

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
им. А. Ю. ИШЛИНСКОГО

на правах рукописи

Гавриков Александр Александрович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АКУСТИКИ
ЭМУЛЬСИЙ

Специальность 01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Оглавление

Обозначения	4
Введение	5
0.1. История вопроса	5
0.2. Метод двухмасштабной сходимости	8
0.3. Классификация эффективных моделей	10
0.4. Спектральные вопросы динамики комбинированных сред	14
0.5. Основные результаты работы	16
1 Сходимость решений	33
1.1. Общие замечания о постановке задачи	33
1.2. Постановка задачи	34
1.3. Существование и единственность решения	35
1.4. Слабая двухмасштабная сходимость	37
1.5. Задача на ячейке, динамический закон Дарси	38
1.6. Сильная двухмасштабная сходимость $\hat{\mathbf{u}}, \varepsilon \nabla_x \hat{\mathbf{u}}$	41
2 Спектральные вопросы	44
2.1. Основные уравнения	44
2.2. Основные типы спектральных структур	46
2.3. Анализ акустического уравнения	52
2.4. Исследование уравнения на точки спектра	54
2.5. Вывод формул для численного анализа макроскопическо- го акустического уравнения	55
2.6. Численное нахождение спектра акустического уравнения. Результаты расчетов	56
3 Численное решение вспомогательной задачи на ячейке периодичности.	67
3.1. Постановка задачи.	67

	3
3.2. Вывод разностных формул.	68
3.2.1. Приближение уравнений движения.	68
3.3. Методы решения системы линейных уравнений.	79
3.4. Результаты численного решения вспомогательной задачи на ячейке периодичности	82
Литература	90

Обозначения

Введение

В настоящей работе исследуются малые колебания смеси (эмульсии) двух слабовязких сжимаемых жидкостей, строится макроскопическая (усредненная) модель эмульсии, доказывается сходимостью по малому параметру ε решений исходной краевой задачи для двухфазной жидкости к решениям соответствующей усредненной краевой задачи. Здесь ε — характерный размер включений одной фазы в другую, величина ε^2 определяет малость вязкостей рассматриваемых жидкостей.

Также в работе проводится качественный анализ спектра получаемого макроскопического акустического уравнения (динамического закона Дарси), с помощью численного эксперимента находятся характерные картины спектров.

В последней главе строится алгоритм численного решения вспомогательной задачи (локальной) на ячейке периодичности (типа динамической задачи для системы Стокса), по которой находятся характеристики макроскопической модели. Поведение последних задает качественный вид спектра макроскопического уравнения.

0.1. История вопроса

Целый ряд факторов, таких как потребности в новых материалах, проблемы геологической разведки, проблемы акустики морского дна и многие другие обуславливают интерес исследователей к разработке моделей, описывающих физические процессы в неоднородных средах, составленных из фаз с различными реологическими свойствами. Этой теме посвящено большое количество работ российских и зарубежных авторов (см. [37] - [36]).

Тема распространения акустических волн в комбинированной среде, состоящей из упругого материала и вязкой жидкости, находит свое отражение в работах физиков, математиков и механиков в течение по-

следних 60-ти лет. Уже в 1944г. в работе [38] были получены уравнения

$$(1) \quad \tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha M \operatorname{div} \mathbf{w}),$$

$$(2) \quad p = -\alpha M \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{div} \mathbf{w},$$

для усредненных значений тензора напряжений и давления в грунте, насыщенном жидкостью. В качестве модели для описания структуры грунта (или породы) был взят каркас из упругого материала с каналами вязкой жидкости. Характерные свойства упругого материала и жидкости задаются постоянными μ , λ , α , M , а вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ моделируют среднее смещение упругого материала («каркаса») и среднее смещение жидкости по отношению к «каркасу», соответственно. Автор считает элементы неоднородности среды существенно малыми по сравнению с длинами волн, распространяющихся в данной среде.

Среди множества моделей неоднородных сред выделяют двухфазные или (многофазные) *комбинированные* среды. Под многофазными комбинированными средами обычно понимают смесь из двух или более фаз с различными реологией и механическими свойствами. Выше был рассмотрен один из примеров комбинированных сред: каркас из упругого материала и сжимаемая (или несжимаемая) вязкая жидкость. Другой пример — среда, состоящая из упругого сжимаемого и несжимаемого материалов.

Как и в [38], для построения усредненных (эффективных) моделей обычно авторы полагают включения фаз быстро чередующимися с периодической структурой, причем характерный размер ε чередования часто принимают за малый параметр. Иногда предполагают, что чередование имеет периодическую структуру, модулированную медленно меняющимися параметрами, или почти периодическую (квазипериодическую) структуру.

Под *усредненными* или эффективными моделями здесь и далее будут пониматься краевые задачи для уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, такими, что решения краевых задач для исходных моделей сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению уравнений усредненной модели. Необходимо отметить, что при этом в ряде случаев сходимости в классическом смысле может и не быть.

Построению усредненных моделей для комбинированных сред посвящены многочисленные работы (см., например, [3]-[31]). В работе [3] с ис-

пользованием уравнений (1)-(2) строится модель распространения акустических волн в комбинированных средах «жидкость–упругий материал». При этом формулируется система уравнений, называемая в ряде исследований «законом Био»:

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{\rho}\ddot{\mathbf{u}} + \rho\ddot{\mathbf{w}} = \mu\Delta \mathbf{u} + \nabla [(\mu + \lambda_c) \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha M \operatorname{div} \mathbf{w}] + f(t, x), \\ \nabla p - \mathbf{f} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\mathbf{w}}, \\ p = -\alpha M \operatorname{div} \mathbf{u} - M \operatorname{div} \mathbf{w}, \end{cases}$$

где $\tilde{\rho}$ — средняя плотность комбинированной среды, ρ — плотность жидкости, $\mu, \lambda_c, \alpha, M$ — некоторые константы, определяющие упругие свойства вещества и сжимаемость жидкости, $A \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ — матричный оператор, каждый элемент которого (а их $3 \times 3 = 9$) представляет собой некоторую функцию от дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial t}$. Конкретный вид этой функции строится автором из эвристических соображений, в зависимости от свойств жидкости и геометрических свойств каналов, заполненных жидкостью.

В известной монографии [37] та же задача исследуется асимптотическими методами. Предполагается, что комбинированная среда «жидкость – упругий материал» имеет периодическую структуру с малым периодом ε . Каркас из упругого материала обязательно должен быть связным множеством. Приводимую ниже систему дифференциальных уравнений автор выводит с помощью предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$(4) \quad \begin{cases} \tilde{\rho}\ddot{u}_i + \rho\ddot{w}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (q_{ijkl} e_{kl}(u) - \alpha_{ij} p) + f_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ \dot{w}_k = \int_{-\infty}^t g_{ki}(t-s) \left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\ddot{u}_i \right) ds, \\ \left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta \right) p + \operatorname{div} \mathbf{w} + \alpha_{ij} e_{ij}(u) = 0. \end{cases}$$

Здесь Π, γ, β — коэффициенты пористости упругой среды, сжимаемости жидкости и сжимаемости упругого материала, $\alpha_{ij} = \delta_{ij} |Y^s| - \beta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $|Y^s|$ — объем жидкости в одной («стандартной») ячейке периодичности Y со стороной 1, β_{ij} — некоторые числа, характеризующие сжимаемость упругого материала при нагружениях периодической ячейки определенным набором силовых полей, приложенных к границе, q_{ijkn} — так называемый «эффективный» или «усредненный» тензор для пористой упругой среды в отсутствии жидкости, $g_{ki}(s)$ —

элементы матричного (размером 3×3) интегрального оператора типа свертки, которые определяются через решение некоторых вспомогательных задач типа динамической задачи Стокса на ячейке периодичности Y^s .

При выводе системы (4) автор использует технику двухмасштабных асимптотических разложений, разработанную Ж.П. Лионсом и Н.С. Бахваловым. Согласно этому методу компоненты решения $u_\varepsilon(x)$ отыскиваются с помощью асимптотического разложения вида

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots,$$

где $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ — функции от двух переменных x , y , периодические по переменной y , подлежащие определению.

Нужно отметить, что хотя в [37] усредненная система (4) предъявлена, однако, рассуждения, использованные при выводе, не являются вполне строгими. Несколько лет спустя, в [11], опубликовано вполне строгое доказательство предельного перехода от системы уравнений для двух фаз с условиями сопряжения на границе контакта к упомянутой усредненной системе. В этой работе, как и в [37], автор рассматривает случай сжимаемой жидкости и предлагает принципиально новый подход к построению усредненных моделей — метод так называемой *двухмасштабной сходимости*. Этот метод в дальнейшем был развит в ряде работ российских и зарубежных авторов (см. [36], [4], [29]-[40], [1]-[7]).

В работе [4] рассматривается комбинированная среда «упругий материал–несжимаемая жидкость». В этой работе также используется метод двухмасштабной сходимости, который будет описан ниже. Отметим также, что в ряде работ приводятся явные упрощенные выражения для характеристик эффективных моделей комбинированных сред (см. [17]-[18]).

0.2. Метод двухмасштабной сходимости

Определение Последовательность $u_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$, ограниченная в $L_2(\Omega)$ равномерно по ε , называется слабо двухмасштабно сходящейся к функции $u(x, \xi) \in L_2(\Omega \times Y)$, если для любых финитных бесконечногладких функций $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и бесконечногладких периодических с

периодом Y функций $\Phi(\xi) \in C_{per}^\infty(Y)$

$$(5) \quad \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \phi(x) \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \rightarrow \int_{\Omega \times Y} u(x, \xi) \phi(x) \Phi(\xi) dx d\xi \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь через Ω обозначается ограниченная область в \mathbb{R}^n , Y — единичный куб в \mathbb{R}^n .

Понятие двухмасштабной сходимости является обобщением понятия слабой сходимости: обычный слабый предел последовательности функций получается из двухмасштабного усреднением по периоду. В отличие от слабого предела двухмасштабный предел за счет удвоения количества переменных содержит информацию не только о значении, вокруг которого осциллирует последовательность, но и о характере осцилляции (т.е. двухмасштабный предел сохраняет больше информации о допредельной последовательности, чем слабый предел). В последнее время метод двухмасштабной сходимости находит все более широкое применение (см. [31]-[40], [1]-[7]).

При всех преимуществах у метода двухмасштабной сходимости есть все же один существенный недостаток: эффективные модели, сформулированные в терминах двухмасштабной сходимости, хороши только для общего качественного анализа. Для нужд механики сплошной среды предпочтительнее получить оценки близости или теоремы о сходимости в терминах классической сходимости в функциональных пространствах. С целью установления связи между классической и двухмасштабной сходимостью в работе [25] было введено понятие *сильной двухмасштабной сходимости*.

Определение Последовательность $u_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$, ограниченная в $L_2(\Omega)$ равномерно по ε , называется *сильно двухмасштабно сходящейся* к функции $u(x, \xi) \in L_2(\Omega \times Y)$, если

$$(6) \quad \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) dx \rightarrow \int_{\Omega \times Y} u(x, \xi) v(x, \xi) dx d\xi \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

для любых слабо двухмасштабно сходящихся $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, \xi)$

Кроме того, в работе [25] устанавливается связь между сильной двухмасштабной и сильной сходимостью по норме пространства $L_2(\Omega)$. Именно, если выполнено условие

$$(7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\Omega \times Y} |u(x, \xi)|^2 dx d\xi,$$

а также предполагается некоторая дополнительная регулярность функции $u(x, \xi)$ (достаточно, например, непрерывности по совокупности переменных), то сильная двухмасштабная сходимость влечет равенство

$$(8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon(x) - u(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

причем функция $u(x, \frac{x}{\varepsilon})$ определена в силу дополнительной регулярности $u(x, \xi)$.

Данный способ описания сходимости решений для исходной задачи к решениям для усредненной задачи получил в настоящее время широкое распространение.

0.3. Классификация эффективных моделей

Среди полученных в настоящее время эффективных (усредненных) моделей в механике сплошных сред следует выделить три группы. (см. [31]).

Первая группа — это динамические законы Дарси, соответствующие усредненным моделям жидкости в неподвижном каркасе или микстуры из двух слабовязких жидкостей. Эти модели описываются системами вида

$$(9) \quad \begin{cases} \hat{\gamma} \dot{p} + \operatorname{div}_x [D(t) * (\mathbf{f}(t, x) - \nabla p)] = 0, & x \in \Omega, \\ (D(t) * \nabla p, \mathbf{n}) = (D(t) * \mathbf{f}, \mathbf{n}), & x \in \partial\Omega, \\ f(t, x)|_{t < 0} \equiv 0, p(t, x)|_{t < 0} \equiv 0, \end{cases}$$

где Ω — область, занятая средой, $\partial\Omega$ — ее граница, p — усредненное акустическое давление, $D(t)$ — некоторая матрица («динамическая матрица Дарси»), элементы которой — функции, зависящие от времени. Эти элементы выражаются через решения некоторых краевых задач для системы типа Стокса с периодическими условиями.

Вторая группа — вязкоупругие законы (исходные двухфазные модели — композит из материала Кельвина-Фойгхта, упругий материал с

вязкой жидкостью при постоянной вязкости жидкости и пр.)

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}\ddot{\mathbf{u}}_j = (q_{ijkn}e_{kn}(\mathbf{u}))'_{x_i} + (\alpha_{ijkn}e_{kn}(\dot{\mathbf{u}}))'_{x_i} \\ \quad + (\beta_{ijkn}(t) * e_{kn}(\mathbf{u}))'_{x_i} + f_j(t, x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(t, x)|_{t<0} \equiv 0, \\ f_j(t, x)|_{t<0} \equiv 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Здесь $\mathbf{u}(t, x)$ — среднее смещение материала. Коэффициенты в уравнениях макроскопических законов выражаются через интегралы по пространственным переменным от некоторых вспомогательных задач на кубе периодичности.

Третья группа — исходные двухфазные модели, законы типа закона Био (упругий связный каркас и вязкая сжимаемая жидкость, когда вязкость жидкости стремится к нулю как $\mu_0\varepsilon^2$, где ε — линейный размер ячейки периодичности)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}\ddot{\mathbf{u}}_i + \rho\ddot{\mathbf{w}}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkn}e_{kn}(\mathbf{u}) - \alpha_{ij}p) + f_i(t, x), \quad x \in \Omega, (i = 1, 2, 3) \\ \dot{\mathbf{w}}_k = \int_0^t g_{ki}(t-s)(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho\ddot{\mathbf{u}}_i) ds, \quad x \in \Omega, \\ (\frac{\Pi}{\gamma} + \beta)p + \operatorname{div} \mathbf{w} + \alpha_{ij}e_{ij}(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \int_0^t g_{ki}(t-s)(\frac{\partial p}{\partial x_i} - f_i) ds \cdot n_k = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{u}|_{t=0} \equiv 0, \quad f_i(t, x)|_{t<0} \equiv 0, \end{array} \right.$$

Π — коэффициент пористости, γ — коэффициент несжимаемости, а коэффициенты тензоров g_{ki} , q_{ijkn} , α_{ij} и постоянная β определяются также через решения некоторых вспомогательных краевых задач с периодическими условиями, о которых будет сказано ниже.

