ в одну точку (т.е. кривую, получающуюся добавлением одной гладкой точки ∞ к аффинной кривой $\Sigma^{aff} = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z] : f(A(\epsilon)) = f(B(\epsilon))\}$, где $\epsilon^N = 0$). Далее вычисляется алгебраический род таких кривых (т.е. $\dim H^1(\mathcal{O})$). Основные рассматриваемые примеры предоставляются следующими ситуациями:

- **Нильпотентные элементы:** $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = 0$, в этом случае род равен $N - 1$.
- **Корни из единицы:** $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = \alpha\epsilon$, где $\alpha^k = 1$. В этом случае род равен $N - 1 - [(N - 1)/k]$. Более общий случай корней из единицы реализуется подсхемами с соотношениями: $A(\epsilon) = \epsilon$ и $B(\epsilon)$ такая, что

$$\underbrace{B(B(B \dots (B(\epsilon))))}_{k \text{ times}} = \epsilon \bmod \epsilon^{N-1}.$$

Род в этом случае также равен $N - 1 - [(N - 1)/k]$.

- Геометрически отличные точки:

$$A(\epsilon) = a_0 + a_1\epsilon + \dots + a_{N-1}\epsilon^{N-1}, \quad B(\epsilon) = b_0 + b_1\epsilon + \dots + b_{N-1}\epsilon^{N-1},$$

так что $a_0 \neq b_0$. Род равен N .

Расслоения Описание пространства модулей голоморфных расслоений для особых кривых производится на алгебраическом языке, а именно, используется соответствие между расслоениями и пучками их сечений, которые являются пучками локально-свободных, а следовательно и проективных модулей над структурным пучком рассматриваемой алгебраической кривой. Геометрическая характеристика проективного модуля осуществляется в аффинной карте нормализации, содержащей склеиваемые подсхемы. Модуль M_Λ ранга r над аффинной картой без бесконечности определяется подпространством в тривиальном модуле векторнозначных функций $s(z)$ на $\mathbb{C}$ элементов, удовлетворяющих условию:

$$s(A(\epsilon)) = \Lambda(\epsilon)s(B(\epsilon)),$$

где $\Lambda(\epsilon) = \sum_{i=0, \dots, N-1} \Lambda_i \epsilon^i$ - матричнозначный полином. Условие проективности данного модуля M_Λ (и, как следствие, условие на то, что соответствующий пучок отвечает векторному расслоению) заключается в следующем:

- Нильпотентный случай: $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = 0$, условие: $\Lambda_0 = Id$.
- Корень из единицы: $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = \alpha\epsilon$, где $\alpha^k = 1$,
условие:

$$\Lambda(\epsilon)\Lambda(\alpha\epsilon)\dots\Lambda(\alpha^{k-1}\epsilon) = Id.$$

- Геометрически отличные точки:

$$A(\epsilon) = a_0 + a_1\epsilon + \dots + a_{N-1}\epsilon^{N-1}, \quad B(\epsilon) = b_0 + b_1\epsilon + \dots + b_{N-1}\epsilon^{N-1},$$

условие обратимости Λ_0 .

Открытая клетка пространства модулей голоморфных расслоений на Σ^{proj} получается при рассмотрении фактор-пространства по отношению к действию GL_r на пространстве $\Lambda(\epsilon)$ общего положения, удовлетворяющих условиям выше. Предполагается, что GL_r действует сопряжением.

Дуализирующий пучок и глобальные сечения В гладкой ситуации, канонический класс $\mathcal{K}$ определяется расслоением форм старшей степени на комплексно-аналитическом многообразии M размерности m . При этом он реализует двойственность Серра, используемую при описании кокасательного пространства к пространству модулей расслоений. Буквально, двойственность Серра это невырожденное спаривание следующих пространств когомологий

$$H^n(\mathcal{F}) \times H^{m-n}(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{C}$$

для произвольного когерентного пучка $\mathcal{F}$. В рассматриваемом случае дуализирующий пучок может быть определен явно своими глобальными сечениями. Глобальные сечения дуализирующего пучка на Σ^{proj} могут быть описаны в терминах мероморфных дифференциалов на $\mathbb{C}$ вида

$$\omega_\phi = Res_\epsilon \left(\frac{\phi(\epsilon)dz}{z - A(\epsilon)} - \frac{\phi(\epsilon)dz}{z - B(\epsilon)} \right), \quad (0.9)$$

для произвольных $\phi(\epsilon) = \sum_{i=0, \dots, N-1} \phi_i \frac{1}{\epsilon^{i+1}}$. В этом выражении дроби следует понимать как геометрическую прогрессию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - A(\epsilon)} &= \frac{1}{z - a_0 - a_1\epsilon - a_2\epsilon^2 - \dots} = \frac{1}{(z - a_0)(1 - \frac{a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \dots}{z - a_0})} \\ &= \frac{1}{(z - a_0)} \left(1 + \frac{a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \dots}{z - a_0} + \left(\frac{a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \dots}{z - a_0} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Символ Res_ϵ означает взятие коэффициента при $\frac{1}{\epsilon}$. Оказывается, что для произвольного $\phi(\epsilon)$ выражение выше дает голоморфный дифференциал на особой кривой Σ^{proj} , и кроме того, при этом любой дифференциал получается таким образом. В общей ситуации отображение пространства $\phi(\epsilon)$ в пространство голоморфных дифференциалов имеет ядро. Опишем спаривание Серра для структурного пучка. Рассмотрим покрытие кривой, состоящее из двух открытых множеств: $U_0 = \Sigma^{aff}$ и U_∞ - окрестность ∞ . Пересечение $U_0 \cap U_\infty$ можно отождествить с проколотым диском $U_\infty^\bullet$ с центром в ∞ . Пусть $s \in \mathcal{O}_{U_\infty^\bullet}$ - представитель класса $H^1(\mathcal{O})$. Спаривание определяется формулой:

$$\langle \omega_\phi, s \rangle = \oint_{\delta U_0 \cap U_\infty} \omega_\phi s. \quad (0.10)$$

Несложно заметить, что спаривание корректно определено на классах когомологий.

Эндоморфизмы модуля M_Λ описываются матричнозначными полиномиальными функциями $\Phi(z)$ удовлетворяющими следующему условию

$$\Phi(A(\epsilon)) = \Lambda(\epsilon)\Phi(B(\epsilon))\Lambda(\epsilon)^{-1}.$$

Действие $\Phi(z)$ на сечении $s(z)$ определяется формулой: $s(z) \mapsto \Phi(z)s(z)$. Пространство $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ описывается как фактор-пространство матричнозначных полиномиальных функций по двум подпространствам:

$$\text{End}_{out} = \{\chi(z) \in \text{Mat}_n[z] | \chi(z) = \text{const}\}$$

и

$$\text{End}_{in} = \{\chi(z) \in \text{Mat}_n[z] | \chi(A(\epsilon)) = \Lambda(\epsilon)\chi(B(\epsilon))\Lambda(\epsilon)^{-1}\}.$$

Элементы $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ интерпретируются как касательные вектора к пространству модулей голоморфных расслоений в точке M_Λ . Инфинитезимальная деформация расслоения, соответствующая элементу $\chi(z)$, задается формулой

$$\delta_{\chi(z)}\Lambda(\epsilon) = \chi(A(\epsilon))\Lambda(\epsilon) - \Lambda(\epsilon)\chi(B(\epsilon)). \quad (0.11)$$

Глобальные сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ описываются выражениями:

$$\Phi(z) = \text{Res}_\epsilon \left(\frac{\Phi(\epsilon)}{z - A(\epsilon)} dz - \frac{\Lambda(\epsilon)^{-1}\Phi(\epsilon)\Lambda(\epsilon)}{z - B(\epsilon)} dz \right), \quad (0.12)$$

где

$$\text{Res}_\epsilon \Lambda(\epsilon)\Phi(\epsilon)\Lambda(\epsilon)^{-1} - \Phi(\epsilon) = 0$$

и $\Phi(\epsilon) = \sum_i \Phi_i \frac{1}{\epsilon^{i+1}}$ - матричнозначная полиномиальная функция. Данное выражение также предполагает разложение знаменателя в геометрическую прогрессию. Оказывается, что все глобальные сечения из $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ получаются таким образом.

Симплектическая форма на кокасательном расслоении к пространству модулей расслоений может быть описана в терминах гамильтоновой редукции симплектической формы на пространстве пар $\Lambda(\epsilon), \Phi(\epsilon)$, заданной выражением:

$$\text{Res}_\epsilon \text{Trd}(\Lambda(\epsilon)^{-1}\Phi(\epsilon)) \wedge d\Lambda(\epsilon). \quad (0.13)$$

При этом гамильтонова редукция выполняется относительно действия сопряжением постоянными матрицами GL_n .

Интегрируемость Система Хитчина на кривой Σ^{proj} описывается как система на фазовом пространстве, которое реализуется в виде гамильтонового фактора пространства пар $\Lambda(\epsilon), \Phi(\epsilon)$. Симплектическая форма задается формулой 0.13. Редукция рассматривается по отношению к действию группы GL_n сопряжениями. Оператор Лакса определяется формулой ?? . Гамильтонианы задаются коэффициентами разложения функций $Tr(\Phi(z)^k)$ по некоторому базису голоморфных k -дифференциалов (то есть сечений $H^0(\mathcal{K}^k)$). Отметим, что $\forall z, w, k, l$ выполняется следующее свойство коммутативности: $Tr(\Phi(z)^k)$ и $Tr(\Phi(w)^l)$ коммутируют на не редуцированном пространстве.

Доказательства интегрируемости системы Хитчина на особой кривой проводится с помощью техники r -матричных вычислений. Пуассонова скобка между $\Phi(\epsilon)$ определяется r -матричным выражением:

$$\{\Phi(\epsilon) \otimes \Phi(\eta)\} = |[\Phi(\epsilon) \otimes 1, \delta_\eta^\epsilon R]|_- = |[\Phi(\epsilon) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(\eta), \delta_\eta^\epsilon R]|_\eta. \quad (0.14)$$

Здесь $\{A \otimes B\}$ стандартное обозначение для поэлементных скобок Пуассона двух матриц со значениями в Пуассоновой алгебре. Матрица R это матрица перестановки в тензорном квадрате линейного пространства: $R(u \otimes v) = v \otimes u$. Функция δ_ϵ^η определяется выражением

$$\delta_\epsilon^\eta = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\eta^k}{\epsilon^{k+1}}.$$

Обозначение $|\dots|_\nu$ означает отбрасывание мономов ν^k , степени $k < N$, также как $|\dots|_-$ означает отбрасывание положительных мономов.

r -матричной скобкой также описывается Пуассонова структура следующих генераторов

$$\Phi(z, \epsilon) = \left| \frac{\Phi(\epsilon)}{z - A(\epsilon)} - \frac{\Lambda^{-1}(\epsilon)\Phi(\epsilon)\Lambda(\epsilon)}{z - B(\epsilon)} \right|_{-\{\epsilon\}}.$$

А именно выполняется следующее равенство

$$\{\Phi(z, \epsilon) \otimes \Phi(w, \eta)\} = |[\Phi(z, \epsilon) \otimes 1, R] \delta_\eta^\epsilon \delta_w^z|_{-\{\text{по всем переменным}\}}.$$

Пуассонова структура в терминах операторов Лакса также описывается r -матричной формой:

$$\{\Phi(z) \otimes \Phi(w)\} = |[\Phi(z) \otimes 1, R] \delta_w^z|_{-\{z, w\}} = |[\Phi(z) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(w), R] \delta_w^z|_w. \quad (0.15)$$

Коммутативность $Tr(\Phi(z)^k)$ доказывается традиционным для структур r -матричного типа способом.

Функции $Tr(\Phi(z)^k)$ инвариантны по отношению к действию группы GL_n сопряжением на пространстве пар $\Lambda(\epsilon), \Phi(\epsilon)$. Эти функции могут быть ограничены на редуцированное пространство. Важным свойством гамильтоновой редукции является то, что при редукции сохраняются скобки инвариантных функций. Следовательно, данная процедура приводит к построению коммутативного семейства на редуцированном пространстве, которое совпадает с фазовым пространством системы Хитчина.

Пример 0.3. Рассмотрим рациональную кривую с одной двойной точкой $z_1 \leftrightarrow z_2$ (кольцо рациональных функций на такой кривой выделяется в кольце рациональных функций f на $\mathbb{CP}^1$ условием $f(z_1) = f(z_2)$) и одной отмеченной точкой z_3 . Дуализирующий пучок (т.е. пучок реализующий двойственность Серра $H^1(\mathcal{F})^* \simeq H^0(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{K})$) имеет глобальное сечение $dz(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2})$. Рассмотрим пространство модулей $\mathcal{M}$ голоморфных расслоений E ранга n на Σ_{node} с фиксированной тривиализацией в точке z_3 . Имеется следующий изоморфизм линейных пространств

$$T_E \mathcal{M} = H^1(\text{End}(E) \otimes \mathcal{O}(-p)).$$

Ограничим рассмотрение открытой клеткой пространства модулей, отвечающей классам эквивалентности матриц Λ с различными собственными значениями. Косапальное пространство изоморфно пространству голоморфных сечений расслоения $\text{End}^*(E) \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(p)$. Это пространство может быть реализовано пространством рациональных матричнозначных функций переменной z следующего вида

$$\Phi(z) = \left(\frac{\Phi_1}{z-z_1} - \frac{\Phi_2}{z-z_2} + \frac{\Phi_3}{z-z_3} \right) dz,$$

где на вычеты выполняются условия

$$\Phi_1 \Lambda = \Lambda \Phi_2 \quad \text{и} \quad \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Фазовое пространство системы параметризуется элементом $U \in GL(n)$, который характеризует тривиализацию расслоения в точке z_3 , матрицей Λ , определяющей проективный модуль над кольцом $\mathcal{O}(\Sigma_{mode})$, вычетами поля Хиггса Φ_i . В данных координатах каноническая симплектическая форма на $\mathcal{T}^* \mathcal{M}$ может быть представлена выражением

$$\omega = Tr(d(\Lambda^{-1} \Phi_1) \wedge d\Lambda) + Tr(d(U^{-1} \Phi_3) \wedge dU).$$

После выполнения гамильтоновой редукции по отношению к правому действию группы $GL(n)$ на U и присоединенному действию на элементах Φ_i , Λ получим пространство, параметризуемое матричными элементами $(\Phi_3)_{ij} = f_{ij}, i \neq j$; собственными значениями e^{2x_i} матрицы Λ и диагональными элементами матрицы $(\Phi_1)_{ii} = p_i$ со следующими скобками Пуассона

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{f_{ij}, f_{kl}\} = \delta_{jk}f_{il} - \delta_{il}f_{kj}.$$

Гамильтониан спиновой тригонометрической системы Калоджеро-Мозера, связанной с конечно-зонными решениями матричных обобщений уравнения КП [36], получается как коэффициент $Tr\Phi^2(z)$ при $1/(z - z_1)^2$

$$H = Tr\Phi_1^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 - 4 \sum_{i \neq j} \frac{f_{ij}f_{ji}}{\sinh^2(x_i - x_j)}.$$

Лекция 4. Система Годена

Оператор Лакса Система Годена была построена в [11] (раздел 13.2.2) как предел ХХХ модели Гейзенберга. Она описывает одномерную цепочку взаимодействующих частиц со спином. Система Годена может быть рассмотрена как обобщенная система Хитчина, соответствующая рациональной кривой $\Sigma = \mathbb{CP}^1$ с N отмеченными точками $z_1, \dots, z_N$. Поле Хиггса в данном случае представляется рациональным сечением типа $\Phi = L(z)dz$ где

$$L(z) = \sum_{i=1 \dots N} \frac{\Phi_i}{z - z_i}. \quad (0.16)$$

Выражение $L(z)$ традиционно называется оператором Лакса ввиду исключительной роли представления Лакса в теории интегрируемых систем:

$$\dot{L} = [M, L]$$

для некоторой матричнозначной функции M .