Какой именно из этих законов реализуется, определяется реологией каждой из фаз, геометрическими особенностями включений одной фазы в другую (именно: являются ли связными множествами упругий каркас и жидкая фаза), а также поведением параметров задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ (например, стремится к нулю или остается конечной вязкость жидкости при $\varepsilon \rightarrow 0$), см. [11], [4], [31]. Основные случаи сведены в таблицу:

Состав	Геометрия	$\mu(\varepsilon) = \varepsilon^2 \mu_0, \varepsilon \rightarrow 0$	$\mu = const, \varepsilon \rightarrow 0$	$\mu = \varepsilon^2 \mu_0, a_{ijkln} \rightarrow \infty$
упругая среда + упругая среда		упругость	упругость	упругость
упругая среда + вязкая сжимаемая жидкость		упругость	вязкоупругость	—
упругая среда + вязкая сжимаемая жидкость		закон Био	вязкоупругость	динамический закон Дарси
упругая среда + вязкая несжимаемая жидкость		упругость	вязкоупругость	—
упругая среда + вязкая несжимаемая жидкость		закон Био	вязкоупругость	динамический закон Дарси
две вязкие сжимаемые жидкости		динамический закон Дарси	система Стокса	—
материал Кельвина-Фойгхга		динамический закон Дарси вязкоупругость	вязкоупругость	вязкоупругость
упругая среда + вязкая жидкость		динамический закон Дарси	динамический закон Дарси	динамический закон Дарси

Рисунки в приведенной таблице указывают на характер включения одной фазы в другую: либо одна из фаз состоит из малых несвязных областей, а вторая фаза — связное множество, либо наоборот. Черный цвет обозначает упругую фазу в том случае, если рассматривается среда типа «упругий материал — жидкость».

Заметим, что уравнения с интегро-дифференциальными членами типа свертки, аналогичные приведенным выше, возникают в теории теплопроводности (см. [5], [12]).

Предварительный анализ, а также результаты настоящей работы показывают (см. [?], [?], [4] - [29], [13]), что для указанных выше трех случаев можно доказать следующие утверждения о сходимости решений исходных краевых задач к усредненным задачам:

Динамический закон Дарси

$$(12) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p_\varepsilon(t, x) - p(t, x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \mathbf{u}_0(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \nabla_y \mathbf{u}_0(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega)} &= 0; \end{aligned}$$

Вязкоупругий закон

$$(13) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p_\varepsilon(t, x) - p(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \mathbf{u}_0(t, x)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla_x \mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \nabla_x \mathbf{u}_0(t, x) - \nabla_y \mathbf{u}^1(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega)} &= 0; \end{aligned}$$

Закон Био

$$(14) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p_\varepsilon(t, x) - p(t, x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \mathbf{u}_0(t, x)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla_x \mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \nabla_x \mathbf{u}_0(t, x) - \nabla_y \mathbf{u}^1(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \mathbf{u}_0(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{u}_\varepsilon(t, x) - \nabla_y \mathbf{u}_0(t, x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения: $\mathbf{u}_\varepsilon(t, x)$ — вектор смещения исходной двухфазной среды; $p_\varepsilon(t, x)$ — давление в жидкой фазе; Ω , Ω_ε^s , Ω_ε^h обозначены соответственно области, занимаемые всей двухфазной средой, жидкой и твердой фазами; $p(t, x, y)$, $\mathbf{u}_0(t, x)$, $\mathbf{u}_0(t, x, y)$,

$\mathbf{u}^1(t, x, y)$ — функции, определяемые через решения усредненных задач и через решения вспомогательных задач на кубе периодичности $Y = [0, 1]^3$. Для них могут быть приведены явные формулы. Заметим, что сходимости в классическом смысле по норме функционального пространства здесь нет, решение допредельных задач на жидкой фазе может осциллировать, не имея классического предела. Однако удастся описать характер упомянутых осцилляций с помощью функций $p(t, x, y)$, $\mathbf{u}_0(t, x, y)$, $\mathbf{u}^1(t, x, y)$, для которых могут быть предъявлены конструктивные выражения. Они содержат решения некоторых вспомогательных краевых задач с периодическими условиями, постановки которых даны в следующем разделе.

Для доказательства приведенных выше оценок используется следующий метод. Сначала доказывается слабая двухмасштабная сходимость решений допредельных задач к соответствующему пределу. Далее устанавливается равенство вида (7). На основании результатов работы [25] устанавливаются требуемые оценки вида (8). Указанная схема доказательства реализована, например, в [29] для случая закона Био.

0.4. Спектральные вопросы динамики комбинированных сред

При рассмотрении усредненных моделей комбинированных сред возникает естественный вопрос: как устроен спектр собственных колебаний ограниченного объема, заполненного материалом, динамика которого описывается одним из упомянутых выше законов (закон Дарси, закон Био, вязкоупругий закон). В общей постановке для двумерных и трехмерных моделей задача описания спектра собственных колебаний представляет значительные трудности. Эта задача имеет сходство с задачами теории колебаний вязкоупругих сред, которая рассмотрена, например, в [32], где проведен анализ спектров пространственных задач вязкоупругости. Однако, в этой работе рассматривается случай ядер свертки в виде суммы конечного числа экспонент, что недостаточно для задач теории усреднения, исследуемых в настоящей работе. Но если при анализе спектральных вопросов ограничиться рассмотрением только одномерных колебаний среды, то задача эффективного описания свойств спектров собственных колебаний поддается решению сравнительно простыми методами. Они получены в предположении, что смещения рассматриваемой среды направлены только по одной из осей

координат Ox_1 и величины компонент смещений и давления зависят только от переменных t, x_1 .

Далее будут рассматриваться одномерные случаи уравнений (9)-(11):

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^t e^{-a_k(t-s)} u_{xx}(s, x) ds + f(t, x), \\ u|_{t<0} \equiv 0, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \\ a_k > 0, \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty \\ \text{(или } \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{a_k} < \infty); \end{array} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = C^2 u_{xx} + \alpha u_{txx} + \int_0^t \int e^{\lambda(t-s)} d\mu(\lambda) u_{xx}(s, x) ds + f(t, x), \\ u|_{t<0} \equiv 0, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0; \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^t e^{-a_k(t-s)} u_{xx}(x, s) ds + f(t, x), \\ u|_{t<0} \equiv 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ a_k > 0, \quad b_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \\ \text{(или } \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \infty). \end{array} \right.$$

Мера $\mu(\lambda)$ с компактным носителем в (16) определяется монотонной функцией, изображенной на рис. 1. Отметим, что ряд результатов о корректной разрешимости интегродифференциальных уравнений с операторными коэффициентами, являющихся обобщением задачи (2.1) установлен в [14], [23]. Уравнение (2.1) описывает процесс распространения тепла в средах с памятью (подробнее см. [5]). В настоящее время уравнение вида (2.1) нередко называют уравнением Гуртина-Пипкина. Задача вида (2.3) изучалась Л. Пандолфи [12] (там же см. библиографию и комментарии).

Уравнения (15),(16) можно интегрированием привести к уравнению первого порядка вида (17): обозначая $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-a_k t}$ — ядро свертки (17), получим при интегрировании (15) функцию того же типа $K(t) =$

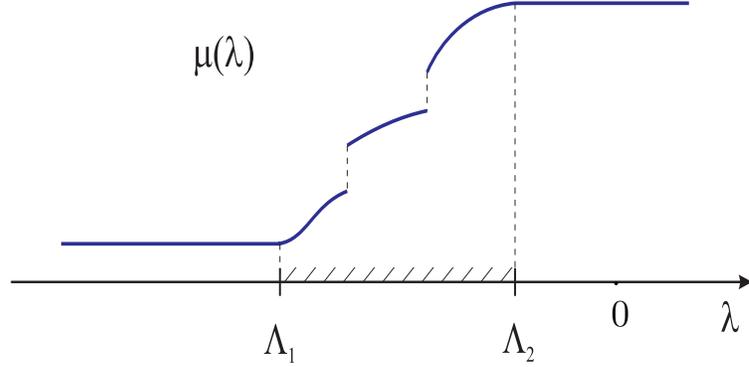


Рис. 1. Функция $\mu(\lambda)$

$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{a_k} e^{-a_k t}$, а интегрируя (16) получим ядро свертки в виде $K(t) = C^2 + \alpha\delta(t) + \int \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)d\mu(\lambda) = C_1^2 + \alpha\delta(t) + \int e^{\lambda t}d\mu_1(\lambda)$, где $\mu_1(\lambda)$ — также монотонная кусочно-непрерывная функция.

0.5. Основные результаты работы

В данной работе в Главе 1 доказывается сходимость решений допредельной задачи о малых колебаниях смеси двух слабовязких жидкостей к решениям усредненной задачи. Исходная задача ставится следующим образом:

Найти вектор-функцию $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ со значениями в $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^d$ такую, что

$$(18) \quad \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} w_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_i w_i dx \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

с начальными условиями

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^d , заполненная смесью двух жидкостей Ω_1 и Ω_2 ,

$$\sigma_{ij}^\varepsilon \equiv -\delta_{ij} p^\varepsilon(x, t) + \varepsilon^2 \left[\eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} \right] e_{kl},$$

(здесь $e_{kl}((w)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_l}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_l} \right)$ — тензор деформаций), давление и перемещение связаны формулой (следующей из предположения о баро-

тропности жидкостей)

$$p^\varepsilon(x, t) \equiv -\gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon,$$

характеристики жидкостей γ — коэффициент сжимаемости, c — скорость звука, μ, η — коэффициенты вязкости принимают постоянные значения для каждой из жидкостей, то есть

$$\gamma(\xi) = \begin{cases} c_1^2 \rho_1 > 0, \xi \in \Omega_1, \\ c_2^2 \rho_2 > 0, \xi \in \Omega_2, \end{cases} \quad c(\xi) = \begin{cases} c_1 > 0, \xi \in \Omega_1, \\ c_2 > 0, \xi \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$\mu(\xi) = \begin{cases} \mu_1 > 0, \xi \in \Omega_1, \\ \mu_2 > 0, \xi \in \Omega_2, \end{cases} \quad \eta(\xi) = \begin{cases} \eta_1 > 0, \xi \in \Omega_1, \\ \eta_2 > 0, \xi \in \Omega_2, \end{cases}$$

а плотность жидкостей $\rho(\xi)$ принимается функцией из $H^1(Y)$, $Y = [0, 1]^d$.

Заметим, что данной постановке задачи соответствует краевая задача в классической дифференциальной форме (с естественным повышенным требованием гладкости — вектор-функция $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ принимает значения в $(C_0^2(\Omega))^d$):

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i, \text{ в } \Omega \\ \mathbf{u}_1^\varepsilon|_S = \mathbf{u}_2^\varepsilon|_S, \\ \sigma^\varepsilon(\mathbf{u}_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}|_S = \sigma^\varepsilon(\mathbf{u}_2^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}|_S, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_\Omega = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \end{array} \right.$$

где S — граница раздела жидкостей Ω_1 и Ω_2 .

Определим вектор-функции $\mathbf{V}^j(t)$, $j = 1, \dots, d$ со значениями в $\mathbb{H}^1(Y)$ как решения вспомогательных задач (локальных) на ячейке пе-

риодичности Y

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(\xi) \frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi, t)}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{V}^j(\xi, t) + \nabla q(\xi, t) = 0, \\ \operatorname{div}_\xi \mathbf{V}^j = 0, \\ \mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \\ \sigma(\mathbf{V}^{j1}) \cdot \mathbf{n}|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2}) \cdot \mathbf{n}|_S, \\ \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}; \end{array} \right.$$

и матрицу $K(t) = \{K_{ij}\}, i, j = 1, \dots, d$, элементы которой зададим как среднее по ячейке от функций $\mathbf{V}_i^j(\xi, t)$

$$(21) \quad K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y V_i^j(\xi, t) d\xi;$$

определим также функцию $p^*(t)$ со значениями в $L_2(\Omega)$ как решение задачи (акустического уравнения)

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x [K(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^*(x, t))] = 0 \text{ в } \Omega, \\ [K(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^*(x, t))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right.$$

(здесь символ $'*'$ обозначает операцию свертки: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$, $\langle g \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(\xi) d\xi$ — среднее по ячейке).

Введем теперь функцию $\mathbf{u}^0(t)$ со значениями в $\mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}_0^1(Y))$ следующим образом:

$$(23) \quad \mathbf{u}^0(x, \xi, t) = \sum_{j=1}^{j=d} \int_0^t \mathbf{V}^j(\xi, t-s) (\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^*(x, s)) ds.$$

Тогда выполняется

Теорема. *Для решений предельной (усредненной) и исходной задач справедливы равенства:*

$$(24) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}^\varepsilon(x, t) - \mathbf{u}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon(x, t) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \mathbf{u}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p^\varepsilon(x, t) - p^*(x, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор-функция $\mathbf{u}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)$ имеет смысл предельной скорости, а $\frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi, t) d\xi$ — предельной средней скорости, поэтому (23) можно переписать в виде соотношения

$$(25) \quad \frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi, t) d\xi = \int_0^t K(t-s) (\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^*(x, s)) ds,$$

называемого динамическим законом Дарси.

В Главе 2 рассматривается спектр уравнения (22), (17) в одномерном случае, изучаются типичные картины спектров. Под спектром задач будет пониматься множество $\sigma \subset \mathbb{C}$ комплексных чисел λ таких, что краевая задача, полученная из краевой задачи (22), (17) преобразованием Лапласа при $f(x, t) = 0$, имеет при $\lambda \in \sigma$ отличное от тождественного нуля решение.