Вычеты оператора Лакса системы Годена Φ_i являются матрицами размера $n \times n$, матричные элементы которых лежат в $\mathfrak{gl}_n \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n$. $(\Phi_i)_{kl}$ совпадает с kl -ым генератор i -ой копии $\mathfrak{gl}_n$. В данном случае генераторы

алгебры Ли интерпретируются как функции на двойственном пространстве $\mathfrak{gl}_n^*$. Симметрическая алгебра $S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n^*]$ снабжена Пуассоновой структурой, задаваемой скобкой Кириллова-Костанта на двойственном пространстве к алгебре Ли:

$$\{(\Phi_i)_{kl}, (\Phi_j)_{mn}\} = \delta_{ij}(\delta_{lm}(\Phi_i)_{kn} - \delta_{nk}(\Phi_i)_{ml}).$$

R -матричная скобка R -матричные представления скобок Пуассона оказались ключевым элементом теории квантовых групп. В некотором смысле наличие R -матричной структуры эквивалентно интегрируемости. Напомним, что в теории квантовых групп [37] выделенными объектами являются так называемые квазитриугольные или сплетенные биалгебры. Введем обозначения:

- $\{e_i\}$ - стандартный базис в $\mathbb{C}^n$;
- $\{E_{ij}\}$ - стандартный базис в $\text{End}(\mathbb{C}^n)$, то есть такой, что $E_{ij}e_k = \delta_k^j e_i$;
- $e_{ij}^{(s)}$ - генераторы s -ой копии $\mathfrak{gl}_n \subset \oplus^N \mathfrak{gl}_n$.

Оператор Лакса может быть представлен в виде

$$L(z) = \sum_{ij} E_{ij} \otimes \sum_{s=1}^N \frac{e_{ij}^{(s)}}{z - z_s}.$$

Пуассонова структура может быть описана следующим кратким соотношением в терминах производящей функции генераторов:

$$\{L(z) \otimes L(u)\} = [R_{12}(z - u), L(z) \otimes 1 + 1 \otimes L(u)] \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N},$$

с классической R -матрицей Янга

$$R(z) = \frac{P_{12}}{z}, \quad P_{12}v_1 \otimes v_2 = v_2 \otimes v_1, \quad P_{12} = \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Интегралы Интегралы движения могут быть получены как коэффициенты характеристического полинома

$$\det(L(z) - \lambda) = \sum_{k=0}^n I_k(z) \lambda^{n-k}. \quad (0.17)$$

Часто используется альтернативный базис симметрических функций собственных значений оператора Лакса (полиномы Ньютона собственных чисел оператора Лакса)

$$J_k(z) = \text{Tr} L^k(z), \quad k = 1, \dots, n.$$

Традиционные квадратичные Гамильтонианы могут быть получены следующим образом

$$H_{2,k} = \text{Res}_{z=z_k} \text{Tr} L^2(z) = \sum_{j \neq k} \frac{2 \text{Tr} \Phi_k \Phi_j}{(z_k - z_j)} = 2 \sum_{j \neq k} \frac{\sum_{lm} e_{lm}^{(k)} e_{ml}^{(j)}}{z_k - z_j}.$$

Они описывают модель магнетика, состоящего из набора частиц на прямой с парным взаимодействием, определяемым внутренними спиновыми степенями свободы. Известно классическое

Утверждение 0.5. *Коэффициенты характеристического полинома $L(z)$ коммутируют по отношению к скобке Кириллова-Костанта*

$$\{I_k(z), I_m(u)\} = 0.$$

Аппарат R -матричных представлений существенно упрощает доказательство такого рода утверждений. Представим здесь основную схему доказательства.

Доказательство

Пусть $L_1(z) = L(z) \otimes 1$ and $L_2(u) = 1 \otimes L(u)$.

$$\begin{aligned} \{J_k(z), J_m(u)\} &= \text{Tr}_{12} \{L^k(z) \otimes L^m(u)\} \\ &= \text{Tr}_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) \{L(z) \otimes L(u)\} L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u) \\ &= \text{Tr}_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u) \end{aligned} \quad (0.18)$$

$$\begin{aligned} &+ \text{Tr}_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j}(u) \\ &- \text{Tr}_{12} \sum_{ij} L_1^{i+1}(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u) \quad (0.19) \\ &- \text{Tr}_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^{j+1}(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u). \end{aligned}$$

В частности

$$(0.18) + (0.19) = \text{Tr}_{12} \left[\sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u), L_1(z) \right].$$

Последнее выражение равно нулю по причине того, что под следом стоит коммутатор некоторых выражений.

Алгебро-геометрическое описание В данном разделе описываются основные алгебро-геометрические компоненты обобщения конструкции Хитчина на кривые с отмеченными точками. А именно, строится пара $\{\Sigma, \mathcal{L}\}$ - спектральная кривая и расслоение на ней, которая позволяет решать классическую систему Годена.

Спектральная кривая Спектральная кривая системы Годена $\tilde{\Sigma}$ описывается уравнением

$$\det(L(z) - \lambda) = 0. \quad (0.20)$$

Для построения неособой компактификации кривой необходимо рассмотреть тотальное пространство расслоения, в котором оператор Лакса принимает значения

$$\Phi(z) = L(z)dz \in H^0(\mathbb{CP}^1, \text{End}(\mathcal{O}^n) \otimes \Lambda) \quad (0.21)$$

где $\Lambda = \mathcal{K}(k) = \mathcal{O}(k-2)$. Определим компактификацию Σ уравнением

$$\det(\Phi(z) - \lambda) = 0. \quad (0.22)$$

Данная кривая является подмногообразием рациональной поверхности S_{k-2} , полученной с помощью компактификации тотального пространства линейного расслоения $\mathcal{O}(k-2)$ над $\mathbb{CP}^1$, а именно проективизации $P(\mathcal{O}(k-2) \oplus \mathcal{O})$ над рациональной кривой. Данная линейчатая поверхность содержит три типа дивизоров: E_∞ - исключительный дивизор, C - слой расслоения и E_0 - базовая кривая. Эти дивизоры имеют следующие пересечения

$$\begin{aligned} E_0 \cdot E_0 &= k-2, \\ E_0 \cdot C &= 1, \\ C \cdot C &= 0, \\ E_\infty \cdot C &= 1. \end{aligned}$$

Для определения рода кривой Σ воспользуемся формулой присоединения. Для этого для начала вычислим канонический класс S_{k-2} . Ему соответствует класс дивизоров

$$\mathcal{K}_{S_{k-2}} = -2E_0 + (k-4)C.$$

Пусть класс Σ равен $[\Sigma] = n_1E_0 + n_2C$. Из того, что Σ является n -листным накрытием $\mathbb{C}P^1$ получим $[\Sigma] \cdot C = n$. Из этого следует $n_1 = n$. Для вычисления n_2 необходимо использовать факт, что Σ получена, как спектральная кривая голоморфного сечения $\text{End}(\mathcal{O}^n) \otimes \Lambda$ и, следовательно, не пересекает бесконечный дивизор E_∞ . Получим $n_2 = 0$ и следовательно

$$[\Sigma] = nE_0.$$

По формуле присоединения получим

$$\begin{aligned} 2g - 2 &= \mathcal{K}_{S_{k-2}} \cdot [\Sigma] + [\Sigma] \cdot [\Sigma] \\ &= (-2E_0 + (k-4)C) \cdot nE_0 + n^2E_0 \cdot E_0 \\ &= -2(k-2)n + (k-4)n + (k-2)n^2. \end{aligned}$$

Это позволяет вычислить род спектральной кривой

$$g(\Sigma) = \frac{(k-2)n(n-1)}{2} - (n-1) \quad (0.23)$$

Линейное расслоение Точке пространства модулей $\mathcal{M}$ можно сопоставить спектральную кривую и линейное расслоение на ней $\mathcal{L}$, строящееся как собственное подрасслоение в $\pi^*\mathcal{O}^n$ по отношению к действию оператора Лакса. Рассмотрим отображение обратных образов:

$$\pi^*(\mathcal{O}^n) \xrightarrow{\pi^*(\Phi) - y \cdot Id} \pi^*(\mathcal{O}^n \otimes \Lambda). \quad (0.24)$$

Здесь π проекция $\Lambda \rightarrow \Sigma$, y - таавтологическое сечение $\pi^*\Lambda$. В рассматриваемом случае имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^n \xrightarrow{\pi^*(\Phi) - y \cdot Id} \pi^*\mathcal{O}^n(k-2) \otimes \mathcal{O}_S(E_\infty) \rightarrow \mathcal{F}_\Sigma \rightarrow 0. \quad (0.25)$$

Фактор-пучок $\mathcal{F}_\Sigma$ имеет носитель на Σ . Ограничивая последовательность на спектральную кривую получим

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma^n \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma^n((k-2)C + E_\infty)|_\Sigma \rightarrow \mathcal{F}_\Sigma \rightarrow 0, \quad (0.26)$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}_\Sigma$ являются линейными расслоениями. В этом случае получим

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_\Sigma^n) - \chi(\mathcal{O}_S^n((k-2)C + E_\infty)|_\Sigma) + \chi(\mathcal{F}_\Sigma)$$

Обозначим дивизор $(k-2)C + E_\infty \subset S$ как D .

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_\Sigma^n) &= n(1-g), \\ \chi(\mathcal{O}_S^n(D)|_\Sigma) &= nD \cdot [\Sigma] + n(1-g) \\ &= n^2(k-2) + n(1-g), \\ \chi(\mathcal{F}_\Sigma) &= \chi(\pi^* \mathcal{O}^n(k-2) \otimes \mathcal{O}_S(E_\infty)) - \chi(\mathcal{O}_S^n) \\ &= n \frac{1}{2} (D \cdot D - D \cdot \mathcal{K}_S) = n(k-1). \end{aligned} \quad (0.27)$$

Таким образом $\chi(\mathcal{L}) = -n^2(k-2) + n(k-1)$. Подсчитаем количество точек ветвления $\nu = 2(g+n-1) = (k-2)(n^2-n)$. Получим

Лемма 0.6.

$$\deg(\mathcal{L}) = g + n - 1 - \nu.$$

Размерность коммутативного семейства На аффинной карте без $\{z_i\}$ и ∞ спектральная кривая имеет вид

$$R(z, \lambda) = 0, \quad R(z, \lambda) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m R_m(z), \quad (0.28)$$

где

$$R_m(z) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{n-m} \frac{R_{m,i}^{(l)}}{(z - z_i)^l}.$$

Количество свободных коэффициентов равно $\sum_{m=0}^{n-1} k(n-m) = k \frac{n(n+1)}{2}$. Центральные функции (симметрические полиномы собственных чисел соответствующих орбит) являются старшими коэффициентами $R_m(z)$ то есть коэффициентами $R_{m,i}^{n-m}$ в количестве $kn-1$. Оператор Лакса имеет двойной ноль в бесконечности

$$L(z) = \frac{1}{z^2} \sum_i \Phi_i z_i + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Из этого следует, что $R_m(z)$ имеет ноль порядка $2(n - m)$ в бесконечности. Это наблюдение в свою очередь накладывает дополнительные

$$\sum_{m=0}^{n-1} (2(n - m) - 1) = n^2$$

условий на значения Гамильтонианов. Таким образом, размерность спектра коммутативного семейства составляет

$$k \frac{n(n+1)}{2} - kn + 1 - n^2 = k \frac{n(n-1)}{2} - n^2 + 1 = g.$$

Разделенные переменные Для широкого класса интегрируемых систем разделенными оказываются переменные, связанные с дивизором линейного расслоения $\mathcal{L}$ на спектральной кривой, а именно пары координат точек дивизора, отвечающих вложению аффинной карты базовой алгебраической кривой в тотальное пространство канонического расслоения (или других линейных расслоений в случае рассмотрения обобщений системы Хитчина). Обычно, данный дивизор определяется дивизором нулей Функции Бейкера. В работе [38] приводится конструкция разделенных переменных для некоторых семейств интегрируемых систем. В $\mathfrak{sl}_2$ -системе Годена разделенные переменные были известны ранее и могут быть найдены еще более явным образом.