1) Если функция $K(t)$ (21) представима в виде $K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a_i t}$, где $c_i, a_i > 0, \sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i < \infty$ (т.е. $\dot{K}(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$), что соответствует условию $\rho(y) \in H^1(Y)$ в задаче (18), то спектр уравнения (22) имеет

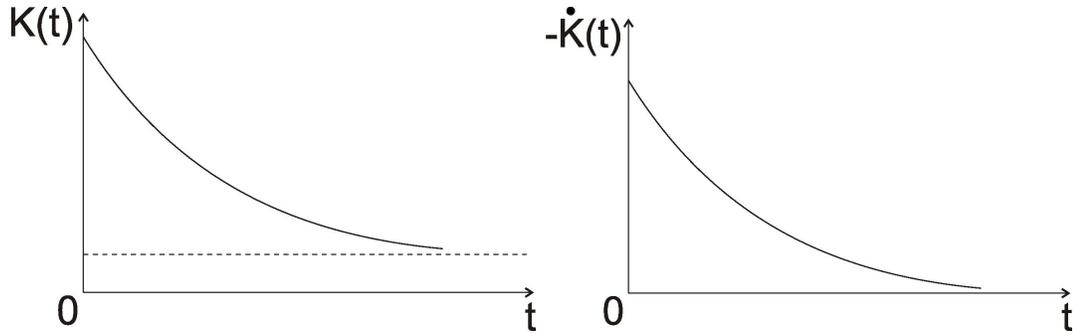


Рис. 2. Ядро свертки $\dot{K}(t) \in W_1^1(\mathbb{R}_+)$

следующий вид (спектральная структура типа «крест», см. рис. 3): вещественная часть спектра состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам μ_N , кроме того может существовать серия уходящая на бесконечность; комплексная часть спектра состоит из серии комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , мнимая часть которых $Im \lambda_n^\pm$ уходит на бесконечность, а действительная $Re \lambda_n^\pm$

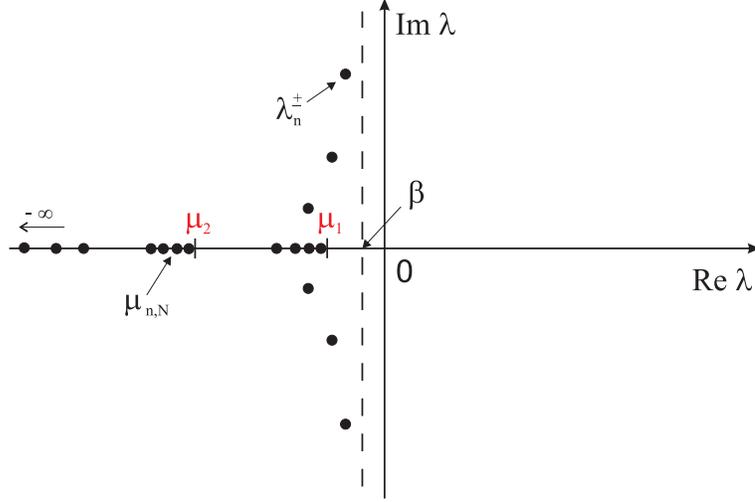


Рис. 3. Спектральная структура типа «крест»

имеет вертикальную асимптоту $Re \lambda = \beta$, где

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i}.$$

При этом, если уравнение (22), (17) рассматривается как макроскопическое уравнение, полученное в результате усреднения уравнения (18), то вертикальная асимптота $Re \lambda = \beta$ связана с функцией плотности следующей формулой

$$(26) \quad \beta = -\frac{1}{2} \frac{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L_2(Y)}^2}{\left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L_2(Y)}^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i}.$$

2) Если же $\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i = \infty$ (т.е. $\dot{K}(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$), что соответствует условию $\rho(y) \notin H^1(Y)$ в задаче 18, то спектр уравнения (22) имеет следующий вид (спектральная структура типа «лилия», см. рис. 5): вещественная часть спектра, как и в случае структуры «крест», состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам μ_N , кроме того может существовать серия уходящая на бесконечность; комплексная часть спектра состоит комплексносопряженных собственных значений

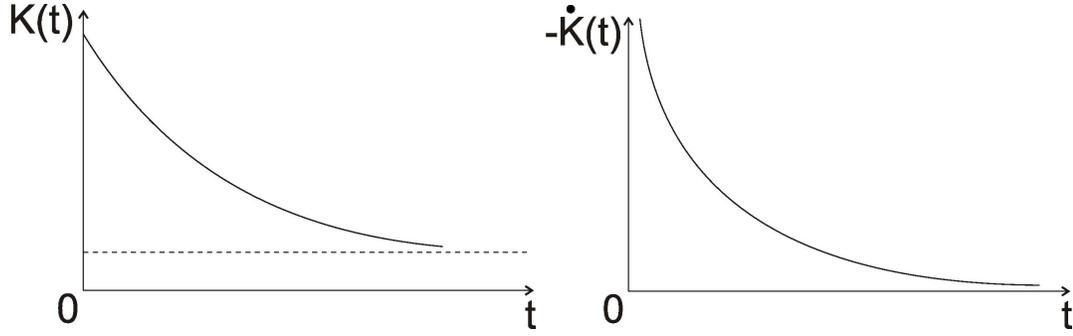


Рис. 4. Ядро свертки $\dot{K}(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$

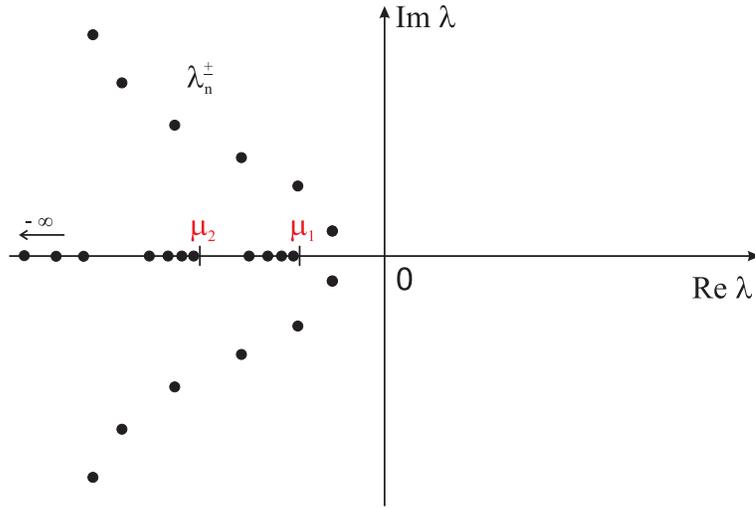


Рис. 5. Спектральная структура типа «лилия»

λ_n^\pm , у которых и мнимые, и действительные части уходят на бесконечность.

Случаи 1) и 2) напрямую связаны с поведением функции плотности $\rho(y)$, если уравнение (22), (17) рассматривается как полученное в результате усреднения уравнения (18) (см. рис. 6-8):

Теорема. *Если функция плотности $\rho(y)$ разрывна (что соответствует «резкой» границе между двумя жидкостями), то спектр акустического уравнения (22) будет соответствовать спектральной структуре типа «лилия»; если функция плотности $\rho(y)$ становится непрерывной, то спектр уравнения переходит в спектральную структуру типа «крест»; а если функция плотности $\rho(y)$ постоянна, то спектр становится чисто колебательным.*

Данное утверждение основывается на зависимости типа спектра от свойств функции $K(t)$. Предположение, что для $K(t)$ в случаях 1) и 2) имеют место спектральные структуры «крест» и «лилия» было сделано авторами, проверено в численном эксперименте, а позже строго

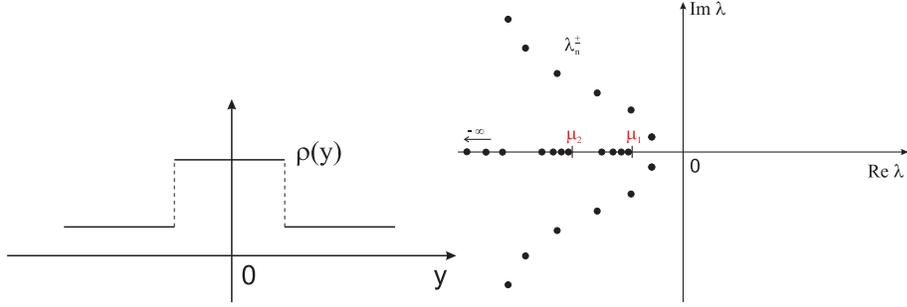


Рис. 6. Функция плотности $\rho(y)$ разрывна

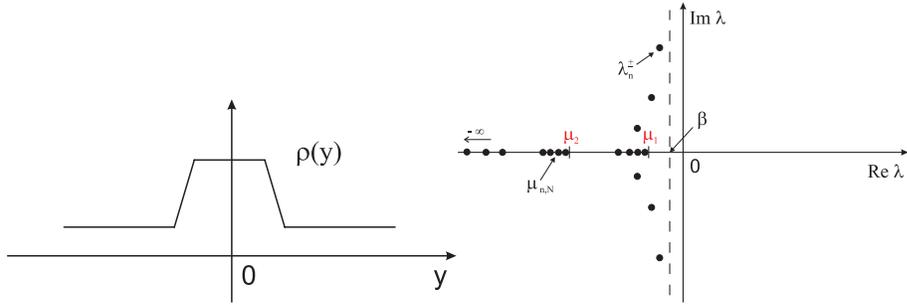


Рис. 7. Функция плотности $\rho(y)$ непрерывна

доказано В.В. Власовым, Г.Р. Кабировой [??] для случая 1) («крест»), и В.В. Власовым, С.И. Ивановым, Н. Раутян (в печати) для случая 2) («лилия»).

3) Если функция $K(t)$ в уравнении (22) представима в виде

$$K(t) = C^2 + \alpha\delta(t) + \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} e^{\lambda t} d\mu(\lambda),$$

что соответствует уравнению (22), полученному путем интегрирования уравнения (10), (16) (здесь $\delta(t)$ — дельта-функция, $C^2, \alpha > 0$ — константы, а мера $d\mu(\lambda)$ с компактным носителем задается некоторой монотонной кусочно-непрерывной функцией), то спектр уравнения (22) при некоторых значениях параметра α имеет следующий вид (спектральная структура типа «шпага», см. рис. 10): вещественная часть спектра состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам μ_N , существует серия уходящая на бесконечность, и может существовать отрезок $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ с непрерывной частью спектра; комплексная часть спектра может либо отсутствовать, либо состоять из конечного числа комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , либо из счетного числа комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , имеющих своими конечными пределами точки $\gamma \pm i\delta$.

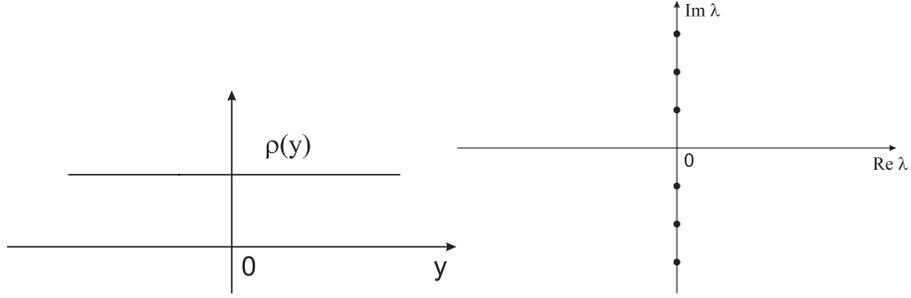


Рис. 8. Функция плотности $\rho(y)$ постоянна

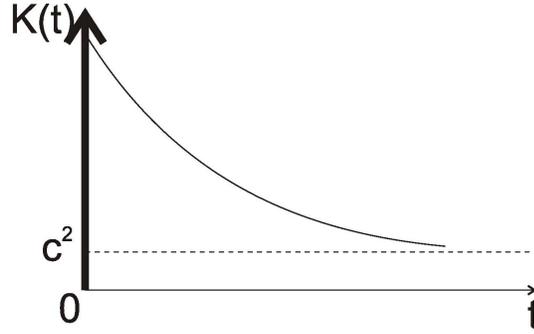


Рис. 9. Ядро свертки $K(t) = C^2 + \alpha\delta(t) + \int e^{-\lambda t} d\mu(\lambda)$

При этом картина спектра для данного $K(t)$ существенным образом зависит от параметра α (см. рис.11): при $\alpha = 0$ имеем спектральную структуру типа «крест», при $\alpha \in (0, \alpha_1)$ комплексная часть спектра отсутствует, при $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ имеем спектральную структуру типа «шпага» с конечным числом комплексных собственных значений, при $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$ — с бесконечным, при $\alpha \in (\alpha_3, \alpha_4)$ — вновь с конечным, а при $\alpha > \alpha_4$ комплексная часть спектра отсутствует.

Кроме того, в Главе 2 выводятся формулы для предельных точек комплексной части спектра типа «шпага» $\gamma \pm i\delta$. Для формулировки результата введем некоторые определения. Положим

$$f_N(\lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{\mu(\lambda_{j+1}) - \mu(\lambda_j)}{\lambda - \lambda_j}, \quad \lambda_j = \Lambda_1 + j \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{N},$$

и рассмотрим корни уравнения $f_N(\lambda) = -\alpha\lambda - C^2$. Обозначим через δ_j^N расстояние от λ_j до ближайшего упомянутого корня справа. Пусть

$$F_N = \sum_{j=1}^N \delta_j^N, \quad \Phi_N = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j^N}{\lambda_j}.$$

Определим теперь величины $F(\mu)$, $\Phi(\mu)$, являющиеся функционалами

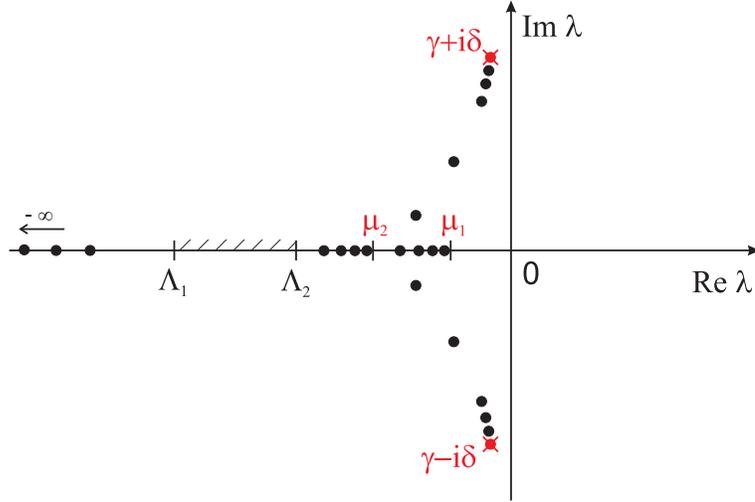


Рис. 10. Спектральная структура типа «шпага»

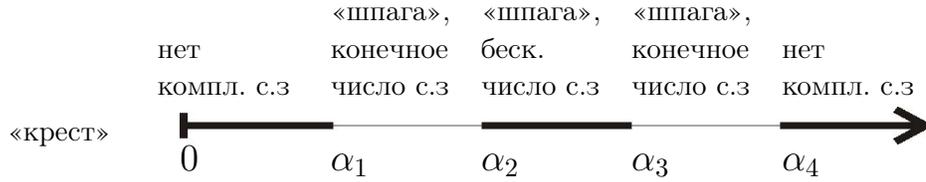


Рис. 11. Зависимость типа спектральной структуры от параметра α

от μ :

$$\begin{cases} F(\mu) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \delta_j^N, \\ \Phi(\mu) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j^N}{\lambda_j}. \end{cases}$$

Положим $F(\lambda) = \int \frac{d\mu(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}}$. Тогда

3.1) если уравнение $F(\lambda) = -\alpha\lambda - C^2$ при $\lambda \in R \setminus [\Lambda_1, \Lambda_2]$ не имеет корней, то спектр (типа «шпага») содержит бесконечное количество пар комплексносопряженных корней. В противном случае спектр содержит конечное количество пар комплексносопряженных корней. Оно равно количеству натуральных чисел n , для которых уравнение $F(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{n^2} - \alpha\lambda - C^2$ имеет только один корень. В случае, когда таких натуральных значений нет, комплексная составляющая спектра отсутствует;

3.2) для предельных значений $\gamma \pm i\delta$, комплексной части спектра, соот-

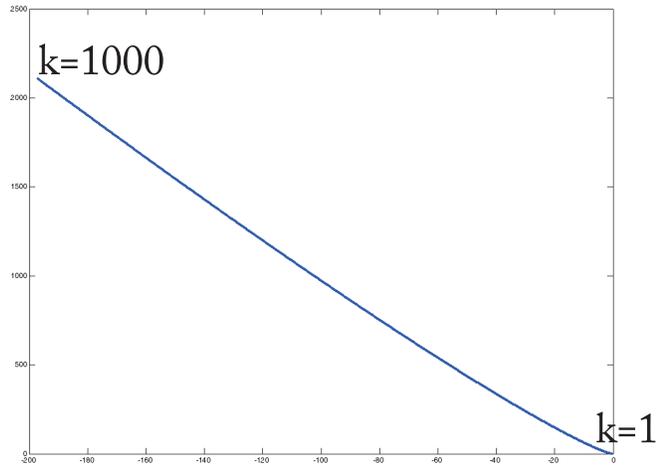


Рис. 12. Комплексная часть спектральной структуры типа «лилия», численный эксперимент (кривая состоит из 1000 собственных значений)

ветствующей структуре типа «шпага» (когда количество комплексных собственных значений бесконечно), имеют место формулы

$$2\gamma = \Lambda_2 + F(\mu),$$

$$\gamma^2 + \delta^2 = \alpha \Lambda_2 e^{\Phi} \left(C^2 - \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda} \right).$$

Также в Главе 2 выводятся формулы для численного анализа спектра уравнения (22) для указанных выше ядер и приводятся результаты численного нахождения комплексной части спектра в нескольких модельных примерах, когда вид последовательностей a_i, c_i и меры $\mu(\lambda)$ задается в явном виде (рис. 12-14).

Результаты, изложенные в этой части настоящей работы позволяют объяснить такие качественные эффекты, возникающие в неоднородных средах, как а) исчезновение собственных колебаний в проникновении вязкой жидкости в поры упругого тела (см. [16], [15] — эксперимент по измерению собственных частот мраморного стержня, поры которого содержат вазелин), б) уменьшение собственных частот при появлении пузырьков в жидкости ([???]), в) исчезновении диссипации и последствия при равенстве плотностей в смеси двух жидкостей, г) зависимость типа спектра от гладкости плотности в смеси двух жидкостей. Явление а) можно объяснить как исчезновение колебательной (комплексной) части спектра при некоторых значениях параметра α в случае 3), явления б)-г) — как изменение типа спектра при изменении гладкости функции

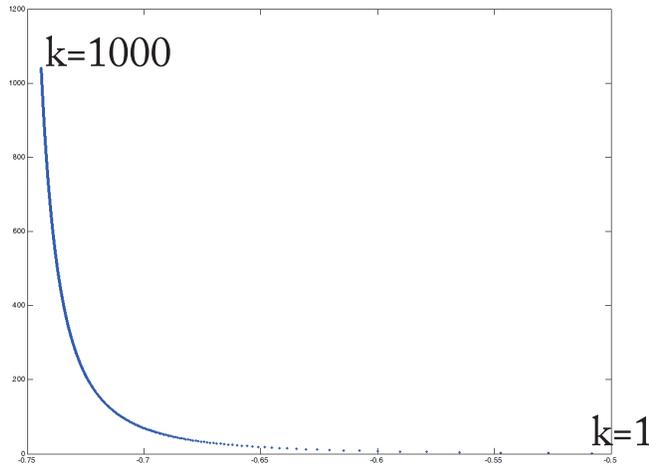


Рис. 13. Комплексная часть спектральной структуры типа «крест», численный эксперимент (кривая состоит из 1000 собственных значений)

плотности $\rho(y)$ в случаях 1)-2): при появлении пузырьков в жидкости (например, при ее встряхивании) плотность перестает быть постоянной, в связи с чем тип спектра изменяется со строго колебательного на колебательный с диссипацией — «крест» или «лилию» (см. рис. 15), при равенстве плотностей в смеси двух жидкостей спектр строго колебательный, а зависимость спектра от градиента плотности наглядно прослеживается благодаря формуле (26): по мере того, как функция $\rho(y)$ теряет гладкость (т.е. граница раздела двух жидкостей становится все более «резкой») асимптота β спектральной структуры типа «крест» смещается влево по отрицательной полуоси и в пределе, когда плотность становится разрывной, уходит на бесконечность, тип спектра изменяется на «лилию».

Глава 3 посвящена численному решению вспомогательных задач (20) на ячейке периодичности $Y = [0, 1]^2$ в двумерном случае (на плоскости), получен алгоритм расчета ядер свертки уравнения (22) — элементов

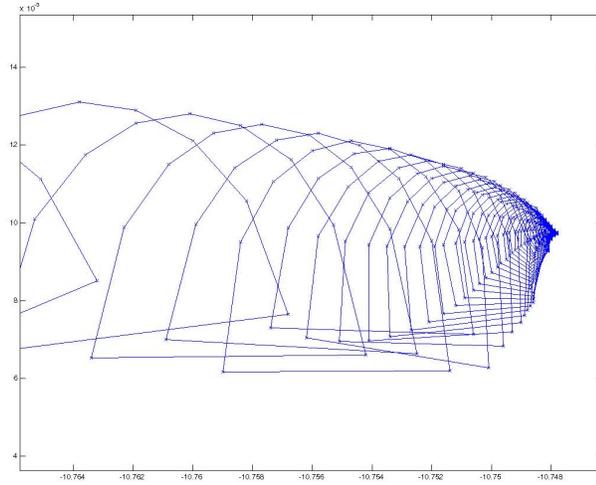


Рис. 14. Комплексная часть спектральной структуры типа «шпага», численный эксперимент (кривая состоит из 1000 собственных значений)

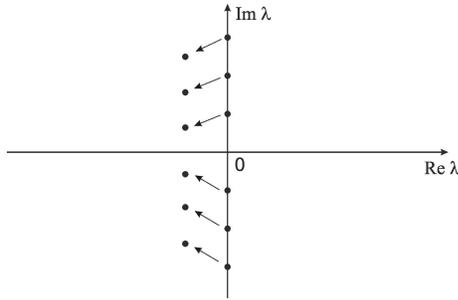


Рис. 15. Изменение спектра при изменении функции плотности

матрицы $K(t)$. Рассматривается задача

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \rho \dot{v} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \operatorname{div} \vec{z} = 0, \\ \vec{z}_1|_S = \vec{z}_2|_S \text{ (т.е. } \vec{z} \text{ непрерывен через } S), \\ \sigma_{ij}^1 n_i|_S = \sigma_{ij}^2 n_i|_S, \\ \vec{z} \text{ — периодический с периодом } Y, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{\rho}, \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \end{array} \right.$$

где $(x, y) \in Y = [0, 1]^2 = Y_1 \cup Y_2$ (Y_i — жидкость с плотностью ρ_i и

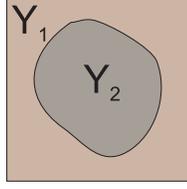


Рис. 16. Ячейка периода Y

вязкостью μ_i), вектор скорости $\vec{z} = (u, v)$, $\vec{z}_i = \vec{z}|_{Y_i}$, $\mu|_{Y_i} = \mu_i$, $\rho|_{Y_i} = \rho_i$, S — граница между Y_1 и Y_2 , $\vec{n} = (n_1, n_2)$ — вектор единичной нормали к S , а $\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl}$, т.е.

$$(28) \quad \begin{aligned} \sigma_{i1}n_i &= -pn_1 + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}n_1 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_2, \\ \sigma_{i2}n_i &= -pn_2 + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}n_2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_1. \end{aligned}$$

Решение этой задачи позволяет найти элементы матрицы $K(t)$ (21) $K_{11}(t)$ и $K_{21}(t)$, а решение этой же задачи, но с начальными условиями $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\rho}$ — элементы $K_{12}(t)$ и $K_{22}(t)$. Уравнение (27) решается с помощью метода конечных объемов ([6],[?]). Основная идея метода состоит в интегрировании уравнений (20) с учетом краевых условий по некоторому объему (в данном, двумерном, случае — по участку плоскости), переходу по теореме Гаусса-Остроградского к интегралам по поверхности (в данном случае - кривым) и приближении полученных интегралов.

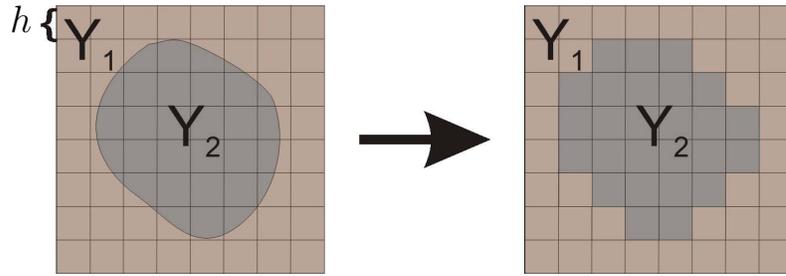


Рис. 17. Приближение включений на ячейке периода

Рассмотрим на $Y = [0, 1]^2$ равномерную сетку (x_i, y_j) , $x_i = ih$, $y_j = jh$, где $i, j = 0, \dots, N - 1$, $h = \frac{1}{N}$. Обозначим $P_{i,j} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$ и введем дискретные функции $p_{i,j} = p(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})$, $\mu_{i,j} = \mu(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})$, $\rho_{i,j} = \rho(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})$ (т.е. $p_{i,j}, \mu_{i,j}, \rho_{i,j}$ заданы в центре $P_{i,j}$), $u_{i,j} = u(x_{i+1}, y_j + \frac{h}{2})$, $v_{i,j} = v(x_i + \frac{h}{2}, y_{j+1})$ (т.е.

$u_{i,j}, v_{i,j}$ заданы на сторонах $P_{i,j}$ или в центрах $U_{i,j} = \{(x, y) | x_i + \frac{h}{2} \leq x \leq x_{i+1} + \frac{h}{2}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}, V_{i,j} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j + \frac{h}{2} \leq y \leq y_{j+1} + \frac{h}{2}\}$. Будем считать, что $P_{i,j} \subset Y_k, k = 1, 2$, если центр $P_{i,j} (x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}) \in Y_k$.

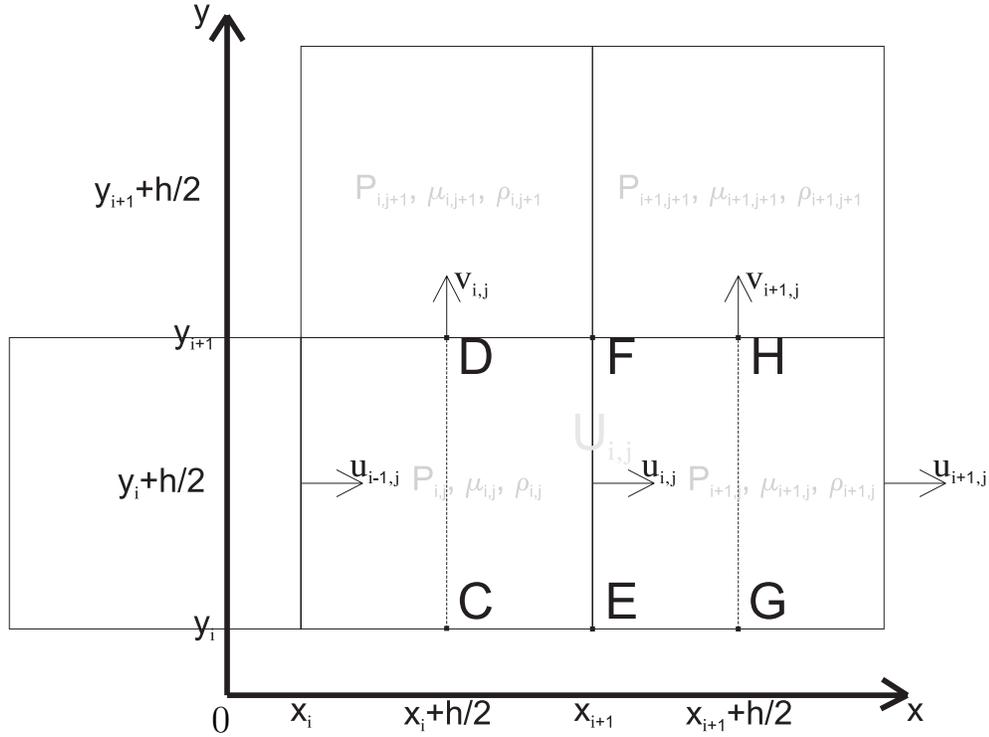


Рис. 18. Задание дискретных функций $p_{i,j}, \mu_{i,j}, \rho_{i,j}, u_{i,j}, v_{i,j}$

Например, разностное уравнение из условия несжимаемости получается следующим образом (на данном слое по времени t_k): пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского и теоремой о среднем, проинтегрируем (27'3) по $P_{i,j}$:

$$0 = \int_{P_{i,j}} \operatorname{div} z dP_{i,j} = \int_{P_{i,j}} \nabla \cdot z dP_{i,j} = \int_{\partial P_{i,j}} z \cdot n d\sigma \approx (u_{i,j} - u_{i-1,j} + v_{i,j} - v_{i,j-1})h$$

ИЛИ

$$u_{i,j} - u_{i-1,j} + v_{i,j} - v_{i,j-1} = 0.$$

Полученная таким образом матрица, состоящая из коэффициентов при $u_{i,j}, v_{i,j}, p_{i,j}$ в разностных уравнениях, получается сильно разреженной и решается методом типа LU -разложения. По вычисленным $u_{i,j}, v_{i,j}$

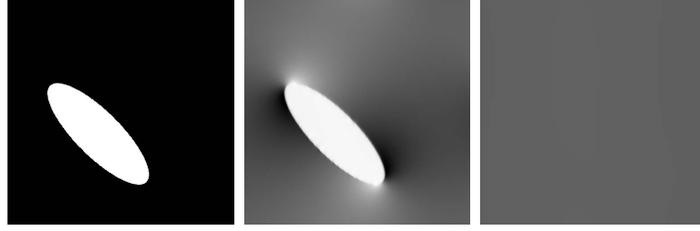


Рис. 19. Значение x -компоненты вектора скорости $u(x, y)$ в тонах серого (черный цвет соответствует минимальному значения, белый — максимальному). Слева направо: $u(x, y)|_{t=0} = \frac{1}{\rho}$, $u(x, y)$ после первого шага по времени, $v(x, y) = const + O(h)$ после последнего (ок. 6000-го) шага по времени.

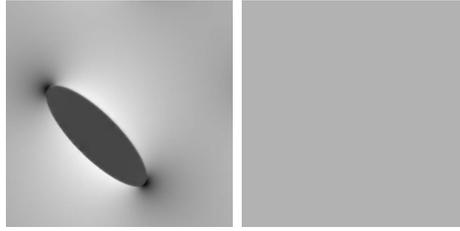


Рис. 20. Значение y -компоненты вектора скорости $v(x, y)$ в тонах серого (черный цвет соответствует минимальному значения, белый — максимальному). Слева направо: $v(x, y)$ после первого шага по времени, $v(x, y) = const + O(h)$ после последнего (ок. 6000-го) шага по времени.