В случае $\mathfrak{sl}_2$ -системы Годена в работе [39] были построены разделенные переменные. Напомним, что $\mathfrak{sl}_2$ -система Годена получается из общей $\mathfrak{gl}_2$ системы (0.16) при выборе значений центральных функций, отвечающих следу каждой из орбит, равных 0. оператор Лакса в этом случае определяется формулой:

$$L = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & -A(z) \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать характеристический полином, как функцию параметров z, λ и значений Гамильтонианов:

$$\det(L(z) - \lambda) = R(z, \lambda, h_1, \dots, h_d).$$

Определим переменные y_j , как нули выражения $C(z)$. В качестве двойственных переменных возьмем

$$w_j = A(y_j).$$

Этот набор переменных определяет координаты Дарбу на фазовом пространстве:

$$\{y_i, w_j\} = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим производящую функцию $S(I, y)$ канонического преобразования от переменных y_j, w_j к переменным „действие-угол“ I_j, ϕ_j

$$w_j = \partial_{y_j} S \quad \phi_j = \partial_{I_j} S$$

Точка с координатами (y_j, w_j) является точкой спектральной кривой в силу определения данных переменных. Тот факт, что переменные типа „действие“ являются функциями Гамильтонианов, позволяет разделить переменные в задаче отыскания канонического преобразования S

$$S(I, y_1, \dots, y_d) = \prod_i s(I, y_i),$$

где каждый сомножитель $s(I, z)$ решает уравнение

$$R(z, \partial_z s, h_1, \dots, h_d) = 0.$$

Лекция 5. Задача квантования

Задача квантования имеет физическую мотивацию, она связана с квантовой физикой, являющейся действующей парадигмой современной естественно-научной области знаний. В математическом контексте задача формулируется чаще всего как задача деформации Пуассоновой алгебры. Здесь мы рассматриваем более жесткую постановку задачи, которая предполагает деформацию пары: Пуассонова алгебра + коммутативная подалгебра в ней, причем деформируется также спектральная кривая модели и разделенные переменные. Будем называть полную задачу квантования в указанном смысле алгебро-геометрической.

Деформационное квантование Традиционная схема деформационного квантования предполагает построение ассоциативной алгебры по Пуассоновой алгебре. Пуассоновой алгеброй называется коммутативная алгебра $\mathcal{A}_{cl}$ с умножением, заданным операцией $\cdot$, кроме того оснащенная кососимметричной билинейной операцией, называемой скобкой Пуассона, обозначаемой $\{\circ, \circ\}$, превращающей $\mathcal{A}_{cl}$ в алгебру Ли, и согласованной с умножением посредством тождеством Лейбница:

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}.$$

Пуассонова алгебра может считаться инфинитезимальной версией ассоциативной алгебры. Благодаря так называемой ε -конструкции Дринфельда несложно заметить, что пространство $\mathcal{A}_{cl}[\varepsilon]/\varepsilon^2$ со операцией умножения

$$f * g = f \cdot g + \varepsilon\{f, g\}$$

является ассоциативной алгеброй. Под квантованием Пуассоновой алгебры $\mathcal{A}_{cl}$ со структурой, определяемой операциями $(\cdot, \{\circ, \circ\})$, называемой алгеброй классических наблюдаемых, понимается нахождение ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ с операцией умножения $(*)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_{cl}[[\hbar]] \text{ как линейное пространство.}$$

Кроме этого, при отождествлении алгебры классических наблюдаемых с пространством констант в $\mathcal{A}$ требуется следующее согласование структур:

$$\begin{aligned} a * b &= a \cdot b + O(\hbar), \\ a * b - b * a &= \hbar\{a, b\} + O(\hbar^2). \end{aligned}$$

Отображение

$$\lim : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{cl} : \quad \hbar \mapsto 0$$

называется классическим пределом.

Пример 0.4. Рассмотрим Пуассонову алгебру $S(\mathfrak{gl}_n)$, построенную на пространстве симметрической алгебры со скобкой Пуассона, определяемой скобкой Кириллова. Для нее существует каноническое квантование, реализующее концепцию деформационного квантования: пусть $U_\hbar(\mathfrak{gl}_n)$ - деформированная универсальная обертывающая алгебра

$$U_\hbar(\mathfrak{gl}_n) = T^*(\mathfrak{gl}_n)[[\hbar]] / \{x \otimes y - y \otimes x - \hbar[x, y]\}$$

Классический предел описывается пределом $\hbar \rightarrow 0$ который корректно определен в семействе алгебр $U_\hbar(\mathfrak{gl}_n)$ по параметру $\hbar$. Существование предела следует из наличия общего базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта для рассматриваемого семейства.

Квантование интегрируемой системы Интегрируемая система может быть представлена парой: Пуассонова алгебра $\mathcal{A}_{cl}$ и Пуассонова коммутативная подалгебра $\mathcal{H}_{cl}$ подходящей размерности $\dim(\text{Spec}(\mathcal{H}_{cl})) = 1/2\dim(\text{Spec}(\mathcal{A}_{cl}))$. Алгебраическая задача квантования в этих терминах может быть сформулирована как нахождение соответствия

$$\mathcal{H}_{cl} \subset \mathcal{A}_{cl} \Leftrightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$$

удовлетворяющего следующим условиям

- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_{cl}[[\hbar]]$ как линейные пространства, отображение $\lim : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{cl}$ называется классическим пределом;
- $\mathcal{H}$ - коммутативна;
- $\lim : \mathcal{H} = \mathcal{H}_{cl}$

Замечание 0.1. В случае квантования симметрической алгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ квантовое соответствие может быть упрощено. Рассмотрим $U(\mathfrak{gl}_n)$, которая является алгеброй с фильтрацией по степени элементов $\{\mathcal{F}_i\}$. Отображение проекции на ассоциированную градуированную алгебру индуцирует Пуассонову структуру:

$$U(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow Gr(U(\mathfrak{gl}_n)) = \oplus_i \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} = S(\mathfrak{gl}_n). \quad (0.29)$$

На генераторах $a \in \mathcal{F}_i$ и $b \in \mathcal{F}_j$ индуцируется коммутативное умножение и Пуассонова скобка. Данные структуры возникают при рассмотрении следующих выражений:

$$a * b = a \cdot b \bmod \mathcal{F}_{i+j-1}, \quad a * b - b * a = \{a, b\} \bmod \mathcal{F}_{i+j-2}.$$

Решение квантовой системы С физической точки зрения решение квантовой системы или описание поведения системы производится при определении гильбертова пространства состояний системы и нахождении собственного базиса в этом пространстве для Гамильтониана. В рассматриваемых примерах квантовая система имеет конечномерные представления, собственно в них и будет решаться задача описания спектра и собственного базиса Гамильтониана.

Задача квантования системы Годена Классическая часть соответствия квантования определяется следующими объектами: Пуассонова алгебра и коммутативная подалгебра

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{cl} &= S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n^*], \\ \mathcal{H}_{cl} &- \text{ подалгебра порожденная Гамильтонианами Годена (0.17).}\end{aligned}$$

Алгебраическая часть задачи квантования сводится к построению пары, в которой квантовая алгебра наблюдаемых совпадает с тензорной степенью универсальной обертывающей алгебры:

$$\mathcal{A} = U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N},$$

причем коммутативная подалгебра $\mathcal{H}$ является деформацией подалгебры, порожденной классическими Гамильтонианами Годена.

Некоммутативный определитель Рассмотрим матрицу $B = \sum_{ij} E_{ij} \otimes B_{ij}$ элементы которой лежат в некоторой, вообще говоря не коммутативной, ассоциативной алгебре $B_{ij} \in A$. E_{ij} как и прежде обозначают матричные единицы в пространстве $\text{End}(\mathbb{C}^n)$. Будем использовать следующее определение некоммутативного определителя в данном случае

$$\det(B) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau, \sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\tau\sigma} B_{\tau(1), \sigma(1)} \dots B_{\tau(n), \sigma(n)}.$$

Это определение совпадает с классическим для матриц с коммутирующими элементами. Существует эквивалентное определение, апеллирующее к действию оператора на старшей внешней степени линейного пространства. Для этого введем оператор A_n антисимметризации в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$

$$A_n v_1 \otimes \dots \otimes v_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Введенное выше определение некоммутативного определителя эквивалентно следующему

$$\det(B) = \text{Tr}_{1\dots n} A_n B_1 \dots B_n,$$

где B_k обозначает оператор в $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes A$ заданный выражением

$$B_k = \sum_{ij} 1 \otimes \dots \otimes \underbrace{E_{ij}}_k \otimes \dots \otimes 1 \otimes B_{ij},$$

а след берется по всем матричным компонентам $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$.

Квантовая спектральная кривая Будем называть квантовым оператором Лакса системы Годена следующее выражение:

$$L(z) = \sum_{ij} E_{ij} \otimes \sum_{s=1}^N \frac{e_{ij}^{(s)}}{z - z_s}.$$

$L(z)$ является рациональной функцией переменной z со значениями в $\text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Определим квантовый характеристический полином квантового оператора Лакса формулой

$$\det(L(z) - \partial_z) = \sum_{k=0}^n QI_k(z) \partial_z^{n-k}. \quad (0.30)$$

Следующая теорема говорит о том, что именно такая деформация классического характеристического полинома (0.17) позволяет строить производящую функцию квантовых Гамильтонианов.

Теорема 0.7 ([44]). *Коэффициенты $QI_k(z)$ коммутируют*

$$[QI_k(z), QI_m(u)] = 0$$

и квантуют классические Гамильтонианы Годена в следующем смысле

$$\lim(QI_k) = I_k.$$

Доказательство этого факта использует существенные результаты теории квантовых групп, такие как конструкция Янгиана, его подалгебры Бете и в общем укладывается в концепцию квантового метода обратной задачи. В следующих разделах вводятся необходимые определения и приводится набросок доказательства теоремы квантования системы Годена.

Лекция 6. Квантовый Метод Обратной Задачи

Квантовые группы Язык алгебр Хопфа оказался исключительно удобным при описании целого класса квантовых интегрируемых системы. Деформированная тензорной структура на категории представлений оказалась связанной с деформацией пространства симметрических полиномов на группе, предоставляющей новые примеры коммутирующих семейств.

Будем задавать ассоциативную алгебру A над полем k с помощью пары отображений $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ и $\eta : k \rightarrow A$. Рассмотрим стандартное определение коалгебры, двойственного объекта для ассоциативной алгебры.

Определение 0.7. Коалгеброй над полем k называется тройка (C, Δ, ϵ) где C - k -пространство, и набор линейных отображений $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, $\epsilon : C \rightarrow k$ таких что следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow id \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & C & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & C \otimes k \\ \uparrow id & & \uparrow \Delta & & \uparrow id \\ C & \xleftarrow{id} & C & \xrightarrow{id} & C \end{array}$$

Коалгебра называется кокоммутативной если коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow id \\ C \otimes C & \xrightarrow{\tau} & C \otimes C \end{array}$$

где τ обозначает оператор перестановки тензорных компонент.

Пример 0.5. Рассмотрим пространство полиномов от 4-х переменных $\{a, b, c, d\}$. Оказывается, что операция, определенная ниже на генераторах задает структуру коалгебры на данном пространстве:

$$\begin{aligned} \Delta a &= a \otimes a + b \otimes c \\ \Delta b &= a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta c &= c \otimes a + d \otimes c \\ \Delta d &= c \otimes b + d \otimes d \end{aligned}$$

Определение 0.8. Набор данных $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ называется биалгеброй, если H с приведенными отображениями является алгеброй и коалгеброй одновременно, причем отображения Δ и ϵ являются гомоморфизмами алгебр.

Симметрии квантовой плоскости Квантовые группы, так же как и классические, оказываются связанными с симметриями некоторых объектов. Мы будем рассматривать квантовую плоскость, которая описывается ассоциативной алгеброй

$$k\{x, y\}/xy - qyx.$$

Геометрическая интерпретация подобного рода построений составляет предмет активно формирующейся области некоммутативной геометрии.

Рассмотрим алгебру

$$M_q(2) = k\{a, b, c, d\}/J_q$$

где J_q - двусторонний идеал, порожденный соотношениями

$$\begin{aligned} ba &= qab; & db &= qbd; & ca &= qac; \\ dc &= qcd; & bc &= cb; & ad - da &= (q^{-1} - q)bc. \end{aligned}$$

Оказывается, что данные соотношения эквивалентны тому, что преобразования

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (0.31)$$

задают гомоморфизмы квантовой плоскости. В данной алгебре имеется специальный элемент $\det_q = ad - q^{-1}bc = da - qbc$ называемый квантовым детерминантом. Собственно линейная и специальная линейная квантовые группы определяются так:

$$GL_q(2) = M_q(2)[t]/t\det_q - 1; \quad SL_q(2) = M_q(2)/\det_q - 1 = GL_q(2)/t - 1.$$

Рассмотрим также квантовую универсальную обертывающую алгебру $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ с помощью генераторов $\{E, F, K, K^{-1}\}$ и соотношений

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1 \\ KEK^{-1} &= q^2E, & KFK^{-1} &= q^{-1}F, \\ EF - FE &= (K - K^{-1})/(q - q^{-1}). \end{aligned}$$

Утверждение 0.8. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и $SL_q(2)$ являются двойственными алгебрами Хопфа.

Уравнение Янга-Бакстера Уравнением Янга-Бакстера называется уравнение на элемент $R \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2}$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 3} \quad (0.32)$$

где индексы обозначают компоненты тройного тензорного произведения, в которых располагаются компоненты R . Если R представить в виде $R = \sum_i R_i^1 \otimes R_i^2$ то R_{13} будет выражением вида

$$R_{13} = \sum_i R_i^1 \otimes 1 \otimes R_i^2.$$

Заметим, что при замене $R = \tilde{R}P$ где P - матрица перестановки в тензорном квадрате, уравнение Янга-Бакстера эквивалентно соотношению группы кос

$$\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12} = \tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}$$

Уравнение Янга-Бакстера имеет следующую интерпретацию в терминах сплетенных биалгебр.

Определение 0.9. Биалгебра $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ называется квазикокоммутативной, если существует обратимый элемент $R \in H \otimes H$ такой что $\forall x \in H$ выполнено $\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$.

Определение 0.10. Квазикокоммутативная алгебра называется сплетенной (или квазитреугольной в терминологии Дринфельда) если R удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)R &= R_{13}R_{23}, \\ (id \otimes \Delta)R &= R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

Утверждение 0.9. Если H - сплетенная биалгебра, то R удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера.