при $t = t_1, \dots, t_k, \dots, t_M$ находим

$$K_{1,1}(t_k) = h \sum_{i,j} u_{i,j}^{t_k}, K_{1,2}(t_k) = h \sum_{i,j} v_{i,j}^{t_k}.$$

Расчет ведется до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\max(\max_{i,j} u_{i,j}^{t_M} - \min_{i,j} u_{i,j}^{t_M}, \max_{i,j} v_{i,j}^{t_M} - \min_{i,j} v_{i,j}^{t_M}) < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ наперед заданное число (в численном эксперименте полагалось $\varepsilon_1 = h$). Ошибка данного метода — порядка $O(h)$.

На рис. ??-23 изображены результаты численного решения задачи (27) при следующих параметрах:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 7, & (x, y) \in Y_1, \\ 2, & (x, y) \in Y_2, \end{cases} \quad \mu(x, y) = \begin{cases} 5, & (x, y) \in Y_1, \\ 1, & (x, y) \in Y_2, \end{cases}$$

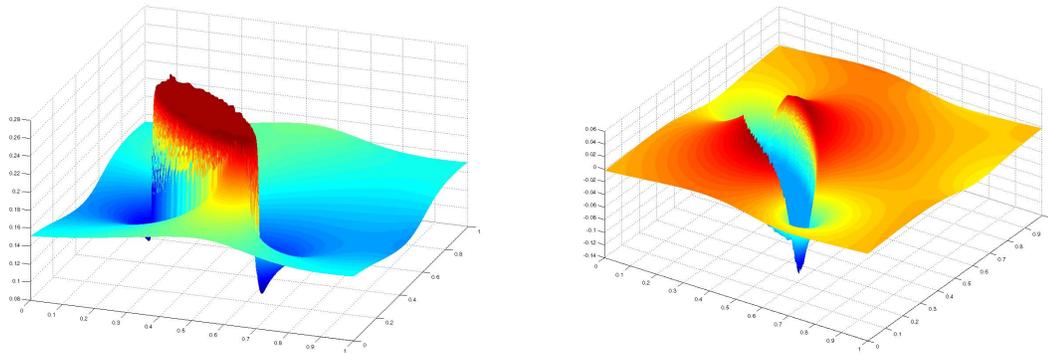


Рис. 21. Слева направо: трехмерное изображение x -компоненты вектора скорости $u(x, y)$ после первого шага по времени, трехмерное изображение y -компоненты вектора скорости $v(x, y)$ после первого шага по времени.

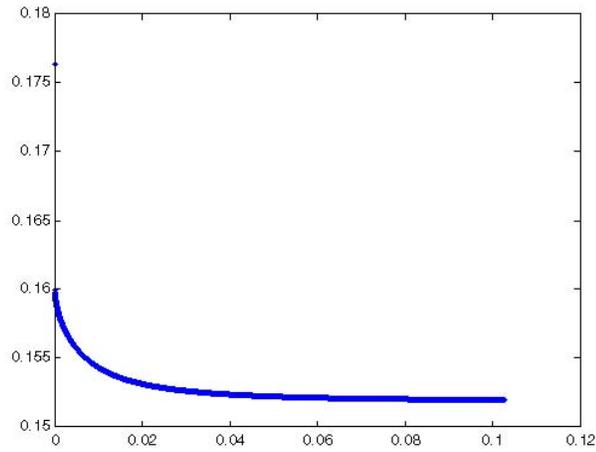


Рис. 22. Элемент матрицы ядра свертки $K_{11}(t)$

$N = 500, h = 0,002$, а область Y_2 ограничена эллипсом

$$\begin{cases} x = 0,4 + 0,3 \cos \frac{3\pi}{4} \cos t - 0,1 \sin \frac{3\pi}{4} \sin t, \\ y = 0,4 + 0,3 \sin \frac{3\pi}{4} \cos t + 0,1 \cos \frac{3\pi}{4} \sin t. \end{cases}$$

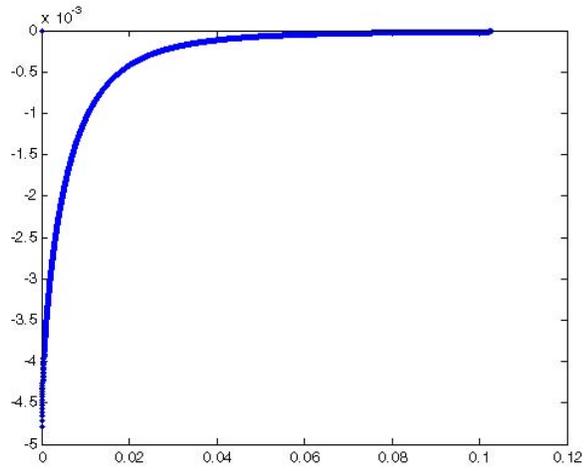
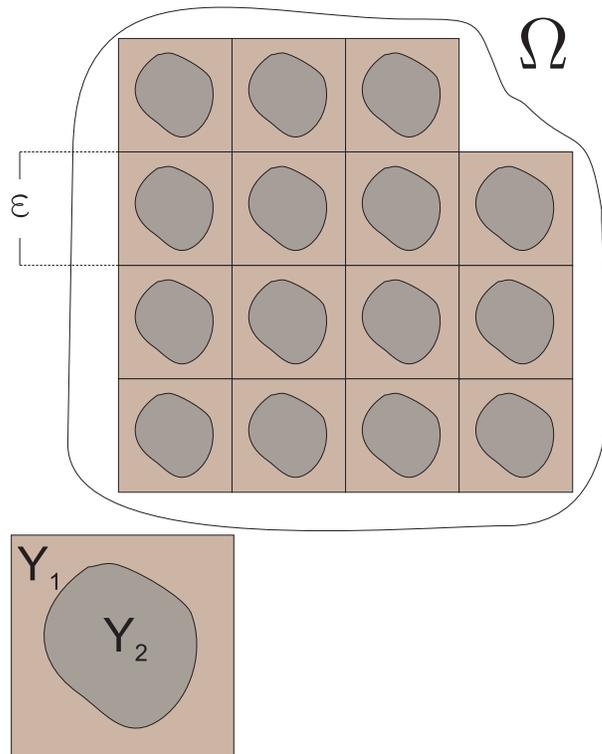


Рис. 23. Элемент матрицы ядра свертки $K_{12}(t)$.

Глава 1

Сходимость решений

1.1. Общие замечания о постановке задачи



В данной работе в предположении о малости колебаний смеси за исходные уравнения, содержащие малый параметр ε , берутся линейаризованные уравнения Навье-Стокса. В соответствии с этим неизвестные функции \mathbf{v}^ε (скорость) и p^ε (давление) есть малые возмущения скорости и давления относительно состояния покоя. Считая жидкости баротропными, имеем, что возмущение давления и плотности связаны соотношением

$$p^\varepsilon = c^2 \rho_{pert},$$

где $c > 0$ — скорость звука в состоянии покоя. В рассматриваемом линейном приближении скорость \mathbf{v}^ε , возмущение плотности ρ_{pert} и плотность жидкости в состоянии покоя ρ связаны уравнением неразрывности в виде

$$\frac{\partial \rho_{pert}}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon = 0,$$

интегрируя которое, получаем ($\rho_{pert} = 0$ при $\mathbf{u}^\varepsilon = 0$, где $\mathbf{u}^\varepsilon = \int_0^t \mathbf{v}^\varepsilon(s) ds$ — перемещение)

$$\rho_{pert} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0.$$

Следовательно, возмущение давления и перемещение связаны формулой

$$p^\varepsilon(x, t) = -c^2 \rho \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon.$$

Отметим, что уравнения движения жидкости обычно записываются для скорости \mathbf{v}^ε , но в работе по большей части будет использоваться в качестве неизвестной функции перемещение \mathbf{u}^ε .

1.2. Постановка задачи

Изучим характер сходимости решений задачи о движении смеси двух слабовязких (с коэффициентами вязкости порядка ε^2) жидкостей к решениям усредненной задачи.

Рассмотрим открытую ограниченную область Ω в \mathbb{R}^d и куб-период $Y = [0, 1]^d$, состоящий из областей Y_1 и Y_2 , соответствующих двум жидкостям. Будем считать, что вся Ω покрыта ячейками периода εY . Скорость звука в невозмущенном состоянии $c(y) > 0$ и коэффициенты вязкости $\varepsilon^2 \mu(y) > 0, \varepsilon^2 \eta(y) > 0$ принимают постоянные значения $c_1, \varepsilon^2 \mu_1, \varepsilon^2 \eta_1$ на Y_1 и $c_2, \varepsilon^2 \mu_2, \varepsilon^2 \eta_2$ на Y_2 , а плотность $\rho(y) > 0$ полагаем функцией из $H^1(Y)$. Индекс ε означает: $\rho^\varepsilon(x) \equiv \rho(\frac{x}{\varepsilon})$, давление $p^\varepsilon(x, t)$ и смещение $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ связаны формулой

$$(1.1) \quad p^\varepsilon(x, t) \equiv -\gamma^\varepsilon(x) \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon,$$

где $\gamma(y) = c^2(y)\rho(y)$, $\gamma^\varepsilon(x) = \gamma(\frac{x}{\varepsilon})$. Тензор напряжений σ^ε определяется по формуле

$$(1.2) \quad \sigma_{ij}^\varepsilon \equiv -\delta_{ij} p^\varepsilon(x, t) + \varepsilon^2 [\eta^\varepsilon(x) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^\varepsilon(x) \delta_{ik} \delta_{jl}] e_{kl}$$

Тогда вектор перемещений при колебании (в схеме малых линеаризованных возмущений) смеси двух слабовязких сжимаемых жидкостей \mathbf{u}^ε определяется как решение следующей задачи:

Найти $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ со значениями в $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^d$ такую, что

$$(1.3) \quad \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} w_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f_i w_i dx \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

где $\mathbf{f} \in \mathbb{L}_2(\Omega) = (L_2(\Omega))^d$ — заданная сила, тензор напряжений $\sigma^\varepsilon(x, t)$ задан в (1.2) давление $p^\varepsilon(x, t)$ задается формулой (1.1), а начальные условия:

$$(1.4) \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Следствием данного определения для гладких \mathbf{u}^ε является постановка задачи в классической дифференциальной форме:

Найти $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ такую, что

$$(1.5) \quad \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + f_i, \quad \text{в } \Omega$$

$$(1.6) \quad \mathbf{u}_1^\varepsilon|_S = \mathbf{u}_2^\varepsilon|_S,$$

$$(1.7) \quad \sigma^\varepsilon(\mathbf{v}_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}|_S = \sigma^\varepsilon(\mathbf{v}_2^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}|_S,$$

с начальными условиями (1.4), где $\mathbf{v}^\varepsilon \equiv \partial \mathbf{u}^\varepsilon / \partial t$, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к S , границе раздела жидкостей.

1.3. Существование и единственность решения

Запишем, пользуясь (1.1), (1.2)

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} p^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{w} dx + \varepsilon^2 b^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon, \mathbf{w}),$$

где

$$(1.8) \quad b^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} b_{ijkl}^\varepsilon e_{ij}(\mathbf{v}^\varepsilon) e_{kl}(\mathbf{w}) dx, \quad b_{ijkl}^\varepsilon = \eta^\varepsilon(x) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^\varepsilon(x) \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Форма b^ε коэрцитивна на $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$: пусть $\mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, тогда

$$b_{ijkl}^\varepsilon e_{ij}(\mathbf{w}) e_{kl}(\mathbf{w}) = \eta^\varepsilon e_{ii}(\mathbf{w}) e_{kk}(\mathbf{w}) + 2\mu^\varepsilon e_{ij}(\mathbf{w}) e_{ij}(\mathbf{w}) > \alpha e_{ij}(\mathbf{w}) e_{ij}(\mathbf{w}).$$

В [1] показано, что $\int_{\Omega} w_i w_i dx \leq C_1 \int_{\Omega} e_{ij}(\mathbf{w}) e_{ij}(\mathbf{w}) dx \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, отсюда, пользуясь неравенством Корна ($\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} |e_{ij}(\mathbf{w}) e_{ij}(\mathbf{w})| dx \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$), получаем

$$(1.9) \quad b^\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq C_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}_0^1}.$$

Подставив $\mathbf{w} = \mathbf{v}^\varepsilon$, перепишем (1.3) в виде

$$\int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial t} v_i^\varepsilon dx - \int_{\Omega} p^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon dx + \varepsilon^2 b^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) = \int_{\Omega} f_i v_i^\varepsilon dx.$$

Тогда, отбрасывая третий положительный член в правой части

$$\int_{\Omega} \rho^\varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial t} v_i^\varepsilon dx + \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v}^\varepsilon dx \leq \| \mathbf{f} \|_{\mathbb{L}_2} \| \mathbf{v}^\varepsilon \|_{\mathbb{L}_2},$$

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} \frac{\rho^\varepsilon}{2} (\mathbf{v}^\varepsilon)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\gamma^\varepsilon}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon)^2 dx \right] \leq \| \mathbf{f} \|_{\mathbb{L}_2} \| \mathbf{v}^\varepsilon \|_{\mathbb{L}_2} \Rightarrow$$

$$\| \mathbf{v}^\varepsilon \|_{\mathbb{L}_2} \leq Ct \| \mathbf{f} \|_{\mathbb{L}_2} \Rightarrow \| \mathbf{u}^\varepsilon \|_{\mathbb{L}_2} \leq Ct^2 \| \mathbf{f} \|_{\mathbb{L}_2}.$$

Таким образом, к \mathbf{u}^ε применимо преобразование Лапласа $F : \mathbf{u}^\varepsilon(t) \rightarrow \hat{\mathbf{u}}(\lambda)$, следовательно, получаем уравнение

$$(1.10) \quad \lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{u}_i w_i dx + \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} \operatorname{div} \mathbf{w} dx + \varepsilon^2 \lambda b^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \hat{f}_i w_i dx,$$

Подставляя в (1.10) $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{u}}$, получаем

$$\lambda \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{u}_i^2 dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 dx + \varepsilon^2 b^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \hat{f}_i \hat{u}_i dx,$$

Взяв вещественную часть, видим, что

$$(1.11) \quad (\operatorname{Re} \lambda) \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{\mathbf{u}}^2 dx \leq \frac{1}{|\lambda|} \| \hat{\mathbf{f}} \|_{\mathbb{L}_2} \| \hat{\mathbf{u}} \|_{\mathbb{L}_2},$$

отсюда следует единственность решения. При фиксированном λ (например, при $\operatorname{Re} \lambda > 1$) билинейной форме, стоящей в левой части (1.10), соответствует оператор с компактной резольвентой, поэтому существование решения следует из единственности (теорема Рисса-Шаудера, [28], [27]). Также можно доказать существование и единственность решения, пользуясь теорией полугрупп.

Таким образом, $\hat{\mathbf{u}}(\lambda)$ существует при $\operatorname{Re} \lambda > 1$. Функция $\hat{\mathbf{f}}$ получена с помощью преобразования Лапласа, отсюда $\| \hat{\mathbf{f}} \|_{\mathbb{L}_2}$ ограничено полиномом по $|\lambda|$, и из (1.10) следует, что то же справедливо для $\| \hat{\mathbf{u}} \|_{\mathbb{L}_2}$. Подставим в (1.10) $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{u}}$:

$$\int_{\Omega} \gamma^\varepsilon (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 dx + \varepsilon^2 \lambda b^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \hat{f}_i \hat{u}_i dx - \lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{u}_i^2 dx.$$

Используя (1.9), возьмем вещественную часть. Тогда получим $\varepsilon^2 \| \hat{\mathbf{u}} \|_{\mathbb{H}_0^1} \leq P(|\lambda|)$, P — полином. Кроме того, $\hat{\mathbf{u}}(\lambda)$ — голоморфная

функция от λ со значениями в \mathbb{H}_0^1 , и поэтому $\mathbf{u}^\varepsilon(t)$ получается обратным преобразованием Лапласа (здесь используется теорема Л.Шварца: для того, чтобы аналитическая в полуплоскости $Re p > s_0$ функция $F(p)$ была преобразованием Лапласа некоторой обобщенной функции f с носителем на полуоси $t \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $|F(p)|$ в этой полуплоскости не превосходил некоторой степени $|p|^n$, [30]).

1.4. Слабая двухмасштабная сходимость

Возьмем в (1.10) $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{u}}$:

$$(1.12) \quad \lambda^2 \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{u}_i^2 dx + \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 dx + \varepsilon^2 \lambda^2 b^\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \hat{f}_i \hat{u}_i dx.$$

Тогда при фиксированном $Re \lambda > 1$ получим

$$C_1 \int_{\Omega} \hat{u}_i^2 dx + C_2 \int_{\Omega} \gamma^\varepsilon (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 dx + C_3 \varepsilon^2 \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \leq C_4 \|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbb{L}_2}^2 + \frac{1}{C_4} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{L}_2}^2$$

или, подбирая $Re \lambda$,

$$\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{L}_2}^2 + \|\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{L}_2}^2 + \varepsilon^2 \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \leq C \|\hat{\mathbf{f}}\|_{\mathbb{L}_2}^2.$$

Отсюда имеем

$$(1.13) \quad \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{L}_2} \leq C, \quad \|\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{L}_2} \leq C, \quad \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{H}_0^1} \leq C/\varepsilon.$$

Воспользуемся теоремой ([10], [36]):

Теорема (Нгуэтсенг). *Если $\mathbf{v}_\varepsilon(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, $\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} < C$, $\varepsilon \|\nabla_x \mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} < C$ и $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$, то из последовательности $\{\mathbf{v}_\varepsilon(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\mathbf{v}_{\varepsilon'}(x)\}$ такую, что*

$$\mathbf{v}_{\varepsilon'}(x) \rightarrow \mathbf{v}_0(x, \xi) \text{ двухмасштабно при } \varepsilon' \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon \nabla_x \mathbf{v}_{\varepsilon'}(x) \rightarrow \nabla_\xi \mathbf{v}_0(x, \xi) \text{ двухмасштабно при } \varepsilon' \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{v}_0(x, \xi) \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{H}_{per}^1(Y))$ (т.е. $\mathbf{v}_0(x, \xi)$ принадлежит \mathbb{H}^1 и периодична с периодом Y по переменной ξ)

Таким образом, применив обратное преобразование Лапласа, получим, что верна

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.3), (1.4), тогда из последовательности функций $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\mathbf{u}^{\varepsilon'}\}$, что

$$(1.14) \quad \mathbf{u}^{\varepsilon'}(x, t) \xrightarrow{2} \mathbf{u}^0(x, \xi, t) \text{ двухмасштабно при } \varepsilon' \rightarrow 0$$

$$(1.15) \quad \varepsilon \nabla_x \mathbf{u}^{\varepsilon'}(x, t) \xrightarrow{2} \nabla_\xi \mathbf{u}^0(x, \xi, t) \text{ двухмасштабно при } \varepsilon' \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{u}^0(x, \xi) \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{H}_{per}^1(Y))$. Кроме того, в [1] доказано, что

$$(1.16) \quad p^\varepsilon(x, t) = -\gamma^\varepsilon(x) \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon(x, t) \xrightarrow{L_2(\Omega)} p^*(x, t) \text{ сильно,}$$

где $p^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.3), (1.4). Здесь $Y = [0, 1]^d$.

1.5. Задача на ячейке, динамический закон Дарси

Подставим в (1.10) $\mathbf{w} = \phi(x) \mathbf{\Phi}(\frac{x}{\varepsilon})$, где $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathbf{\Phi}(\xi) \in (C_{per}^\infty(Y))^d$, $\operatorname{div} \mathbf{\Phi}(\xi) = 0$, и перейдем по теореме 1 к двухмасштабному пределу по соответствующей подпоследовательности:

$$(1.17) \quad \lambda^2 \int_{\Omega \times Y} \rho(\xi) \hat{u}_i^0(x, \xi) \Phi_i(\xi) \phi(x) dx d\xi - \int_{\Omega \times Y} p^*(x) \mathbf{\Phi}(\xi) \nabla \phi(x) dx d\xi +$$

$$+ \lambda \int_{\Omega \times Y} b_{ijkl}^\xi e_{ij}^\xi(\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi)) e_{kl}^\xi(\mathbf{\Phi}(\xi)) \phi(x) dx d\xi = \int_{\Omega \times Y} \hat{f}_i \Phi_i(\xi) \phi(x) dx d\xi,$$

отсюда, пользуясь произвольностью выбора $\phi(x)$, получаем

$$(1.18) \quad \lambda^2 \int_Y \rho(\xi) \hat{u}_i^0(x, \xi) \Phi_i(\xi) \phi(x) d\xi - \left(\hat{f}_i - \frac{\partial p^*(x)}{\partial x_i} \right) \int_Y \Phi_i(\xi) d\xi +$$

$$+ \lambda \int_Y b_{ijkl}^\xi e_{ij}^\xi(\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi)) e_{kl}^\xi(\mathbf{\Phi}(\xi)) d\xi = 0.$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{\Phi}(\xi) = 0$, то по определению b_{ijkl} (1.8)

$$(1.19) \quad \lambda^2 \int_Y \rho(\xi) \hat{u}_i^0(x, \xi) \Phi_i(\xi) \phi(x) d\xi - \left(\hat{f}_i - \frac{\partial p^*(x)}{\partial x_i} \right) \int_Y \Phi_i(\xi) d\xi +$$

$$+ \lambda \int_Y 2\mu \frac{\partial \hat{u}_i^0(x, \xi)}{\partial \xi_j} \frac{\partial \Phi_i(\xi)}{\partial \xi_j} d\xi = 0.$$

Введем функцию $\mathbf{z}^\varepsilon(x)$ такую, что $\int_{\Omega} z_i^\varepsilon(x) \Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} \hat{u}_i^\varepsilon \frac{\partial \Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x)}{\partial x_i} dx$ для пробных функций $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Phi(\xi) \in C_{per}^\infty(Y)$, где $\partial \Phi(\xi) / \partial \xi_i = 0$ для какого-либо фиксированного i . Так как $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon$ ограничена в $\mathbb{L}_2(\Omega)$ то, переходя к двухмасштабному пределу, получим

$$\int_{\Omega \times Y} z_i^0(x) \Phi(\xi) \phi(x) dx d\xi = - \int_{\Omega \times Y} \hat{u}_i^0(x, \xi) \Phi(\xi) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} dx d\xi.$$

То есть, существует функция $\mathbf{z}^0(x) \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ такая, что $\nabla_x \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) = \mathbf{z}^0(x)$. Следовательно, верна

Лемма 1. В теореме 1 $\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) \in \mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}_{per}^1(Y))$.

Запишем $\operatorname{div}_x \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon = -\frac{p^\varepsilon(x)}{\gamma^\varepsilon(x)}$ и, взяв пробную функцию $\varepsilon \Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x)$, $\Phi(\xi) \in C_{per}^\infty(Y)$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon \nabla_x (\varepsilon \Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x)) dx = \varepsilon \int_{\Omega} \frac{p^\varepsilon(x)}{\gamma^\varepsilon(x)} \Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x) dx,$$

перейдем по теореме 1 к двухмасштабному пределу по соответствующей подпоследовательности (правая часть равенства стремится к нули при $\varepsilon \rightarrow 0$):

$$\int_{\Omega \times Y} \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) \nabla_\xi \Phi(\xi) \phi(x) dx d\xi = 0.$$

Следовательно, в силу произвольности пробных функций, верна

Лемма 2. В теореме 1

$$(1.20) \quad \operatorname{div}_\xi \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) = 0.$$

Будем искать решение в виде $\hat{u}_i^0(x, \xi) = G^j(\xi) F_j(x)$. Подставляя в (1.19) получим, что решение представимо в виде

$$(1.21) \quad \hat{u}_i^0(x, \xi) = \sum_{p=1}^{p=d} \hat{N}_i^p(\xi) \left(\hat{f}_p(x) - \frac{\partial p^*(x)}{\partial x_p} \right),$$

где $\hat{\mathbf{N}}^p \in \mathbb{H}_{per}^1(Y)$ — решения задач на ячейке периодичности:

$$(1.22) \quad \lambda^2 \rho(\xi) \hat{\mathbf{N}}^p(\xi) + \nabla Q - \lambda \mu \Delta \hat{\mathbf{N}}^p + \mathbf{e}_p = 0,$$

где \mathbf{e}_p — единичный орт, $\operatorname{div}_\xi \hat{\mathbf{N}}^p(\xi) = 0$, на границе раздела жидкостей выполнены условия типа (1.6), (1.7). Член $\nabla Q, Q \in \mathbb{L}_2$ появляется в связи с тем, что (1.19) выполняется только для пробных функций с нулевой дивергенцией. Существование и единственность решения (1.22) следует из теоремы де Рама и леммы Лакса-Мильграма (см. [36],[37]).

Перейдем к двухмасштабному пределу в равенстве

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^\varepsilon \nabla_x (\Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x)) dx = \int_{\Omega} \frac{p^\varepsilon(x)}{\gamma^\varepsilon(x)} \Phi(\frac{x}{\varepsilon}) \phi(x) dx,$$

имеем $(p^\varepsilon(x) \rightarrow p^*(x) \text{ в } \mathbb{L}_2(\Omega), \text{ а потому сходится и двухмасштабно: } p^\varepsilon(x) \xrightarrow{2} p^*(x))$

$$\int_{\Omega \times Y} \hat{\mathbf{u}}^0 \nabla_x (\Phi(\xi) \phi(x)) dx d\xi = \int_{\Omega \times Y} \frac{p^*(x)}{\gamma(\xi)} \Phi(\xi) \phi(x) dx,$$

отсюда

$$(1.23) \quad \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y p^*(x) + \operatorname{div}_x \langle \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) \rangle_Y = 0,$$

где $\langle \cdot \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y \cdot dx$. Обозначим \mathcal{K} — матрицу, состоящую из элементов

$$(1.24) \quad \mathcal{K}_{ij} = \left\langle \hat{N}_i^j \right\rangle_Y,$$

тогда по (1.21)

$$(1.25) \quad \langle \hat{\mathbf{u}}^0 \rangle_Y = \mathcal{K}(\hat{\mathbf{f}} - \nabla p^*),$$

что является законом Дарси для данной задачи. Подставим последнее выражение в (1.23), умножим на λ и применим обратное преобразование Лапласа. Получим уравнение

$$(1.26) \quad \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x [K(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^*(x, t))] = 0 \text{ в } \Omega,$$

где K — матрица из элементов

$$(1.27) \quad K_{ij} = \left\langle V_i^j \right\rangle_Y,$$

символ $'*$ обозначает операцию свертки: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$, а \mathbf{V}^j — решения задач на ячейке периодичности

$$(1.28) \quad \begin{cases} \rho(\xi) \frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi, t)}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{V}^j(\xi, t) + \nabla q(\xi, t) = 0, \\ \operatorname{div}_\xi \mathbf{V}^j = 0, \\ \mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \\ \sigma(\mathbf{V}^{j1}) \cdot \mathbf{n}|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2}) \cdot \mathbf{n}|_S, \\ \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}, \end{cases}$$

где $\mathbf{V}^j \in \mathbb{H}_{per}^1(Y)$, $\sigma_{ij} = \delta_{ij}q + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{ij}e_{kl}$.

Кроме того, так как $\mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$, то $\langle \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) \rangle_Y \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. В [36] показано, что граничное условие вида $(\mathbf{u}^\varepsilon, \nu)|_{\partial\Omega} = 0$ наследуется слабым пределом \mathbf{u}^0 в $\mathbb{H}^1(\Omega)$, следовательно получаем граничное условие для уравнения (1.26):

$$(1.29) \quad [K(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^*(x, t))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство существования и единственности решения задач (1.26)-(1.29) проводится аналогично задаче (1.3)-(1.4) (см. [36],[37]).

Теорема 2. Пусть $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.3)-(1.4), $\mathbf{u}^0(x, \xi, t)$ — двухмасштабный предел $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$ из теоремы 1, тогда $\mathbf{u}^0(x, \xi, t)$ представимо в виде

$$(1.30) \quad \frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi, t) d\xi = \int_0^t K(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^*(x, s)) ds,$$

где K — матрица из элементов $K_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y V_i^j d\xi$, \mathbf{V}^i — решения задач (1.28), а $p^*(x, t)$ — решение задачи (1.26), (1.29).

1.6. Сильная двухмасштабная сходимость $\hat{\mathbf{u}}, \varepsilon \nabla_x \hat{\mathbf{u}}$

Подставим в (1.10) предельную функцию $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{u}}^0(x, \frac{x}{\varepsilon})$ и перейдем по теореме 1 к двухмасштабному пределу по соответствующей подпоследовательности:

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \lambda^2 \int_{\Omega \times Y} \rho(\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi))^2 dx d\xi + \int_{\Omega \times Y} p^*(x) \operatorname{div}_x \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) dx d\xi + \\ + \lambda^2 b^\xi(\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi), \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi)) = \int_{\Omega \times Y} \hat{\mathbf{f}}(x) \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

С другой стороны, подставим в (1.10) допредельное решение $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{u}}(x)$ и возьмем предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, пользуясь по определению сильной двухмасштабной сходимости тем, что если f сходится двухмасштабно сильно, а g — слабо, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, \frac{x}{\varepsilon}) g(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega \times Y} f(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi$:

$$(1.32) \quad \begin{aligned} & \lambda^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho^{\varepsilon} \hat{\mathbf{u}}^2 dx + \int_{\Omega \times Y} p^*(x) \operatorname{div}_x \hat{\mathbf{u}}^0 dx d\xi + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \lambda b^{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega \times Y} \hat{\mathbf{f}}(x) \hat{\mathbf{u}}^0(x, d\xi) dx d\xi \end{aligned}$$

При получении (1.31), (1.32) мы используем тот факт (см. [36], [25]), что если последовательность сходится в L_2 (в данном случае — $p^{\varepsilon}(x)$), то она сходится и в смысле сильной двухмасштабной сходимости. В свою очередь, функция $\hat{\mathbf{f}}(x)$ вообще не зависит от параметра ε , а потому сходится в смысле сильной двухмасштабной сходимости автоматически.