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} &= R_{12}(\Delta \otimes id)(R) = (\Delta^{op} \otimes id)(R)R_{12} \\ &= (\tau \otimes id)(R)R_{12} = (\tau \otimes id)(R_{13}R_{23})R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

Далее на примере Янгиана мы познакомимся с "обратной" конструкцией, а именно с конструкцией алгебр Хопфа по решению уравнения Янга-Бакстера, называемой конструкцией Решетихина-Тахтаджяна-Фаддеева.

Янгиан Данная алгебра Хопфа была построена в работе [25] и играет важную роль в задаче описания рациональных решений уравнения Янга-Бакстера. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ прежде всего является ассоциативной алгеброй, порожденной элементами $t_{ij}^{(k)}$ (в данном разделе $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, \infty$). Соотношения описываются в терминах производящей функции

$$T(u, \mathbf{h}) \in Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^n)[[u^{-1}, \mathbf{h}]],$$

имеющей вид

$$T(u, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathbf{h}), \quad t_{ij}(u, \mathbf{h}) = \delta_{ij} + \sum_k t_{ij}^{(k)} \mathbf{h}^k u^{-k},$$

где E_{ij} - матричные единицы в $\text{End}(\mathbb{C}^n)$. Соотношения записываются с помощью R -матрицы Янга

$$R(u) = 1 - \frac{\mathbf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

и принимают следующий вид

$$R(z - u, \mathbf{h}) T_1(z, \mathbf{h}) T_2(u, \mathbf{h}) = T_2(u, \mathbf{h}) T_1(z, \mathbf{h}) R(z - u, \mathbf{h}). \quad (0.33)$$

Обе части тождества рассматриваются как элементы

$$\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[z^{-1}, z, u^{-1}, u, \mathbf{h}]],$$

при этом рациональная функция $\frac{1}{z-u}$ в выражении для R -матрицы раскладывается в ряд

$$\frac{1}{z-u} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{z^{l+1}}.$$

В определяющих соотношениях приняты следующие обозначения

$$T_1(z, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z, \mathbf{h}), \quad T_2(u, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} 1 \otimes E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathbf{h}).$$

Янгиан является алгеброй Хопфа, коумножение в которой задано в терминах производящей функции следующей формулой:

$$(id \otimes \Delta) T(z, \mathbf{h}) = T^1(z, \mathbf{h}) T^2(z, \mathbf{h}),$$

где используются следующие обозначения

$$T^1(z, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(z, \mathbf{h}) \otimes 1, \quad T^2(z, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z, \mathbf{h}).$$

„Представление вычисления“ Напомним конструкцию так называемого гомоморфизма „вычисления“ $\rho : Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)$. Для этого определим рациональную функцию по $u, \mathbf{h}$ со значениями в $\text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$

$$T_{ev}(u, \mathbf{h}) = 1 + \frac{\mathbf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\mathbf{h}\Phi}{u}, \quad (0.34)$$

где e_{ij} - генераторы $\mathfrak{gl}_n$. $T_{ev}(u, \mathbf{h})$ удовлетворяет РТТ соотношению (0.33), следовательно отображение $\{t_{ij}^{(1)} \mapsto e_{ij}; t_{ij}^{(k)} \mapsto 0 \text{ при } k > 1\}$ определяет гомоморфизм алгебр.

Рассмотрим тензорное произведение $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}]]$ и производящую функцию (0.34) для отображения вычисления в l -ю компоненту рассматриваемого тензорного произведения $T_{ev}^l(u - z_l, \mathbf{h})$. Оказывается, что для произвольного набора комплексных чисел $(z_1, \dots, z_N)$, выражение

$$T^\alpha(u, \mathbf{h}) = T_{ev}^1(u - z_1, \mathbf{h}) T_{ev}^2(u - z_2, \mathbf{h}) \dots T_{ev}^N(u - z_N, \mathbf{h}), \quad (0.35)$$

являющееся рациональной функцией от u и $\mathbf{h}$ со значениями в $\text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, определяет гомоморфизм $\rho_\alpha : Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}]]$, а именно, имеет место следующая

Лемма 0.10. *Отображение, ставящее в соответствие генератору Янгиана $t_{ij}^{(k)}$ ij -й матричный элемент коэффициента разложения $T^\alpha(u, \mathbf{h})\mathbf{h}^{-k}$ в $u = \infty$ при u^{-k} , определяет гомоморфизм алгебр*

$$\rho_\alpha : Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}]].$$

Данная лемма следует из существования гомоморфизма коумножения и гомоморфизма вычисления.

Подалгебра Бете Данная подалгебра тесно связана с Квантовым Методом Обратной Задачи (КМОЗ) [23, 46, 47], а именно ее генераторы являются квантовыми интегралами для ХХХ модели Гейзенберга [46, 45]. Далее используется описание подалгебры Бете работы [48] (раздел 2.14): рассмотрим комплекснозначную $n \times n$ -матрицу C и $T(u, \mathbf{h})$ - производящую функцию генераторов Янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Введем также обозначение A_n для матрицы антисимметризатора в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и следующие элементы $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u, u^{-1}, \mathbf{h}]]$

$$T_m(u, \mathbf{h}) = \sum_{ij} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes E_{ij} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes t_{ij}(u, \mathbf{h}).$$

Оказывается [48] (раздел 2.14), что выражения вида

$$\tau_k(u, \mathbf{h}) = \text{Tr} A_n T_1(u, \mathbf{h}) T_2(u - \mathbf{h}, \mathbf{h}) \dots T_k(u - \mathbf{h}(k - 1), \mathbf{h}) C_{k+1} \dots C_n \quad (0.36)$$

при $k = 1, \dots, n$, называемые генераторами Бете, порождают коммутативное семейство в $Y(\mathfrak{gl}_n)[[u, u^{-1}, \mathbf{h}]]$ в следующем смысле:

$$[\tau_i(u, \mathbf{h}), \tau_j(v, \mathbf{h})] = 0.$$

Кроме того, данное семейство максимально если матрица C имеет простой спектр. След в выражении 0.36 вычисляется по матричным компонентам $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, а разложение в ряд для $T_m(u - \mathbf{h}(m - 1), \mathbf{h})$ вычисляется в окрестности $u = \infty$, например

$$\frac{1}{u - \mathbf{h}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}^m}{u^{m+1}},$$

Коммутативность подалгебры Бете Доказательство коммутативности в данном случае является обобщением коммутативности инвариантных полиномов на группе в классическом случае. Однако, техника, используемая для доказательства, существенно отличается, не смотря на то, что остается в основе комбинаторной. Мы следуем здесь работе ... Рассмотрим более подробно оператор антисимметризации $A_n \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$, в частности являющийся проектором $A_n^2 = A_n$.

Утверждение 0.11.

$$k!(k - 1)! \dots 1! A_k = \prod_{1 \leq p < k}^{\leftarrow} \left(\prod_{p < q \leq k}^{\leftarrow} R_{pq}(q - p) \right).$$

Доказательство мы оставляем слушателям. Дадим лишь указание, что его можно проводить по индукции, используя при этом универсальное свойство антисимметризатора в групповой алгебре симметрической группы.

В частности, из утверждения выше следует:

$$A_k \otimes 1 T_1(u - 1) \dots T_k(u - k) = T_k(u - k) \dots T_1(u - 1) A_k \otimes 1.$$

Введем пространство $F_k(\mathbb{C}^n) \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$

$$F_k(\mathbb{C}^n) = \{X \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes k} | A_k X = A_k X A_k\}.$$

Заметим, что

$$T_1(u-1) \dots T_k(u-k) \in F_k(\mathbb{C}^n) \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]].$$

Будем также обозначать как ϕ_k отображение $F_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{End}(\wedge^k \mathbb{C}^n)$ определяемое формулой:

$$\phi_k(X) = A_k X.$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству. Заметим, что

$$A_n T_1(u-1) \dots T_n(u-1) = A_n \tau_n(u).$$

Введем также обозначения для обратной матрицы

$$\hat{T}(u) = T^{-1}(u)$$

в терминах которой генераторы подалгебры Бете будут выражаться формулами:

$$\tau_k(u) = \tau_n(u) \text{Tr} A_n \hat{T}_n(u-n) \dots \hat{T}_{k+1}(u-k-1) C_{k+1} \dots C_n.$$

Введем также обозначения:

$$\hat{\tau}_k(u) = \text{Tr} A_r \hat{T}_k(u-k) \dots \hat{T}_1(u-1) C_1 \dots C_k.$$

Основное утверждение эквивалентно коммутативности $[\hat{\tau}_k(u), \hat{\tau}_l(v)] = 0$. Рассмотрим следующий элемент:

$$P(u) = \prod_{1 \leq p \leq k}^{\rightarrow} \left(\prod_{k < q \leq k+l}^{\leftarrow} R_{pq}(u-p+q) \right)$$

который удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} A_k \otimes 1 P(u) &= \prod_{1 \leq p \leq k}^{\leftarrow} \left(\prod_{k < q \leq k+l}^{\leftarrow} R_{pq}(u-p+q) \right) \\ 1 \otimes A_l P(u) &= \prod_{1 \leq p \leq k}^{\rightarrow} \left(\prod_{k < q \leq k+l}^{\rightarrow} R_{pq}(u-p+q) \right). \end{aligned}$$

В частности верно $P(u) \in F_k(\mathbb{C}^n) \otimes F_l(\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим также образ P в $End(\wedge^k \mathbb{C}^n) \otimes End(\wedge^l \mathbb{C}^n)$

$$\bar{P}(u) = \phi_k \otimes \phi_l(P(u)) = A_k \otimes A_l P(u)$$

являющийся обратимым линейным оператором при общем значении параметра u . Заметим, что

$$P(u - v) \otimes 1 T_1(u - 1) \dots T_k(u - k) T_{k+1}(v - 1) \dots T_{k+l}(v - l) = T_{k+1}(v - 1) \dots T_{k+l}$$

Введем также обозначения

$$\begin{aligned} K(u) &= \phi_k \otimes \phi_l \otimes 1(\hat{T}_k(u - k) \dots \hat{T}_1(u - 1)) \\ L(u) &= \phi_k \otimes \phi_l \otimes 1(\hat{T}_{k+l}(u - l) \dots \hat{T}_{k+1}(u - 1)) \\ W &= \wedge^k C \otimes \wedge^l C \otimes 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\hat{B}_k(u) \hat{B}_l(v) = tr \otimes 1(K(u)L(v)W)$$

Пользуясь коммутационными соотношениями получим

$$\begin{aligned} K(u)L(v)W\bar{P}(u - v) \otimes 1 &= K(u)L(v)\bar{P}(u - v) \otimes 1W \\ &= \bar{P}(u - v) \otimes 1L(v)K(u)W \end{aligned}$$

Далее, пользуясь тем, что $\bar{P}$ обратим при общих значениях параметра под следом получим требуемое тождество.

Квантование системы Годена Далее мы будем рассматривать единичную матрицу C и образы генераторов подалгебры Бете при отображении „вычисления“, которые являются мероморфными функциями по u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\hbar]]$, для простоты мы будем их обозначать теми же буквами

$$\tau_k(u, \hbar) = Tr A_n T_1^\alpha(u, \hbar) T_2^\alpha(u - \hbar, \hbar) \dots T_k^\alpha(u - \hbar(k - 1), \hbar) \quad k = 1, \dots, n. \quad (0.37)$$

Доказательство коммутативности Присутствие структуры коумножения в теории квантовых групп позволяет использовать так называемый метод „фузии“ для построения нетривиальных интегрируемых систем.

Буквально, данный метод заключается в следующем: рассмотрим образ $T(z)$ при представлении вычисления в композиции с подходящим количеством операций коумножения $\rho_{z_1} \otimes \dots \otimes \rho_{z_N} \Delta^{N-1}$

$$T^{\aleph}(u) = T_{z_1}^1(z) \dots T_{z_N}^N(z) \in \text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}.$$

Образ подалгебры Бете при таком гомоморфизме порождает некоторую коммутативную подалгебру и может быть описан производящей функцией:

$$\begin{aligned} Q(z, \mathbf{h}) &= \text{Tr} A_n(e^{-\mathbf{h}\partial_z} T_1^{\aleph}(z, \mathbf{h}) - 1) \dots (e^{-\mathbf{h}\partial_z} T_n^{\aleph}(z, \mathbf{h}) - 1) \\ &= \sum_{j=0}^n \tau_j(z - \mathbf{h}, \mathbf{h}) (-1)^{n-j} C_n^j e^{-j\mathbf{h}\partial_z} \\ &= \det(e^{-\mathbf{h}\partial_z} T^{\aleph}(z, \mathbf{h}) - 1). \end{aligned} \quad (0.38)$$

Выражение (0.38) может быть представлено в виде ряда по ∂_z . Из коммутативности генераторов подалгебры Бете следует, что коэффициенты данного ряда, являющиеся рациональными функциями по u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathbf{h}]]$, тоже коммутируют при разных значениях параметра u . Следовательно коммутируют также их младшие коэффициенты по $\mathbf{h}$, которые и являются искомыми коэффициентами квантового характеристического многочлена системы Годена. Оказывается, что старший коэффициент по $\mathbf{h}$ выражения (0.38) имеет вид

$$\det(e^{-\mathbf{h}\partial_z} T^{\aleph}(z, \mathbf{h}) - 1) = \mathbf{h}^n \det(L(z) - \partial_z) + O(\mathbf{h}^{n+1})$$

в силу разложения:

$$e^{-\mathbf{h}\partial_z} T^{\aleph}(z) - 1 = \mathbf{h}(L(z) - \partial_z) + O(\mathbf{h}^2).$$

Замечание 0.2. Следует отметить, что независимость квантовых Гамильтонианов Годена непосредственно вытекает из независимости их классических пределов, поскольку наличие алгебраического соотношения на построенные операторы из $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ влечет некоторое нетривиальное соотношение на их старшие символы. Вопрос о максимальнойности данного семейства также решается положительно исходя из максимальнойности семейства классических Гамильтонианов.

Замечание 0.3. Основной результат данной работы может быть интерпретирован как построение квазиклассического предела ХХХ-модели Гейзенберга.

Лекция 7. Методы решения квантовых систем

Традиционные в области квантовых интегрируемых систем методы решения для систем на конечном масштабе сводятся к методу анзаца Бете или разделенных переменных, которые в свою очередь позволяют выразить задачу описания спектра квантовой системы в терминах решений некоторой алгебраической системы уравнений, или в терминах свойств монодромии некоторой Фуксовой системы. Однако, способов решений альтернативных задач данные методы не предполагают. Тем не менее, существует достаточно богатый материал в области решения квантовых интегрируемых систем в разнообразных пределах.

Приведем описания двух наиболее традиционных методов для простейшей системы Годена.

Анзац Бете Рассмотрим квантовую систему Годена соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$. В этом случае оператор Лакса представляется в виде

$$L = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & -A(z) \end{pmatrix} = \sum_i \frac{\Phi_i}{z - z_i},$$

где

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} h_i/2 & e_i \\ f_i & -h_i/2 \end{pmatrix}.$$

Квантовый характеристический полином является дифференциальным оператором второго порядка со значениями в квантовой алгебре:

$$\det(L(z) - \partial_z) = \partial_z^2 - \frac{1}{2} \sum_i \frac{c_i^{(2)}}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z - z_i}.$$

Гамильтонианы Годена задаются вычетами

$$H_i = \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j / 2 + e_i f_j + e_j f_i}{z_i - z_j}.$$

Коэффициенты при полюсах второго порядка также содержатся в коммутативной подалгебре, но являются центральными по отношению ко всей квантовой алгебре.

Рассмотрим пространство $V_\lambda = V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_N}$ где V_{λ_i} конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$ старшего веса λ_i .

Лемма 0.12. *Вектор*

$$\Omega = \prod_{j=1}^M C(\mu_j) |vac >$$

является общим собственным вектором для коммутирующего семейства гамильтонианов Годена если набор параметров μ_j (называемых корнями Бете) удовлетворяет системе уравнений Бете

$$-\frac{1}{2} \sum_i \frac{\lambda_i}{\mu_j - z_i} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{\mu_j - \mu_k} = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (0.39)$$

Собственные значения H_i на векторе Ω в этом случае выражаются через корни Бете следующими формулами

$$H_i^\Omega = -\lambda_i \left(\sum_j \frac{1}{z_i - \mu_j} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{z_i - z_j} \right).$$

Доказательство

В рассматриваемом случае квантовый характеристический полином имеет вид:

$$\det(L(z) - \partial_z) = \partial_z^2 - A^2(z) - C(z)B(z) + A'(z) = \partial_z^2 - H(z).$$

Также имеют место следующие коммутационные соотношения на матричные элементы оператора Лакса:

$$\begin{aligned} [A(z), B(z)] &= -B'(z), & [A(z), C(u)] &= \frac{1}{z-u}(C(z) - C(u)), \\ [A(z), C(z)] &= C'(z), & [B(z), C(u)] &= \frac{2}{u-z}(A(z) - A(u)). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и условие:

$$H(z)|vac > = \left(\frac{1}{4} \left(\sum_i \frac{\lambda_i}{z - z_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\lambda_i}{(z - z_i)^2} \right) |vac > = h_0(z)|vac >$$

получим:

$$\begin{aligned} H(z)\Omega &= \left(h_0(z) + 2 \sum_{j=1}^M \frac{1}{\mu_j - z} A(z) + \sum_{j \neq k} \frac{1}{(\mu_j - z)(\mu_k - z)} \right) \Omega \\ &+ 2C(z) \sum_{j=1}^M \frac{1}{z - \mu_j} \prod_{l \neq j} C(\mu_l) \left(\sum_{k \neq j} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} + A(\mu_j) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнения Бете могут быть выражены в форме:

$$\sum_{k \neq j} \frac{1}{\mu_k - \mu_j} + A(\mu_j) = 0.$$

Последнее наблюдение и доказывает лемму.

Квантовые разделенные переменные Рассмотрим систему Годена, отвечающую алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ в представлении V_λ как в предыдущем рассмотрении. Неприводимые представления такого типа можно реализовать как фактор пространство соответствующего модуля Верма $\mathbb{C}[t_i]/t_i^{\lambda_i+1}$, так что генераторы $\mathfrak{sl}_2$ действуют дифференциальными операторами:

$$h^{(s)} = -2t_s \frac{\partial}{\partial t_s} + \lambda_s, \quad e^{(s)} = -t_s \frac{\partial^2}{\partial t_s^2} + \lambda_s \frac{\partial}{\partial t_s}, \quad f^{(s)} = t_s.$$

Будем исследовать задачу на собственные вектора квантовых Гамильтонианов в тензорном произведении модулей Верма, которое в настоящем случае реализуется пространством полиномов от N переменных $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$. Введем набор разделенных переменных y_j , определяемых формулой:

$$C(z) = C_0 \frac{\prod_j (z - y_j)}{\prod_i (z - z_i)}.$$

Они являются элементами некоторого алгебраического расширения кольца $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$. Будем теми же символами обозначать операторы умножения на данные функции.

Пусть Ω общий собственный вектор гамильтонианов Годена в $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$

$$H(z)\Omega = h(z)\Omega. \quad (0.40)$$

Рассматривая обе части 0.40 как рациональные функции переменной z и подставляя слева $z = y_j$ получим:

$$\begin{aligned} H(y_j) &= A^2(y_j) - A'(y_j) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,k} \frac{1}{(y_j - z_i)(y_j - z_k)} h_i h_k + \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{(y_j - z_k)^2} h_k. \end{aligned} \quad (0.41)$$

Используя определение разделенных переменных выразим частные производные:

$$\partial_{y_j} = \sum_k \frac{\partial t_k}{\partial y_j} \partial_{t_k} = \sum_k \frac{t_k}{y_j - z_k} \partial_{t_k}. \quad (0.42)$$

Подставляя 0.42 в 0.41 получим:

$$\left(-\partial_{y_j} + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\lambda_k}{y_j - z_k} \right)^2 \Omega = h(y_j) \Omega.$$

Таким образом, общая собственная функция для Гамильтонианов Годена факторизуется, то есть ее зависимость от переменных y_j разделяется в следующем смысле:

$$\Omega = \prod_j \omega(y_j).$$

При этом каждый множитель $\omega(z)$ связан с решением уравнения Штурма-Лиувилля:

$$(\partial_z^2 - h(z))\tilde{\omega}(z) = 0$$

следующим образом:

$$\tilde{\omega}(z) = \prod_i (z - z_i)^{-\lambda_i/2} \omega(z).$$

Монодромия Фуксовых систем Результаты традиционного метода разделенных переменных и анзаца Бете в квантовых интегрируемых системах, приведенные выше, демонстрирует, что описание спектра квантовых моделей тесно связано с семействами специальных Фуксовых уравнений, обладающих исключительными свойствами представления монодромии. Эти свойства являются крайне естественными в подходе Гейзенберга, изложенном в работе [49], и отвечают существованию глобальных волновых функций.

В рассматриваемом $\mathfrak{sl}_2$ случае для системы Годена было получено, что если Ω - общий собственный вектор Бете с собственными значениями H_i^Ω тогда уравнение

$$\left(\partial^2 - \frac{1}{4} \sum_i \frac{\lambda_i(\lambda_i + 2)}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i^\Omega}{z - z_i} \right) \Psi(z) = 0 \quad (0.43)$$

имеет решение вида

$$\Psi(z) = \prod_i (z - z_i)^{-\lambda_i/2} \prod_j (z - \mu_j),$$

где набор параметров μ_j удовлетворяет системе уравнений Бете.

Это наблюдение было обобщено в результате, изложенном в работе [50]. Рассмотрим квантовый характеристический полином:

$$\det(L(z) - \partial_z) = \partial_z^2 - \sum_i \frac{C_i^{(2)}}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z - z_i}$$

Пусть $\mathcal{H}$ - алгебра, порожденная коэффициентами квантового характеристического полинома. Назовем χ - характер алгебры $\mathcal{H}$ - допустимым, если на центральных элементах он принимает значения $\chi(C_i^{(2)}) = \frac{1}{4}(\lambda_i + 2)\lambda_i$.

Теорема 0.13 ([50]). *Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством допустимых характеров χ , для которых дифференциальное уравнение*

$$\chi(\det(L(z) - \partial_z))\Psi(z) = 0$$

имеет монодромию ± 1 , и множеством общих собственных векторов системы Годена в представлении V_λ .

В отличие от традиционных формулировок анзаца Бете или разделенных переменных характеристика спектра в терминах специальных Фуксовых уравнений может быть обобщена на случай $\mathfrak{sl}_n$.

Перестройки Гекке. Скалярное и матричное Фуксовы уравнения. Рассмотрим Фуксову систему, определяемую связностью в тривиальном расслоении ранга 2 на диске с проколами вида:

$$A(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{z - z_i} \quad (0.44)$$

с вычетами удовлетворяющими условиям

$$\text{Tr}(A_i) = 0; \quad \text{Det}(A_i) = -d_i^2; \quad \sum_i A_i = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}. \quad (0.45)$$

Собственно Фуксова система записывается уравнениями

$$(\partial_z - A(z))\Psi(z) = 0. \quad (0.46)$$

В компонентах эта система может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2, \\ \psi'_2 &= a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2. \end{aligned}$$

Первая векторная компонента удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\psi''_1 = (a'_{12}/a_{12})\psi'_1 + u\psi_1,$$

где

$$u = a'_{11} + a_{11}^2 - a_{11}(a'_{12}/a_{12}) + a_{12}a_{21}.$$

При следующей замене переменных: $\Phi = \psi_1/\chi$, где $\chi = \sqrt{a_{12}}$, получим уравнение

$$\Phi'' + U\Phi = 0,$$

в котором потенциал определяется формулой

$$U = \chi''/\chi - (a'_{12}/a_{12})\chi'/\chi - u. \quad (0.47)$$

Выражение для потенциала может быть упрощено:

$$U = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{-3/4}{(z - w_j)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1/4 + \det A_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{w_j}}{z - w_j} + \sum_{i=1}^k \frac{H_{z_i}}{z - z_i}, \quad (0.48)$$

в котором

$$\begin{aligned} H_{w_j} &= a_{11}(w_j) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{w_j - w_i} - \sum_i \frac{1}{w_j - z_i} \right) \\ H_{z_i} &= \left(\frac{1}{2} + a_{11}^i \right) \sum_j \frac{1}{z_i - w_j} - \sum_{j \neq i} \frac{\text{Tr}(A_i A_j) + a_{11}^i + a_{11}^j + 1/2}{z_i - z_j}. \end{aligned}$$

Теперь построим обратное отображение, а именно по оператору Штурма-Лиувилля, имеющему тривиальную монодромию в смысле уравнений Бете, строится связность ранга 2 вида (0.46) с представлением монодромии, лежащим в подгруппе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset GL(2)$ скалярных матриц ± 1 .

Приведем здесь без доказательства утверждение работы [57].

Теорема 0.14. Если набор чисел γ_i где $i = 1, \dots, M$ удовлетворяет системе уравнений Бете (0.39) с параметрами: набор полюсов $z_1, \dots, z_k$ и $w_1, \dots, w_{k-2}$ со значениями старших весов $2s_1 - 1, \dots, 2s_k - 1$ и $1, \dots, 1$ соответственно, то вектор

$$\Psi = \prod_{i=1}^k (z - z_i)^{-s_i} \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix}, \quad (0.49)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \prod_{j=1}^M (z - \gamma_j) \\ \phi_2 / \phi_1 &= \sum_{j=1}^M \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}, \end{aligned} \quad (0.50)$$

а коэффициенты α_j задаются выражениями

$$\alpha_j = \frac{\prod_i (\gamma_j - z_i)}{\prod_i (\gamma_j - w_i)}, \quad (0.51)$$

решает матричную линейную задачу (0.46), где коэффициенты связности определяются выражениями

$$a_{12}^i = \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}, \quad (0.52)$$

коэффициенты a_{11}^i и a_{21}^i определяются исходя из

$$-s_i = a_{11}^i + a_{12}^i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}, \quad (0.53)$$

$$-\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} s_i = a_{21}^i - a_{11}^i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}. \quad (0.54)$$

При этом выполняются условия нормировки (0.45).

Преобразования Шлезингера Существует дискретная группа преобразований, которые сохраняют форму связности (0.46) и, более того, не

меняют класс представления монодромии. Тем не менее, эти преобразования сдвигают характеристические экспоненты в особых точках на полуцелые значения специфическим образом. Такие преобразования называются преобразованиями Шлезингера, Гекке или Бэклунда в зависимости от контекста. Они имеют простую геометрическую интерпретацию, с описания которой начнем этот раздел.

Действие на расслоениях Рассмотрим кривую C , F - голоморфное расслоение на ней, $\mathcal{F}$ - соответствующий пучок сечений, дополнительный набор данных $x \in C$ и $l \in E_x^*$, точка двойственного пространства к слою расслоения F в точке x . Тогда „нижнее“ преобразование Гекке $T_{(x,l)}E$ определяется подпучком $\mathcal{F}' = \{s \in \mathcal{F} : (s(x), l) = 0\}$, который в свою очередь соответствует некоторому голоморфному расслоению на кривой C .

Эквивалентное определение может быть дано в терминах функций переклейки. Рассмотрим действие на голоморфных расслоениях на $\mathbb{CP}^1$. В силу теоремы Биркгофа-Гротендика [58] любое голоморфное расслоение на $\mathbb{CP}^1$ ранга n изоморфно прямой сумме линейных расслоений вида $\mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_n)$ для некоторого набора целых чисел $(k_1, \dots, k_n)$. Данный набор называется типом расслоения и определен с точностью до действия симметрической группы.