Так как по теореме 1 $\hat{\mathbf{u}} \xrightarrow{2} \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi)$, $\varepsilon \nabla_x \hat{\mathbf{u}} \xrightarrow{2} \nabla_{\xi} \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi)$ слабо при $\varepsilon \rightarrow 0$, то по [25] выполнены неравенства

$$(1.33) \quad \begin{aligned} & \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^2(x) dx \geq \int_{\Omega \times Y} (\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi))^2 dx d\xi, \\ & \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla_x \hat{\mathbf{u}}(x))^2 dx \geq \int_{\Omega \times Y} (\nabla_{\xi} \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi))^2 dx d\xi. \end{aligned}$$

В (1.31), (1.32) интегралы с p^* равны, остальные члены в левых частях положительны, а правые части тождественны. Отсюда, пользуясь (1.33), заключаем, что

$$(1.34) \quad \begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^2(x) dx = \int_{\Omega \times Y} (\hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi))^2 dx d\xi, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla_x \hat{\mathbf{u}}(x))^2 dx = \int_{\Omega \times Y} (\nabla_{\xi} \hat{\mathbf{u}}^0(x, \xi))^2 dx d\xi. \end{aligned}$$

Далее, в [25] показано, что из равенства $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_{\varepsilon}(x) dx = \int_{\Omega \times Y} v^2(x, \xi) dx d\xi$

для слабо двухмасштабно сходящейся последовательности $v_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} v(x, \xi)$ следует сильная двухмасштабная сходимости $v_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} v(x, \xi)$

$v(x, \xi)$, и что если $v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x, \xi)$ двухмасштабно сильно, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (v_\varepsilon(x) - v(x, x/\varepsilon))^2 dx = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть $\mathbf{u}^\varepsilon(x, t), p^\varepsilon(x, t)$ — решение задачи (1.3), (1.4), $\mathbf{u}^0(x, \xi, t)$ — из теоремы 1, тогда

$$(1.35) \quad \begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}^\varepsilon(x, t) - \mathbf{u}^0(x, x/\varepsilon, t)\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = 0, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon(x, t) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \mathbf{u}^0(x, x/\varepsilon, t)\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = 0, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p^\varepsilon(x, t) - p^*(x, t)\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Глава 2

Спектральные вопросы

2.1. Основные уравнения

При рассмотрении усредненных моделей комбинированных сред возникает естественный вопрос: как устроен спектр собственных колебаний ограниченного объема, заполненного материалом, динамика которого описывается одним из упомянутых выше законов (закон Дарси, закон Био, вязкоупругий закон). В общей постановке для двухмерных и трехмерных моделей задача описания спектра собственных колебаний представляет значительные трудности. Эта задача имеет сходство с задачами теории колебаний вязкоупругих сред, которая рассмотрена, например, в [32], где проведен анализ спектров пространственных задач вязкоупругости. Однако, в этой работе рассматривается случай ядер свертки в виде суммы конечного числа экспонент, что недостаточно для задач теории усреднения, исследуемых в настоящей работе. Но если при анализе спектральных вопросов ограничиться рассмотрением только одномерных колебаний среды, то задача эффективного описания свойств спектров собственных колебаний поддается решению сравнительно простыми методами. Они получены в предположении, что смещения рассматриваемой среды направлены только по одной из осей координат Ox_1 и величины компонент смещений и давления зависят только от переменных t, x_1 . Приведем формулировки некоторых теорем, относящихся к вопросам описания спектров указанных одномерных собственных колебаний. Данные ниже формулировки задач являются одномерными вариантами задач для усредненных моделей в случае динамического закона Дарси или вязкоупругого закона.

Рассмотрим следующие краевые задачи для интегро-дифференци-

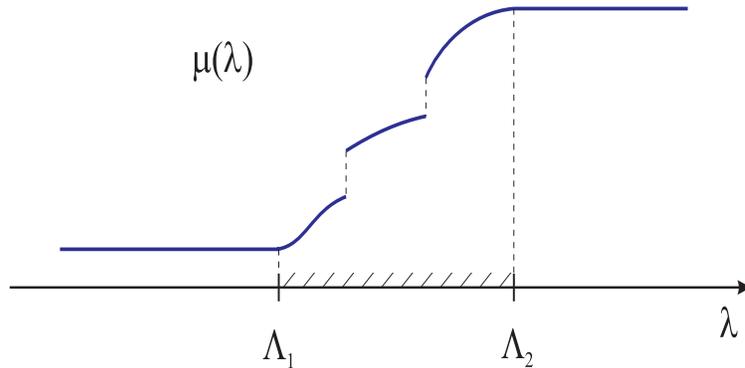
альных уравнений с нелокальными членами типа свертки:

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^t e^{-a_k(t-s)} u_{xx}(s, x) ds + f(t, x), \\ u|_{t<0} \equiv 0, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \\ a_k > 0, \quad c_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty \\ \text{(или } \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{a_k} < \infty); \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_{txx} - \int d\mu(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} u_{xx}(s, x) ds + f(t, x), \\ u|_{t<0} \equiv 0, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0; \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} u_t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^t e^{-a_k(t-s)} u_{xx}(x, s) ds + f(t, x), \\ u|_{t<0} \equiv 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ a_k > 0, \quad b_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \\ \text{(или } \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty, \text{ но } \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \infty). \end{cases}$$

Мера $\mu(\lambda)$ с компактным носителем в (2.2) определяется монотонной функцией, изображенной на рисунке.



Отметим, что ряд результатов о корректной разрешимости интегродифференциальных уравнений с операторными коэффициентами, являющихся обобщением задачи (2.1) установлен в [14], [23]. Уравнение (2.1) описывает процесс распространения тепла в средах с памятью (подробнее см. [5]). В настоящее время уравнение вида (2.1) нередко

называют уравнением Гуртина-Пипкина. Задача вида (2.3) изучалась Л. Пандолфи [12] (там же см. библиографию и комментарии).

Заметим, что условия $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$, но $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{a_k} < \infty$ эквивалентны принадлежности ядра свертки $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a_k t}$ пространствам $W^{1,1}(\mathbb{R})$ и $L^1(\mathbb{R})$ соответственно. В настоящей работе мы не останавливаемся на вопросах существования и единственности решений указанных задач и принадлежности их к определенным функциональным пространствам. Это — предмет отдельного исследования. Отметим только, что нетрудно доказать существование слабых решений в смысле теории обобщенных функций.

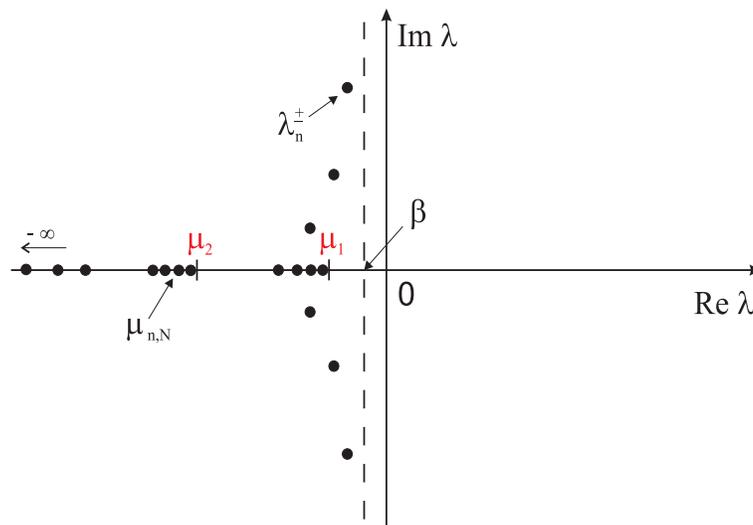
Из уравнений (2.1), (2.2) уравнение (2.3) можно получить интегрированием.

2.2. Основные типы спектральных структур

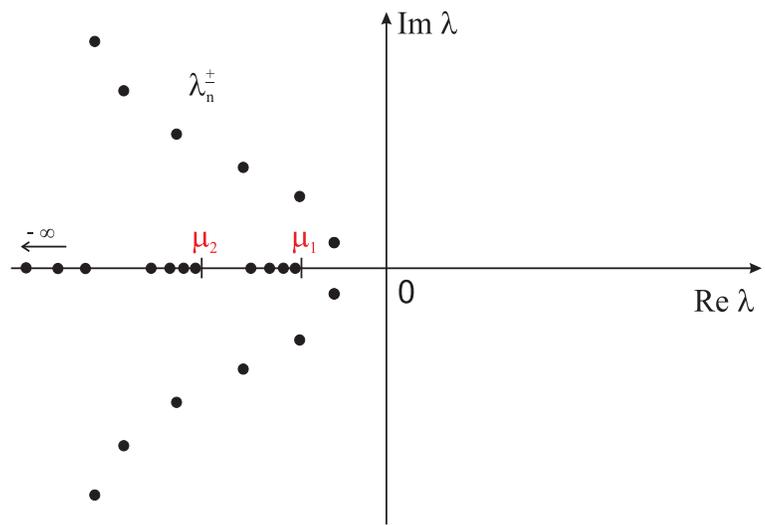
Под спектром σ каждой из приведенных задач мы будем понимать множество комплексных чисел $\sigma \in \mathbb{C}$, таких, что краевая задача, полученная из краевых задач (2.1)–(2.3) преобразованием Лапласа при $f(t, x) = 0$, имеет при $\lambda \in \sigma$ отличное от тождественного нуля решение.

Введем три вида спектральных структур, которые будут участвовать в формулировках теорем о спектральных свойствах задач (2.1)–(2.3). Мы будем условно называть эти структуры «крестом», «лилией» и «шпагой». Они изображены на следующих рисунках:

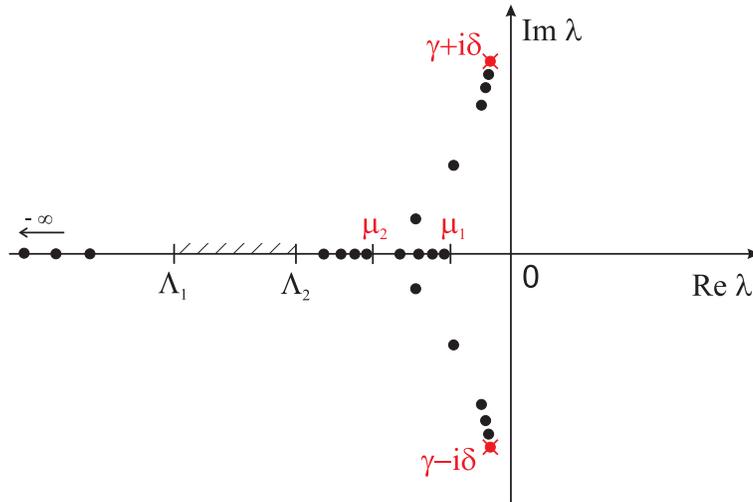
«крест»



«ЛИЛИЯ»



«шпага»



Каждая из упомянутых спектральных структур состоит из двух частей: вещественной и комплексной.

В спектральной структуре типа «крест» вещественная часть спектра состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам μ_N , кроме того может существовать серия уходящая на бесконечность; комплексная часть спектра состоит из серии комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , мнимая часть которых $Im\lambda_n^\pm$ уходит на бесконечность, а действительная $Re\lambda_n^\pm$ имеет вертикальную асимптоту $Re\lambda = \beta$, где

$$(2.4) \quad \beta = -\frac{1}{2} \frac{\|\nabla\rho\|_{L_2(Y)}^2}{\|\rho\|_{L_2(Y)}^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i}.$$

В спектральной структуре типа «лилия» вещественная часть спектра, как и в случае структуры «крест», состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам μ_N , кроме того может существовать серия уходящая на бесконечность; комплексная часть спектра состоит комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , у которых и мнимые, и действительные части уходят на бесконечность.

В спектральной структуре типа «шпага» вещественная часть спектра состоит из счетного числа серий $\mu_{n,N}$, сходящихся к своим предельным точкам μ_N , может существовать серия уходящая на бесконечность, и может существовать отрезок $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ с непрерывной частью спектра;

комплексная часть спектра может либо отсутствовать, либо состоять из конечного числа комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , либо из счетного числа комплексносопряженных собственных значений λ_n^\pm , имеющих своими конечными пределами точки $\gamma \pm i\delta$, формула для которых дана ниже в теореме.

Разделение спектра на вещественную и комплексную части соответствует двум видам собственных движений изучаемой среды — затуханию без колебаний и колебательным движениям. Структура, состоящая из «серий» на вещественной прямой, аналогична спектру в известной задаче о «двойной пористости», рассмотренной в [?]. Описание комплексной части спектра содержится в трех приведенных ниже теоремах о поведении спектров. Сначала введем следующее

Определение. *Положим*

$$(2.5) \quad f_N(\lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{\mu(\lambda_{j+1}) - \mu(\lambda_j)}{\lambda - \lambda_j}, \quad \lambda_j = \Lambda_1 + j \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{N},$$

где $\mu(\lambda)$ — мера, задаваемая монотонной кусочно-непрерывной функцией в (2.2), и рассмотрим корни уравнения $f_N(\lambda) = -\alpha\lambda - 1$. Обозначим через δ_j^N расстояние от λ_j до ближайшего упомянутого корня справа. Пусть

$$(2.6) \quad F_N = \sum_{j=1}^N \delta_j^N, \quad \Phi_N = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j^N}{\lambda_j}.$$

Определим теперь величины $F(\mu)$, $\Phi(\mu)$, являющиеся функционалами от μ :

$$(2.7) \quad \begin{cases} F(\mu) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \delta_j^N, \\ \Phi(\mu) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j^N}{\lambda_j}. \end{cases}$$

Теорема 4. *Положим $F(\lambda) = \int \frac{d\mu(\tilde{\lambda})}{\lambda - \tilde{\lambda}}$. Тогда*

- 1) *если уравнение $F(\lambda) = -\alpha\lambda - 1$ при $\lambda \in R[\Lambda_1, \Lambda_2]$ не имеет корней, то спектр (называемый нами «шпагой») содержит бесконечное количество пар комплексносопряженных корней.*

В противном случае спектр содержит конечное количество пар

комплексносопряженных корней. Оно равно количеству натуральных чисел n , для которых уравнение $F(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{n^2} - \alpha\lambda - 1$ имеет только один корень. В случае, когда таких натуральных значений нет, комплексная составляющая спектра отсутствует.

2) для предельных значений $\gamma + i\delta$, $\gamma - i\delta$ комплексной части спектра, соответствующей структуре, называемой «шпагой» (когда количество комплексных собственных значений бесконечно), имеют место формулы

$$(2.8) \quad \begin{aligned} 2\gamma &= \Lambda_2 + F(\mu), \\ \gamma^2 + \delta^2 &= \alpha\Lambda_2 e^{\Phi} \left(1 - \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Теорема 5. Для предельного поведения комплексных собственных значений λ_n^{\pm} , соответствующих структуре, называемой «крест», имеет место асимптотическая формула

$$(2.9) \quad \lambda_n^{\pm} = \pm in - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Для собственных значений вещественной части спектра (в случае «креста») имеет место асимптотическая формула

$$(2.10) \quad \mu_{n,N} = \mu_N + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $\mu_{n,N}$ — n -е собственное значение в N -й «серии», μ_N — N -й вещественный корень уравнения $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\mu + a_j} = 1$.