Рассмотрим открытое покрытие $\mathbb{CP}^1$ состоящее из U_∞ - диска вокруг ∞ , не содержащего $z = z_i$, $i = 1, \dots, N$ и области $U_0 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$. Будет рассматривать голоморфные расслоения ранга 2 и параметризовать их функцией переклейки $G(z)$ - голоморфно обратимой функцией в $U_0 \cap U_\infty$ со значениями в $GL(2)$. Скажем, что пара $S_\infty(z) \in \mathcal{O}^{(2)}(U_\infty)$ и $S_0(z) \in \mathcal{O}^{(2)}(U_0)$ определяют глобальное сечение если $S_0(z) = G(z)S_\infty(z)$.

Будем описывать преобразования расслоений в терминах действия на соответствующих функциях переклейки. Рассмотрим преобразование, задаваемое с помощью умножения функции переклейки слева на функцию вида

$$G_s(z) = G_s \begin{pmatrix} z - z_s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_s^{-1} \quad (0.55)$$

для некоторой постоянной матрицы G_s и некоторой точки $z_s \in U_0$.

Замечание 0.4. Действие на функциях переклейки может быть приведено к действию на классах изоморфизмов расслоений если сделать выбор постоянных матриц G_s зависящим от тривиализации следующим образом, при изменении тривиализации в U_0 by $T(z)$ необходимо заменить

матрицу G_s на $T(z_s)G_s$. Это соображение очевидно в виду данного в начале раздела инвариантного определения.

Мы будем исследовать композицию таких преобразований в двух точках.

Лемма 0.15. *Композиция двух преобразований, задаваемая выражением $G_i(z)G_j^{-1}(z)$, для общего выбора постоянных матриц G_i, G_j сохраняет тривиальное расслоение.*

Доказательство Для доказательства предъявить разложение матричнозначной функции $G(z) = G_i(z)G_j^{-1}(z)$ в виде $G(z) = G_{ij}(z)G_\infty(z)$, где $G_{ij}(z), G_\infty(z)$ обратимы соответственно в U_0, U_∞ . Наводящим соображением для доказательства является подсчет размерности пространства когомологий в семействах в общей точке. Действительно, для частного выбора $G_i^{-1}G_j = 1$ получаем тривиальное расслоение, которое полустабильно, и следовательно минимизирует размерность $H^0(\text{End}(V))$ для V степени 0. В этой связи, можно считать, что тривиальное расслоение является общим в семействе расслоений для разных G .

Не смотря на предложенный общий аргумент здесь приводится явное доказательство в духе леммы о разложении в [58]. Введем следующие обозначения

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ y_i & 1 \end{pmatrix}. \quad (0.56)$$

Разложим произведение

$$G(z) = G_i \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_i^{-1} G_j \begin{pmatrix} (z-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_j^{-1} \quad (0.57)$$

в произведение другого типа

$$G(z) = G_{ij}(z)G_\infty(z),$$

где $G_{ij}(z), G_\infty(z)$ голоморфно обратимые функции на U_0, U_∞ соответственно. Традиционные вычисления позволяют строить разложение в виде

$$G_\infty(z) = \begin{pmatrix} \frac{z(1-x_j y_i)(1-x_j y_j) - x_j(y_i - 2y_j - x_j y_i y_j)}{(1-2x_j y_i + x_j y_j)(1-x_j y_i)(1-x_j y_j)(z-1)} & -\frac{x_j}{(1-x_j y_i)(1-x_j y_j)(z-1)} \\ \frac{y_i - 2y_j + x_j y_i y_j}{(1-x_j y_i)(1-2x_j y_i + x_j y_j)} & \frac{1}{1-x_j y_i} \end{pmatrix}.$$

Действие преобразований на связностях Действие преобразований Гекке на классах расслоений может быть продолжено на множество пар: (расслоение, связность) при выполнении некоторых условий согласованности. Опишем подробнее это индуцированное действие. Связностью называется отображение пучков модулей, удовлетворяющее тождеству Лейбница, по отношению к операции умножения на функцию:

$$\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \Omega^1.$$

Преобразования Гекке могут быть определены на пространстве связностей, которые сохраняют $Ann_l = \{v \in \mathcal{F}_x : \langle l, v \rangle = 0\}$

$$\Delta_x : Ann_l \rightarrow Ann_l \otimes \Omega_x^1.$$

В нашем частном случае рассматриваются композиции пар преобразований Гекке, локализованные в полюсах связности z_i, z_j , сохраняющие тривиальное расслоение ранга 2.

Определим действие группы преобразований Шлезингера T_{ij} на пространстве связностей с особенностями в точках $z = z_i$. Как было сказано выше, действие может быть определено с помощью преобразования функций переклейки. Рассмотрим тривиальное расслоение, заданное функцией переклейки 1. Преобразование Шлезингера меняет структуру расслоения, глобальные сечения определяются парами S_0, S_∞ , такими что $S_0 = GS_\infty$, где $G = G_{ij}G_\infty$. Можно определить действие на связностях следующим образом: пусть $\partial_z - A$ связность в тривиальном расслоении, определяемая данным выражением над обоими рассматриваемыми открытыми множествами, преобразование связности определяется как пара форм связности:

$$\begin{array}{ccc} \partial_z - A & \text{над} & U_\infty, \\ G(\partial_z - A)G^{-1} & \text{над} & U_0. \end{array}$$

После замены базиса в U_∞ вида $\widetilde{S}_\infty = G_\infty S_\infty$ получим выражение для связности

$$\partial_z - A \rightarrow G_\infty(\partial_z - A)G_\infty^{-1}. \quad (0.58)$$

При замене тривиализации в U_0 следующего типа $\widetilde{S}_0 = G_{ij}^{-1}S_0$ получим

$$G(\partial_z - A)G^{-1} \rightarrow G_{ij}^{-1}G(\partial_z - A)G^{-1}G_{ij} = G_\infty(\partial_z - A)G_\infty^{-1}. \quad (0.59)$$

Таким образом, связность, полученная после преобразования может быть представлена в виде глобальной рациональной связности того же типа, как связность до преобразования. Аналитические свойства в ∞ сохраняются в виду того, что G_∞ голоморфно обратимо в U_∞ .

Используя результаты предыдущих разделов подсчитаем действие преобразований Шлезингера на связностях. Для сохранения условия нормировки $A(z)$ в ∞ необходимо рассматривать преобразования вида

$$\begin{aligned}\tilde{G}(z) &= G_\infty^{-1}(\infty)G_\infty(z) \\ &= \frac{1}{z-1} \left(z - \left(\frac{\frac{x_1(y_0-2y_1+x_1y_0y_1)}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)}}{\frac{y_0-2y_1+x_1y_0y_1}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)}} \frac{\frac{x_1(1-2x_1y_0+x_1y_1)}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)}}{\frac{1-2x_1y_0+x_1y_1}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)}} \right) \right). \quad (0.60)\end{aligned}$$

После этого достаточно применить к связности калибровочное преобразование $\tilde{G}(z)$

$$A \mapsto \tilde{G}(z)A\tilde{G}^{-1}(z) + \partial_z \tilde{G}(z)\tilde{G}^{-1}(z).$$

Полное семейство преобразований Шлезингера для случая 3 точек, связанного с анализом уравнения Пенлеве VI было вычислено в работе [59].

Замечание 0.5. *Выбор старших весов 1 в подвижных особенностях w_i является не обязательным, но в некотором смысле наиболее общим. Можно рассмотреть потенциал вида*

$$U = \sum_{j=1}^m \frac{-1/4(\eta_j + 2)\eta_j}{(z - w_j)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1/4 + \det A_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{w_j}}{z - w_j} + \sum_{i=1}^k \frac{H_{z_i}}{z - z_i} \quad (0.61)$$

с более высокими значениями старших весов. Он может быть реализован если потребовать, чтобы $a_{12}(z)$ имел нули w_j с кратностями η_j удовлетворяющими условию $\sum_{j=1}^m \eta_j = k - 2$.

Локальные рассмотрения в окрестностях полюсов показывают, что собственные значения вычетов A_i преобразуются по следующим 4-правилам в зависимости от выбора верхнего или нижнего преобразования Гекке и выбора разных собственных направлений вычета:

$$\begin{aligned}(\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\longmapsto (\dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_j - 1, \dots), \\ (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\longmapsto (\dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots), \\ (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\longmapsto (\dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j - 1, \dots), \\ (\dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots) &\longmapsto (\dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots).\end{aligned}$$

Полученный результат позволяет рассматривать рекурсионные соотношения на пространстве решений уравнений Бете для семейства систем Года. Наиболее интересным, с точки зрения получения явных формул для решения квантовой системы, является построение набора преобразований, понижающих старшие веса в паре точек. Последовательным применением таких преобразований можно понизить старшие веса до нулевого значения, которое соответствует тривиальному представлению квантовой алгебры, и, соответственно, тривиальной задаче диагонализации квантовых гамильтонианов.

Лекция 8. Приложения

Центр $U(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ на критическом уровне Опишем сначала конструкцию центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Прокомментируем обозначение $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, которое соответствует локальному пополнению $U(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)/\{C - crit\}$, где C -центральный элемент, а $crit = -h^\vee = -n$ критическое значение, обратное дуальному числу Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. В работе [63] было доказано, что $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ имеет центр, изоморфный как линейное пространство алгебре полиномов от подалгебры Картана. Не смотря на наличие геометрического описания центра, отсутствовала явная конструкция семейства генераторов этой коммутативной подалгебры. Для решения этой задачи в настоящей работе используется схема Адлера-Костанта-Сима, предложенная в [62]. Она занимает важное место в теории интегрируемых систем: может использоваться для построения широкого класса коммутативных подалгебр, позволяет связывать интегрируемые системы с задачами разложения, а также предоставляет алгебраическую интерпретацию для представления Лакса, r -матричных Пуассоновых структур. Схема АКС допускает непосредственное обобщение на квантовый уровень и играет важную роль в описании, решении и классификации квантовых интегрируемых систем. Наиболее простым является случай, в котором $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ конечномерная алгебра Ли, допускающая разложение в прямую сумму двух подалгебр Ли. Каждому нормальному упорядочению, то есть выбору порядка сомножителей из разных подалгебр в мономах, составляющих линейный базис универсальной обертывающей алгебры, соответствует изоморфизм линейных пространств

$$\phi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_-)$$

Введем обозначения $\mathfrak{g}_-^{op}$ для обратной структуры алгебры Ли на пространстве $\mathfrak{g}_-$ определяемой формулой $-\{\circ, \circ\}$. Будем обозначать алгебру Ли $\mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-^{op}$ символом $\mathfrak{g}_r$. Соответствующие универсальные обертывающие алгебры могут быть отождествлены как линейные пространства при рассмотрение некоторого базиса Пуанкаре-Биркгофа-Вита:

$$U(\mathfrak{g}_-^{op}) \simeq U(\mathfrak{g}_-).$$

Лемма 0.16. *Центр $\mathfrak{z}(U(\mathfrak{g}))$ отображается в коммутативную алгебру в $U(\mathfrak{g}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_-^{op})$ посредством отображения ϕ .*

Доказательство Обозначим коммутатор в $U(\mathfrak{g}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_-^{op})$ следующим образом $[\ast, \ast]_R$. Пусть c_1, c_2 два центральных элемента в $U(\mathfrak{g})$ представленных в форме

$$c_i = \sum_j x_j^{(i)} y_j^{(i)} \quad x_j^{(i)} \in U(\mathfrak{g}_+), y_j^{(i)} \in U(\mathfrak{g}_-).$$

Подсчитаем коммутатор в модифицированной алгебре

$$\begin{aligned} [\phi(c_1), \phi(c_2)]_R &= \left[\sum_j x_j^{(1)} y_j^{(1)}, \sum_k x_k^{(2)} y_k^{(2)} \right]_R \\ &= \sum_{j,k} [x_j^{(1)}, x_k^{(2)}]_R y_j^{(1)} y_k^{(2)} + x_j^{(1)} x_k^{(2)} [y_j^{(1)}, y_k^{(2)}]_R. \end{aligned}$$

В силу данного выше определения алгебраической структуры

$$[x_j^{(1)}, x_k^{(2)}]_R = [x_j^{(1)}, x_k^{(2)}] \quad [y_j^{(1)}, y_k^{(2)}]_R = -[y_j^{(1)}, y_k^{(2)}]$$

$$[\phi(c_1), \phi(c_2)]_R = \sum_k [c_1, x_k^{(2)}] y_k^{(2)} - \sum_j x_j^{(1)} [y_j^{(1)}, c_2]$$

Последнее выражение обращается в ноль в силу центральности элементов c_1, c_2 $\square$

Замечание 0.6. *В дальнейшем нас будет интересовать применение этой схемы в случае $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, то есть универсальной обертывающей алгебры аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ на критическом уровне. Для того,*

чтобы использовать результат схемы АКС в бесконечномерном случае необходимо выбрать подходящее пополнение алгебры. В нашем случае может быть выбрано пополнение, соответствующее биградуировке $\deg(gt^k) = (k, 0)$, $\deg(gt^{-k}) = (0, k)$ для $k \geq 0$. Требуется показать, что рассматриваемые центральные элементы являются элементами данного пополнения $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Это действительно так в силу рассмотрения классического предела. В дальнейшем мы будем опускать упоминание о пополнении в обозначениях $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$, $U(\mathfrak{g}_r)$, а также их тензорных произведений.

Рассматривают также отображение линейных пространств

$$\varsigma : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_+) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_-$$

определяемое выбранным разложением в прямую сумму подалгебр. Обозначим φ проектор на первое слагаемое $U(\mathfrak{g}_+)$.

Лемма 0.17. *Центр $\mathfrak{z}(U(\mathfrak{g}))$ отображается в коммутативную алгебру в $U(\mathfrak{g}_+)$ при отображении φ .*

Доказательство Пусть $c_1, c_2 \in Z$.

$$[c_1 - \varphi(c_1), c_2 - \varphi(c_2)] = [\varphi(c_1), \varphi(c_2)]$$

Правая часть выражения лежит в $U(\mathfrak{g}_+)$; левая часть в $U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_-$; из чего следует, что обе они равны нулю $\square$

Мы будем отождествлять $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ с алгеброй петель как линейные пространства. Приведем несколько важных фактов относительно алгебр петель.

Утверждение 0.18. *Рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n[t, t^{-1}] = \mathfrak{gl}_n[t^{-1}] \oplus t\mathfrak{gl}_n[t]$ генераторы которой $e_{ij}^{(k)} = e_{ij}t^k$ могут быть представлены производящей функцией*

$$L_{full}(z) = \sum_{s=-\infty, \infty} \Phi_s z^{-s-1} \quad (0.62)$$

где

$$\Phi_s = \sum_{ij} E_{ij} \otimes e_{ij}^{(s)}.$$

Здесь, как и ранее, e_{ij} обозначают генераторы алгебры $\mathfrak{gl}_n$, а E_{ij} - матричные единицы в пространстве матриц Mat_n . Тогда структура алгебры

Ли $\mathfrak{g}_r$ может быть описана следующими коммутационными соотношениями в терминах производящих функций

$$\{L_{full}(z) \otimes L_{full}(u)\} = [\frac{P}{z-u}, L_{full}(z) \otimes 1 + 1 \otimes L_{full}(u)]. \quad (0.63)$$

Заметим, что коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями для оператора Лакса системы Годена (??).

Центр $(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n))$ и коммутативная алгебра в $U(\mathfrak{tgl}_n[t])$ Введем также „положительный“ оператор Лакса:

$$L(z) = \sum_{k>0} \Phi_k z^{-k-1},$$

который также удовлетворяет соотношениям R -матричного типа:

$$\{L(z) \otimes L(u)\} = [\frac{P}{z-u}, L(z) \otimes 1 + 1 \otimes L(u)]. \quad (0.64)$$

Теорема 0.19. Коммутативная подалгебра в $U(\mathfrak{tgl}_n[t])$, определенная коэффициентами квантового характеристического полинома $\det(L(z) - \partial_z)$, совпадает с подалгеброй, полученной из $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n))$ с помощью проекции $\varphi : U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n) \rightarrow U(\mathfrak{tgl}_n[t])$.

Доказательство Доказательство опирается на результат работы [64], где было доказано, что централизатор квадратичных Гамильтонианов Годена H_2^i в $U(\mathfrak{tgl}_n[t])$ совпадает с коммутативной подалгеброй полученной из центра $U(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ на критическом уровне.

Замечание 0.7. Данное специальное свойство, а именно тот факт, что квадратичные генераторы определяют всю коммутативную подалгебру, известно также в теории подалгебр Мищенко-Фоменко [65], [66], а также в теории системы Калоджеро-Мозера [67].

Следуя предложенной логике, и используя факт, что подалгебра, определенная $\det(L(z) - \partial_z)$ коммутирует с H_2^i , можно показать, что данная подалгебра является подалгеброй коммутативной алгебры, полученной из центра. Для доказательства их совпадения достаточно рассмотреть классический предел $\square$

Замечание 0.8. Аналогичное доказательство применимо в случае проекции на $U(\mathfrak{gl}_n[t])$. Необходимо принять в расчет, что обе подалгебры инвариантны относительно действия $GL(n)$.

Явное описание центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$

Теорема 0.20. *Центр $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ изоморфен как коммутативная подалгебра подалгебре в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}] \oplus t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])$ определенной коэффициентами квантового характеристического полинома $\det(L_{full}(z) - \partial_z)$. Изоморфизм индуцирован отображением*

$$I : U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t]) \rightarrow U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}), \quad I : h_1 \otimes h_2 \rightarrow h_1 h_2 \quad (0.65)$$

Доказательство строится по стратегии, аналогичной использованной в [64]. Докажем сначала, что подалгебра, порожденная коэффициентами квантового характеристического полинома оператора Лакса $L_{full}(z)$ совпадает с централизатором своих квадратичных элементов. Далее, используя формулу Шугавары для квадратичных генераторов центра, докажем, что их образ в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ совпадает с квадратичными коэффициентами квантового характеристического полинома. Для доказательства первого утверждения используется специальный предел коммутативного семейства.

Используя коммутационные соотношения 0.63, 0.64 и традиционные r -матричные вычисления получим, что выражения $Tr L_{full}^m(z)$ центральны в симметрической алгебре $S(\mathfrak{gl}_n[t, t^{-1}])$ и, кроме того, $Tr L_{full}^m(z)$ порождают коммутативную Пуассонову подалгебру в $S(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}] \oplus t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])$.

Рассмотрим семейство автоморфизмов алгебры $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])$ определяемое в терминах оператора Лакса следующим образом: пусть K диагональная $n \times n$ матрица общего положения, оператор Лакса вида

$$L_{full}^h(z) = L_{full}(z) + \hbar K$$

также удовлетворяет r -матричным соотношениям (0.63). Данное семейство автоморфизмов алгебры параметризуется $\hbar$.

Рассмотрим семейство коммутативных подалгебр

$$M^h \subset U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])$$

определяемое производящей функцией $\det(L_{full}^h(z) - \partial_z)$. M^h централизует семейство квадратичных генераторов $QI_2(L_{full}^h(z))$. $QI_k(z, \hbar)$ имеет следующий скалярный лидирующий член в разложении по $\hbar$

$$QI_k(z, \hbar) = \hbar^k Tr A_n K_1 K_2 \dots K_k + O(\hbar^{k-1}).$$

Выполним следующую замену в базисе коммутативной подалгебры

$$QI_k(z, \hbar) \mapsto \widetilde{QI_k}(z, \hbar) = (QI_k(z, \hbar) - \hbar^k \text{Tr} A_n K_1 K_2 \dots K_k) \hbar^{-k+1}$$

и рассмотрим предел $\hbar \rightarrow \infty$

$$\widetilde{QI_k}(z, \hbar) \rightarrow \text{Tr}(L_{full}(z) K^{k-1})$$

В данном пределе рассматриваемые выражения порождают подалгебру Картана

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_- \otimes \mathfrak{H}_+ = U(\mathfrak{h}[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{h}[t]).$$

Продemonстрируем, что эта подалгебра совпадает с централизатором квадратичных генераторов

$$H_2^\infty(z) = \lim_{\hbar \rightarrow \infty} \widetilde{QI_2}(z, \hbar) = \sum_{i=-\infty, \infty} \text{Tr}(\Phi_i K) z^{-i-1}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{H} \subset Z(H_2^\infty(z))$. Введем обозначения $(k_1, \dots, k_n)$ для диагональных элементов матрицы K . Обозначим $h_i \in \mathfrak{H}$ сумму вида

$$h_i = \sum_{s=1}^n (\Phi_i)_{ss} k_s,$$

тогда $H_2^\infty(z) = \sum_{i=-\infty, \infty} h_i z^{-i-1}$. Заметим, что элементы централизатора должны коммутировать с h_1 и h_{-1} . Рассмотрим бесконечный ряд $\sum_{i=-\infty}^\infty x_i y_i$ такой что $x_i \in U(\mathfrak{g}[t^{-1}])$, $y_i \in U(t\mathfrak{g}[t])$. Предполагается также, что этот ряд является элементом рассматриваемого пополнения, то есть такой, что имеется только конечное количество элементов каждой биградуировки. Операторы $[h_1, *]$ и $[h_{-1}, *]$ являются однородными операторами биградуировок $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Таким образом, вопрос о централизаторе сводится к аналогичному вопросу в полиномиальной алгебре. Ответ дается следующими формулами

$$Z(h_1) = U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes \mathfrak{H}_+, \quad Z(h_{-1}) = \mathfrak{H}_- \otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t]).$$

Пересечение данных подпространств в пополненном смысле совпадает с подалгеброй Картана $\mathfrak{H}$.

Суммируем вышесказанное: в точке общего положения $\hbar$ семейства деформаций коммутативная подалгебра $M^\hbar$ содержится в централизаторе

семейства QI_2 и в пределе $\hbar \rightarrow \infty$ порождает централизатор. Из соображений, аналогичных используемым в [64] в общей точке должно также выполняться равенство, а именно в общей точке $M^{\hbar}$ совпадает с централизатором квадратичных генераторов. Для окончания доказательства напомним формулу Шугавары квадратичных генераторов $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$

$$c_2(z) =: Tr(L_{full}^2(z)) :$$

В этой формуле используется символ нормального упорядочения $::$ для токов $\mathfrak{sl}_2$. Эти элементы проектируются в $QI_2(z)$ с точностью до центрального элемента в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ ■

Схема Бейлинсона-Дринфельда В работе [68] была предложена универсальная конструкция квантования систем типа Хитчина. Пусть Σ связная гладкая проективная кривая над $\mathbb{C}$ рода $g > 1$, G - полупростая группа Ли, $\mathfrak{g}$ соответствующая алгебра Ли, Bun_G - стек модулей главных G -расслоений на Σ . Определим также двойственную по Ленглендсу группу ${}^L G$ как группу, определенную двойственными корневыми данными, а именно, такую, для которой решетка весов совпадает с двойственной решеткой весов G .

Основной результат работы [68] сводится к следующему:

- Существует коммутативное кольцо дифференциальных операторов $\mathfrak{z}(\Sigma, G)$, действующих в сечениях канонического расслоения K_{Bun_G} . При этом отображение символа, примененное к данному коммутативному кольцу порождает коммутативную подалгебру классических Гамильтонианов Хитчина на T^*Bun_G .
- Спектр кольца $\mathfrak{z}(\Sigma, G)$ канонически изоморфен пространству модулей ${}^L \mathfrak{g}$ -опер (для случая $G = SL_2$ ${}^L \mathfrak{g}$ -опер совпадает с оператором Штурма-Лиувилля на Σ ; в общем случае опером называется плоская связность в главном ${}^L G$ расслоении с параболической структурой).
- Каждому ${}^L \mathfrak{g}$ -оперу может быть сопоставлен D -модуль на Bun_G получаемый при фиксировании собственных значений гамильтонианов Хитчина. Этот D -модуль является собственным пучком для действия преобразований Гекке, естественно определенных на пространстве модулей расслоений. При этом собственным значением действия является соответствующий ${}^L \mathfrak{g}$ -опер.

В основе конструкции такой алгебры лежит естественное действие центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{g}})$ на группе петель соответствующей группы Ли. Это действие ограничивается до дифференциальных операторов на $Bun_G(\Sigma)$ в силу одной из реализаций стека модулей главных расслоений:

$$Bun_G(\Sigma) \simeq G(F) \backslash G(\mathcal{A}_F) / G(\mathcal{O}_F) \simeq G_{in} \backslash G[[z, z^{-1}]] / G_{out}$$

здесь G_{in} и G_{out} обозначают подгруппы сходящихся функций в U_{in} и U_{out} , здесь U_{in} и U_{out} определяют покрытие кривой Σ следующего типа: U_{in} - некоторая окрестность точки P с локальным параметром z , $U_{out} = \Sigma \setminus P$. Средняя часть равенства представляет собой так называемую адельную реализацию стека модулей главных G -расслоений для алгебраической группы G . В конструкции фигурируют группа аделей $G(\mathcal{A}_F)$ поля F рациональных функций на Σ , группа целых аделей $G(\mathcal{O}_F)$ и группа главных аделей $G(F)$. Данная реализация удобна для установления аналогии рассматриваемого сюжета квантовой системы Годена и арифметического соответствия Ленглендса.

Соответствие Ленглендса Исторически, гипотеза Ленглендса обобщает результаты теории полей-классов [69, 70], одним из основных результатов которой можно считать следующее утверждение в случае числового поля. А именно, пусть F - числовое поле (то есть конечное расширение $\mathbb{Q}$), $\bar{F}$ - его максимальное алгебраическое расширение, F^{ab} - максимальное абелево расширение. Группой Галуа расширения $F \subset F'$ называется

$$Gal(F', F) = \{ \sigma \in Aut(F') : \sigma(x) = x \ \forall x \in F \}.$$

Абелев закон взаимности

Существует изоморфизм групп

$$Gal(F^{ab}, F) \simeq \text{Группа связных компонент } F^\times \backslash \mathcal{A}_F^\times$$

где $\mathcal{A}_F^\times$ - группа идеалов кольца F , $F^\times$ - группа единиц кольца F . При этом рассматривается топология произведения пополнений.

Непосредственно гипотеза Ленглендса формулируется как n -мерное (не коммутативное) обобщение абелева закона взаимности. А именно предполагается, что существует изоморфизм категорий представлений группы Галуа максимального алгебраического расширения кольца и категории автоморфных представлений соответствующей группы идеалов. Под автоморф-

ными представлениями понимаются представления $GL_n(\mathcal{A}_F)$ реализованные на пространстве функций на

$$GL_n(F) \backslash GL_n(\mathcal{A}_F),$$

удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям [71, 72]. Правую часть соответствия традиционно называют автоморфной стороной по следующей причине. Для $n = 2$ такие представления связаны с теорией модулярных функций. Напомним, что модулярные функции определяются как функции на верхней полуплоскости Зигеля, удовлетворяющие условию

$$f((az + b)/(cz + d)) = \chi(a)(cz + d)^k f(z) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

В частности, пространство модулярных функций может быть представлено как пространство функций на следующем факторпространстве

$$SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z}) \simeq K \backslash GL_2(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}})/GL_2(\mathbb{Q})$$

В программе Ленгленса рассматриваются следующие типы полей F :

- Числовое поле.
- Поле функций на алгебраической кривой над конечным полем F_q (В этом случае гипотеза была доказана в работах [73]).
- Поле функций на алгебраической кривой над полем $\mathbb{C}$. Данный случай называется геометрическим случаем над $\mathbb{C}$. Ему посвящены следующие работы [74].

Формулировка соответствия над $\mathbb{C}$:

В данном случае на стороне Галуа рассматриваются представления фундаментальной группы, или классы плоских связностей в расслоении ранга n . На автоморфной стороне рассматривается D -модуль Хитчина на пространстве

$$GL(F) \backslash GL(\mathcal{A}_F)/GL(\mathcal{O}_F) \simeq Bun_n(\Sigma).$$

Из результатов [68] и [63] следует наличие соответствия между D -модулями Хитчина и плоскими связностями, задаваемыми ${}^L\mathfrak{g}$ -операми. Благодаря конструкции квантового характеристического полинома для алгебры петель, а также явной конструкции центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ в теореме 0.20 данное

соответствие для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ удалось сделать более явным. На схеме представлена конструкция этого соответствия

$$D\text{-модуль Хитчина} \overset{FF}{\rightleftarrows} \overset{BD}{\rightleftarrows} \text{Характер } \chi \text{ на } \mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)) \overset{CT}{\rightleftarrows} \chi \det(L_{full} - \partial_z).$$

Замечание 0.9. Построение характера на $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n))$ по D -модулю Хитчина является следствием теоремы Фейгина и Френкеля о существовании центра, а также конструкции Бейлинсона и Дринфельда квантования системы Хитчина. Для получения эффективного описания соответствующей плоской связности [28] необходимо использовать отождествление коммутативных подалгебр, с одной стороны, коммутативной подалгебры в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n[t])$, определенной коэффициентами квантового характеристического полинома, а с другой - образом центра $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{g}}))$ при отображении АКС.

Список литературы

- [1] Shiota T., *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., **83**(2):333–382, 1986.
- [2] Krichever I., *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, in: Algebraic Geometry and Number Theory, Birkhäuser, Boston, 2006.
Krichever I., *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer Variety*, arXiv:math/0605625.
- [3] Атья М., *Геометрия и физика узлов*. М. Мир 1995.
- [4] Donaldson S., *An application of gauge theory to four- dimensional topology*, J. Differential Geometry **18** A983, 279-315.
- [5] Kronheimer P.B., Mrowka T.S., *The genus of embedded surfaces in the protective plane*, Math. Research Letters **1** A994, 797-808.
- [6] Nakayashiki, A., *Structure of Baker-Akhiezer modules of principally polarized abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems*, Duke Math. J.62-2 (1991) 315 –358,
Nakayashiki, A., *On the cohomologies of theta divisors of hyperelliptic Jacobians*, Contemporary Math. **309** (2002), 177-183.

- Nakayashiki, A. and Smirnov, F., *Cohomologies of affine hyperelliptic Jacobi varieties and integrable systems*, Comm. Math. Phys. **217** (2001), 623-652.
- Nakayashiki, A. and Smirnov, F., *Euler characteristics of theta divisors of Jacobians for spectral curves*, CRM Proc. and Lect. Notes **32**, Vadim B. Kuznetsov, ed. (2002), 239-246.
- [7] Thaddeus M. *Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles*, J. Differential Geom. 1992. V. **35**, № 1. P. 131-149.
- [8] Барановский В.Ю., *Кольцо когомологий пространства модулей стабильных расслоений с нечетным детерминантом*, Изв. РАН. Сер. матем., 1994, том **58**, выпуск 4, страницы 204–210.
- [9] Feigin B., Finkelberg M., Negut A., Rybnikov L., *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, arXiv:0812.4656.
Feigin B., Finkelberg M., Frenkel I., Rybnikov L., *Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces*, arXiv:0806.0072.
- [10] Клейн Ф., *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований („Эрлангенская программа“)*, 1872.
- [11] Gaudin M., *La Fonction d' Onde de Bethe*, Masson, Paris (1983).
- [12] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Вриза, конечнозонные линейные операторы и Абелевы многообразия*. УМН, **31**, 1, 56-136 (1976).
Кричевер И.М., *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, УМН 1977 **32** №4 180-208.
- [13] Kowalevski S., *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*. Acta Mathematica **12** (1889), 177-23.
- [14] Якоби К., *Лекции по динамике*. Москва 1936.
- [15] Веселов А.П., Новиков С.П., *О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой КдФ на множестве конечнозонных потенциалов*.— Докл. АН СССР, 1982, **266**, № 3.
- [16] Hitchin N., *Stable bundles and integrable systems*. Duke Math. Journal 1987 V **54** N1 91-114.

- [17] Кричевер И.М. *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой* Функц. анализ и его прил., 1978, **12**, 1, стр. 76–78
- [18] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys.Rev.Lett. 1967. V. **19**. P. 1095-1097.
- [19] Lax P., *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. **21**. № 5. P. 467-490.
- [20] Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П., *Интегрируемые системы, I. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том 4*.
- [21] Переломов А.М. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, М. Наука, 1990.
- [22] Демидов Е.Е., *Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шоттки*, Фундаментальная и прикладная математика 1998, т. **4**, выпуск 1, стр. 367-460.
- [23] Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д. *Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля ДАН СССР.—1978.— Т. **243**, № 6—С. 1430—1433.*
 Склянин Е.К. *Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера ДАН СССР.—1978.—Т. **244**, № 6.—С. 1337— 1341.*
 Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л. Д. *Квантовый метод обратной задачи. Теор. и мат. физика.—1979.— Т. **40**, №2.— С. 194—220.*
 Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга, УМН.—1979.—Т. **34**, № 5.—С. 13—63.*
 Kulish P.P., Sklyanin E.K. *Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet. Phys. Lett.— 1979.— V. **70** A, № 5—9.—P. 461—463.*
- [24] Bethe H., *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. (On the theory of metals. I. Eigenvalues and eigenfunctions of the linear atom chain)*, Zeitschrift fur Physik A, Vol. **71**, pp. 205-226 (1931).

- [25] Дринфельд В.Г., *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга—Бакстера* ДАН СССР. 1985. Т.**283**, №5.
- [26] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M., *From Gauss to Painleve*, A modern theory of special functions, 1991.
- [27] Chervov A., Falqui G., Rybnikov L., *Limits of Gaudin Systems: Classical and Quantum Cases*, arXiv:0903.1604v1 [math.QA].
- [28] Chervov A., Talalaev D., *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*. hep-th/0604128.
- [29] Талалаев Д., Червов А., *Уравнение КЗ, G-оперы, квантовая редукция Дринфельда-Соколова и квантовое тождество Гамильтона-Кэли*, Записки Научных семинаров ПОМИ, Выпуск 360, «Теория представлений, Динамические системы, Комбинаторные методы. Часть 16», стр. 246-260.
- [30] Babelon O., Bernard D., Talon M., *Introduction to classical integrable systems*, Cambridge University Press 2003.
- [31] Рейман А.Г., Семёнов-Тян-Шанский М.А., *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*. Современная математика. Ижевск 2003.
- [32] Ramanan S., *The moduli space of vector bundles over an algebraic curve*, Math. Ann. **200** (1973) 69-84.
- [33] Kodaira K., *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures* 1986 by Springer-Verlag.
- [34] Nekrasov N., *Holomorphic bundles and many-body systems*. PUPT-1534, Comm. Math. Phys.,**180** (1996) 587-604; hep-th/9503157.
- [35] Талалаев Д., Червов А., *Система Хитчина на особых кривых*, Теоретическая и Математическая Физика (ТМФ), 2004, 140:2, 179–215.
Chervov A., Talalaev D., *Hitchin systems on singular curves II. Gluing subschemes*, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.4:751-787,2007.
- [36] Krichever I., Babelon O., Billey E., Talon M., *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the Matrix KP equation*, arXiv:hep-th/9411160.

- [37] Кассель К., *Квантовые группы*, (Библиотека математика, вып. 5) М. 1999.
- [38] Krichever I., Phong D., *Symplectic forms in the theory of solitons*, hep-th/9708170.
D'Hoker E., Krichever I., Phong D., *Seiberg-Witten Theory, Symplectic Forms, and Hamiltonian Theory of Solitons*, hep-th/0212313.
- [39] Sklyanin E., *Separation of variables in the Gaudin model*. J.Sov.Math. **47**: 2473-2488, 1989, Zap.Nauchn.Semin. **164**: 151-169, 1987.
- [40] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures*, Ann. Physics **111** (1978), 61–110.
Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., *Deformation theory and quantization. II. Physical applications*, Ann. Physics **111** (1978), 111–151.
- [41] Gutt S., *An explicit $\ast$ -product on the cotangent bundle of a Lie group*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 249–258.
- [42] Kontsevich M., *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157–216.
- [43] Fedosov B.V., *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Differential Geom. **40** (1994), 213–238.
Fedosov B.V., *Deformation quantization and index theory*, Mathematical Topics, Vol. **9**, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [44] Талалаев Д., *Квантовая система Годена*, Функциональный Анализ и его приложения **40** No. 1 pp.86-91 (2006).
- [45] Sklyanin E., *Separations of variables: new trends*. Progr. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35–60. solv-int/9504001.
- [46] Kulish P., Sklyanin E., *Quantum spectral transform method. Recent developments*, Lect. Notes in Phys. **151** (1982), pp. 61-119.
- [47] Kirillov A., Reshetikhin N., *The Yangians, Bethe Ansatz and combinatorics*, Lett. Math. Phys. **12**, 3 (1986), pp. 199-208.

- [48] Molev A.I., *Yangians and their applications*. math.QA/0211288.
- [49] Боголюбов Н., Изергин А., Корепин В., *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи* 1992.
- [50] Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A., *Schubert calculus and representations of general linear group* arXiv:0711.4072.
- [51] Rubtsov V., Silantiev A., Talalaev D., *Manin Matrices, Quantum Elliptic Commutative Families and Characteristic Polynomial of Elliptic Gaudin model*, SIGMA **5** (2009), 110-131.
- [52] Felder G., *Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves*. Proc. ICM Zürich 1994, 1247-55, Birkhäuser (1994); Elliptic quantum groups, Proc. ICMP Paris 1994, 211-8, International Press (1995).
- [53] Tarasov V., Varchenko A., *Small Elliptic Quantum Group $e_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_N)$* , Mosc. Math. J., **1**, no. 2, (2001), 243–286, 303–304.
- [54] Enriquez B., Feigin B., Rubtsov , *Separation of variables for Gaudin-Calogero systems*, Compositio Math. **110**, no. 1, (1998), 1–16.
- [55] Felder G., Schorr A., *Separation of variables for quantum integrable systems on elliptic curves*, math.QA/9905072, J. Phys., **A 32**, (1999), no. 46, 8001–8022.
- [56] Gould M. D., Zhang Y.-Z., Zhao S.-Y., *Elliptic Gaudin models and elliptic KZ Equations* nlin/0110038.
- [57] Талалаев Д., *Анзац Бете и изомонодромные преобразования*, Теоретическая и математическая физика, ТМФ, 2009, том 159, номер 2, стр. 252–265.
- [58] Болибрух А.А., *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*. - М: МЦНМО, 2000
- [59] Muğan U., Sakka A., *Schlesinger transformations for the Painlevé VI equation*, J. Math. Phys. **36** (3) 1995.
- [60] Griffiths Ph., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, 1994, ISBN 0-471-05059-8.

- [61] Schorr A., *Separation of variables for the 8-vertex SOS model with antiperiodic boundary conditions*, PhD Thesis, ETH, Zurich, 2000.
- [62] Adler M., *On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for the KdV type equations*, Invent. Math. (1979) **50**, 219-248.

Kostant B., *Quantization and Representation Theory*, in: Representation Theory of Lie Groups, Proc. SRC/LMS Res. Symp., Oxford 1977. London Math. Soc. Lecture Notes Series, **34**, 287-316, 1979.

Symes W.W., *Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory*. Invent. Math. **59**, 13-51 (1980).
- [63] B. Feigin, E. Frenkel, Int. J. Mod. Phys. A7, Suppl. 1A 1992, 197-215.
- [64] Rybnikov L., *Uniqueness of higher Gaudin hamiltonians*, archiv:math/0608588.
- [65] Tarasov A.A., *Uniqueness of the lifting of maximal commutative subalgebras of the Poisson-Lie algebra to the enveloping algebra*. Sb. Math. **194**, No.7, 1105-1111 (2003); translation from Mat. Sb. **194**, No.7, 155-160 (2003).
- [66] Rybnikov L., *Centralizers of some quadratic elements in Poisson-Lie algebras and a method for the translation of invariants*. Russ. Math. Surv. **60**, No.2, 367-369 (2005); translation from Usp. Mat. Nauk **60**, No.2, 173-174 (2005) math.QA/0608586.
- [67] Ochiai, H., Oshima, T., and Sekiguchi, H. *Commuting families of symmetric differential operators*, Proc. of the Japan Acad. **70**, Ser. A **2** 1994 62–68.
- [68] Beilinson A., Drinfeld V., *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*. Preprint 1991.
- [69] Серр, Ж., *Алгебраические группы и поля классов*. Мир, 1968.
- [70] Ивасава К., *Локальная теория полей классов* Мир, 1983.
- [71] Frenkel E., *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory*, hep-th/0512172.

- [72] Vergne M., *All what I wanted to know about the Langlands program and was afraid to ask*, math.GR/0607479.
- [73] Lafforgue L., *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Inv. Math. **147** 1-241 (2002).
- [74] Hausel T., Thaddeus , *Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system*, Invent. Math. **153** (2003) 197-229.
 Frenkel E., Gaitsgory D., Vilonen K., *On the geometric Langlands conjecture*, Journal of AMS **15** (2001) 367–417.
 Frenkel E., Gaitsgory D., *Local geometric Langlands correspondence and affine Kac-Moody algebras*, math.RT/0508382
 Bezrukavnikov R., Braverman A., *Geometric Langlands correspondence for D -modules in prime characteristic: the $GL(n)$ case*, math.AG/0602255.
- [75] Talalaev D., Chervov A., *Universal G -oper and Gaudin eigenproblem* hep-th/0409007.
- [76] Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B., Nucl.Phys.B **247**, (1984) 83-103.
- [77] Диксмье Ж., *Универсальные обертывающие алгебры*, М. Мир 1978.
- [78] Bracken A.J., Green H.S., J. Math. Phys. **12**, (1971) 2099-2106.
 Gould M.D., J. Austral. Math. Soc. B. **26**, (1985) 257–283.
 Macfarlane A.J., Pfeiffer H., preprint math-ph/9907024.
 Isaev A.P., Ogievetsky O.V., Pyatov P.N., preprint math.QA/9912197.
 Gurevich D.I., Pyatov P.N., Saponov P.A., preprint math.QA/0412192.
 Ogievetsky O., Pyatov P., preprint math.QA/0511618.
- [79] Molev A.I., preprint math.QA/0211288.
- [80] Kirillov A.A., Moscow Math. Journal, **1**, No 1, (2000) 49-63.
- [81] Gelfand I., Krob D., Lascoux A., Leclerc B., Retakh V.S., Thibon J.-Y., preprint hep-th/9407124.
- [82] Frenkel E., *Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz*, q-alg/9506003.