Теорема 6. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{a_k}$ сходится и имеют место равенства $c_k = \frac{1}{k^{\alpha}}$, $a_k = k^{\beta}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$. Положим $r = \frac{\alpha + \beta - 1}{\beta}$.

Тогда для комплексной части спектра (который мы в этом случае называем «линией») имеют место формулы

$$(2.11) \quad \lambda_n^{\pm} = \pm in - c_r n^{1-r} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad r < 1;$$

$$(2.12) \quad \lambda_n^\pm = \pm in - \frac{1}{2} \ln n + O\left(\frac{1}{n} \ln^2 n\right), \quad r = 1.$$

Отметим, что строгое доказательство теоремы 5 получено В.В. Власовым и Г.Р. Кибировой, а теоремы 6 — С.А. Ивановым. Уравнению вида (2.1) при условии $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$ соответствует спектральная структура типа «крест»; а при условии $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty$, но $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{a_k} < \infty$, соответствует, по-видимому, спектральная структура типа «лилия» (это доказано строго для случая $c_k = \frac{1}{k^\alpha}$, $a_k = k^\beta$). Уравнению (2.2) соответствует спектральная структура типа «шпага», а уравнению (2.2) при условии $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < \infty$ — спектральная структура типа «крест», а при условии $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \infty$, но $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, — по-видимому, спектральная структура типа «лилия» (это строго доказано для $b_k = k^{-\alpha+\beta}$, $a_k = k^\beta$).

Динамический закон Дарси для смеси двух слабвязких сжимаемых жидкостей приводит к уравнению (2.3) с условиями $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, если переменная плотность неоднородной жидкости является непрерывной функцией; и с условиями $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, если плотность неоднородной жидкости — разрывная функция. Заметим, что уравнение (2.3) после дифференцирования по времени принимает вид (2.1).

Вязкоупругий закон для среды «упругий материал–вязкая жидкость конечной вязкости» и усредненная модель для перфорированного материала Кельвина-Фойгхта приводят к задаче (2.2).

Вышеизложенные теоремы дают полную качественную картину спектров для одномерных по пространственным переменным задач (2.1)–(2.3). При этом остается неясным, все ли случаи поведения комплексной части спектра действительно реализуются для конкретных задач теории комбинированных сред. Так, например, остается вопрос о том, возможно ли бесконечное количество точек комплексного спектра для усредненной модели перфорированного материала Кельвина-Фойгхта, а также реализуется ли в действительности спектральная

структура типа «лилия» для микстуры из двух слабовязких сжимаемых жидкостей: случай, когда $c_k = \frac{1}{k^\alpha}$ и $a_k = k^\beta$ — модельный и такие точные равенства в реальной задаче места не имеют; имеют место только степенные оценки сверху или асимптотика.

Формулы для ядер сверток в случае динамического закона Дарси приводят к интересной формуле: $\beta = -\frac{1}{2} \frac{\|\nabla \rho(y)\|_{L_2(Y)}}{\|\rho(y)\|_{L_2(Y)}}$, где β — предел вещественных частей комплексных собственных значений спектра данной задачи. Если плотность постоянна, то спектр задачи целиком лежит на мнимой оси и диссипация энергии в нулевом приближении исчезает. Если $\rho(y) \notin H^1(Y)$, то приведенная формула для величины β теряет смысл, структура спектра типа «крест» превращается в структуру типа «лилия».

Закон Био представляет собой систему уравнений, поэтому исследование его спектральных свойств — отдельный вопрос. Интересны некоторые результаты, полученные в [29], однако в этой работе использовано существенное упрощающее предположение — ядра сверток в нелокальных членах представляют собой суммы конечного числа экспонент. В этом случае получается спектральная структура типа «крест». Для бесконечного числа экспонент ответ неизвестен даже в одномерном по пространственным переменным случае.

2.3. Анализ акустического уравнения

Изучим подробнее акустическое уравнение (1.26), приведем его к виду (2.3), рассмотрим его спектральные свойства и связь с уравнениями (2.1), (2.2). Под спектром понимается множество комплексных чисел σ таких, что краевая задача, полученная из (1.26) преобразованием Лапласа, имеет при $\lambda \in \sigma$ отличное от тождественного нуля решение.

Выведем уравнение на точки спектра. Для этого разложим решение уравнения (1.28) по собственным функциям:

$$(2.13) \quad \mathbf{V}^j(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^j e^{-\lambda_k t} \psi_k(\xi),$$

где $\lambda_k > 0$, $\psi_k(\xi)$ — собственные значения и собственные функции спектральной задачи типа Стокса

$$(2.14) \quad \begin{cases} -\mu \Delta \psi_k + \nabla q_k = \rho \lambda_k \psi_k, \\ \operatorname{div} \psi_k = 0, \psi_k - Y\text{-периодична,} \end{cases}$$

а коэффициенты разложения

$$(2.15) \quad v_k^j = \int_Y (\mathbf{V}^j(\xi, 0), \psi_k(\xi)) d\xi = \int_Y \left(\frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}, \psi_k(\xi) \right) d\xi,$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^d . Тогда по определению матрицы $K(t)$ (1.27)

$$(2.16) \quad K_{ij} = \left\langle V_i^j \right\rangle_Y = \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_Y \left(\frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}, \psi_k(\xi) \right) d\xi \right] e^{-\lambda_k t} \psi_k(\xi) \right) \right\rangle_{i' \ Y}.$$

Рассмотрим уравнение (1.26) в одномерном случае, полагая $f(x, t) = 0$:

$$(2.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial t} - K(t) * p_{xx}^*(x, t) = 0, \\ p|_{t < 0} \equiv 0, p^*(0, t) = p^*(1, t) = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$(2.18) \quad \begin{aligned} K(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a^i t}, \\ \text{где } c_i &= \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_i(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_i(\xi) \rangle_Y, \\ a^i &= \lambda_i. \end{aligned}$$

Разложим функцию p^* по собственным функциям $\phi_i(x)$ задачи Дирихле на отрезке $[0, 1]$

$$p^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) \phi_i(x)$$

и подставим в (2.17), применяя преобразование Лапласа $\hat{\cdot}$:

$$(2.19) \quad \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \hat{p}_i(\lambda) \phi_i(x) + \hat{K}(\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \hat{p}_i(\lambda) \phi_i(x) = 0.$$

Здесь γ_i — собственные числа задачи Дирихле на отрезке,

$$(2.20) \quad \hat{K}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda + a^i}.$$

Так как система функций $\{\phi_i\}$ полна и ортогональна в $L_2[0, 1]$ [33], то уравнение (2.19) эквивалентно уравнениям

$$(2.21) \quad \lambda + \gamma_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda + a^i} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

которые и являются искомыми уравнениями на точки спектра уравнения (1.26).

2.4. Исследование уравнения на точки спектра

Перепишем (2.21) в виде

$$(2.22) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda + a^i} = -\frac{\lambda}{\gamma_k}.$$

Известна асимптотика чисел γ_k , собственных чисел задачи Дирихле на отрезке, и a^i , собственных чисел задачи типа Стокса (2.14) [33], [19], [8]:

$$(2.23) \quad \gamma_k \sim k^{2/n}, a^i \sim i^{2/n},$$

где n — размерность пространства.

Коэффициенты c_i (2.18) не имеют асимптотики, но можно оценить их сверху, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и ортонормированностью $\{\psi_i\}$, следующим образом

$$(2.24) \quad c_i \leq \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\| \frac{1}{\rho(\xi)} \right\|_{L_2(Y)} \|\psi_i(\xi)\|_{L_2(Y)}^2 = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\| \frac{1}{\rho(\xi)} \right\|_{L_2(Y)}.$$

Кроме того, вследствие полноты системы $\{\psi_i\}$, должно выполняться по равенству Парсеваля

$$(2.25) \quad \sum_{i=1}^{\infty} (v_i^k)^2 < \infty, \text{ следовательно } \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty.$$

Рассмотрим два случая поведения коэффициентов c_i :

$$(2.26) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i < \infty$$

$$(2.27) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i = \infty.$$

Случаи (2.26), (2.27) эквивалентны принадлежности ядра свертки $K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-a_i t}$ пространствам $H^1(\mathbb{R}^+)$ и $L_2(\mathbb{R}^+)$ соответственно.

2.5. Вывод формул для численного анализа макроскопического акустического уравнения

Рассмотрим уравнение

$$(2.28) \quad \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{z + a^i} = -\frac{z}{\gamma_k}.$$

Для нахождения корней (2.28) приведем все дроби к общему знаменателю, получим

$$(2.29) \quad z(z + a^1) \cdot \dots \cdot (z + a^N) + c_1 \gamma_k (z + a^2) \cdot \dots \cdot (z + a^N) + \dots + c_N \gamma_k (z + a^1) \cdot \dots \cdot (z + a^{N-1}) = 0.$$

Степень многочлена (2.29) — $N+1$. По формулам Виета произведение корней (2.29) равно свободному члену, умноженному на $(-1)^{N+1}$:

$$(2.30) \quad z_1 \cdot \dots \cdot z_{N+1} = (-1)^{N+1} \gamma_k \sum_{i=1}^N \left(c_i \prod_{j \neq i} a^j \right) = (-1)^{N+1} \gamma_k \sum_{i=1}^N c_i \frac{B}{a^i}, \quad B = \prod_{j=1}^N a^j,$$

а сумма корней (2.29) равна коэффициенту при z^N с отрицательным знаком. Заметим, что z^N встречается только в первом произведении в (2.29), коэффициент при этом члене есть коэффициент при z^{N-1} в многочлене

$$(2.31) \quad (z + a^1) \cdot \dots \cdot (z + a^N)$$

и равен минус сумме корней (2.31), т.е.

$$(2.32) \quad \sum_{j=1}^{N+1} z_j = - \left(- \sum_{i=1}^N (-a^i) \right) = - \sum_{i=1}^N a^i.$$

Представим комплексные корни (2.29) в виде

$$(2.33) \quad z_N = x + iy, \quad z_{N+1} = x - iy$$

и подставим в (2.32). Тогда $\sum_{j=1}^N a^j = - \sum_{j=1}^{N-1} z_j - 2x$, $z_j \in \mathbb{R}$, отсюда

$$(2.34) \quad x = \frac{-Z - A}{2}, \quad Z = \sum_{j=1}^{N-1} z_j, \quad A = \sum_{j=1}^N a^j.$$

Далее, подставляя (2.33) в (2.30), получим

$$(2.35) \quad x^2 + y^2 = (-1)^{N+1} \gamma_k \sum_{j=1}^N c_j \frac{B}{a^j} / \prod_{j=1}^{N-1} z_j, z_j \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$(2.36) \quad y = \left(\left[(-1)^{N+1} \gamma_k \sum_{j=1}^N c_j \frac{B}{a^j} / \prod_{j=1}^{N-1} z_j \right] - \left(\frac{Z+A}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$(2.37) \quad y = \left(\left[(-1)^{N+1} \gamma_k \sum_{j=1}^N c_j \prod_{i \neq j} a^i / \prod_{j=1}^{N-1} z_j \right] - \left(a^N + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{z_j + a^j}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $z_j \in \mathbb{R}$.

2.6. Численное нахождение спектра акустического уравнения. Результаты расчетов

Обозначим

$$(2.38) \quad P(z) = z + \gamma_k \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{z + a^j}$$

и будем искать корни уравнения $P(z) = 0$. Из (2.28) ясно, что $N - 1$ вещественных корней лежат на отрезках $[-a_{j+1}, -a_j], j = 1, \dots, N - 1$ (по одному на каждом). Воспользуемся методом деления отрезка пополам: рассмотрим $P(b_{j_1})$, где $b_{j_1} = -a^{j+1} + \frac{-a^j + a^{j+1}}{2}$ — середина отрезка $[-a^{j+1}, -a^j]$. Если $P(b_{j_1}) > 0$, то переходим на отрезок $[-a^{j+1}, b_{j_1}]$ (в противном случае — на отрезок $[b_{j_1}, -a^j]$), где смотрим значение $P(z)$ в b_{j_2} — середине нового отрезка, и так далее. Будем считать b_{j_M} корнем уравнения $P(z) = 0$, если длина отрезка, серединой которого является b_{j_M} меньше заданного ε_2 , и при этом $P(b_{j_K})$ уменьшается. Теперь, зная N вещественных корней, можно найти оставшиеся 2 комплексных корня уравнения (2.28) по формулам (2.34), (2.36).

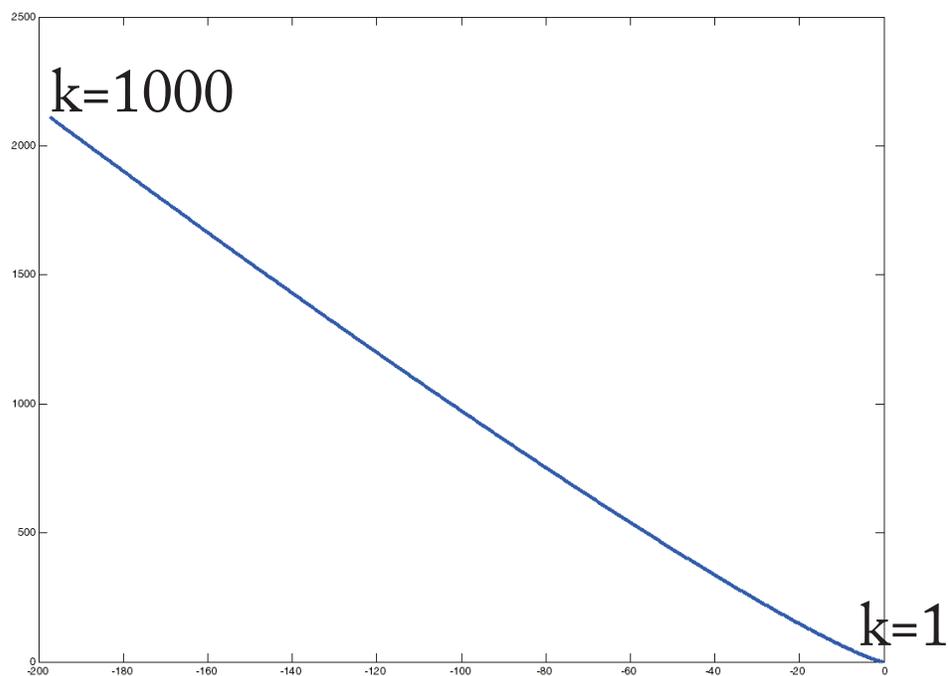
Пусть $k = 1, N = N_{1,0} = 100$. Найдём комплексные корни (2.28) $z_{N_{1,0}}, \bar{z}_{N_{1,0}}$ и будем увеличивать $N_{1,0}$, не меняя k , до тех пор, пока не

будет выполнено $|z_{N_{1,0}} - z_{N_{1,1}}| < \varepsilon_3$, где $\varepsilon_3 > 0$, $z_{N_{1,1}}$ — комплексный корень (2.28) при некотором $N_{1,1} > N_{1,0}$, а k по-прежнему равно 1.

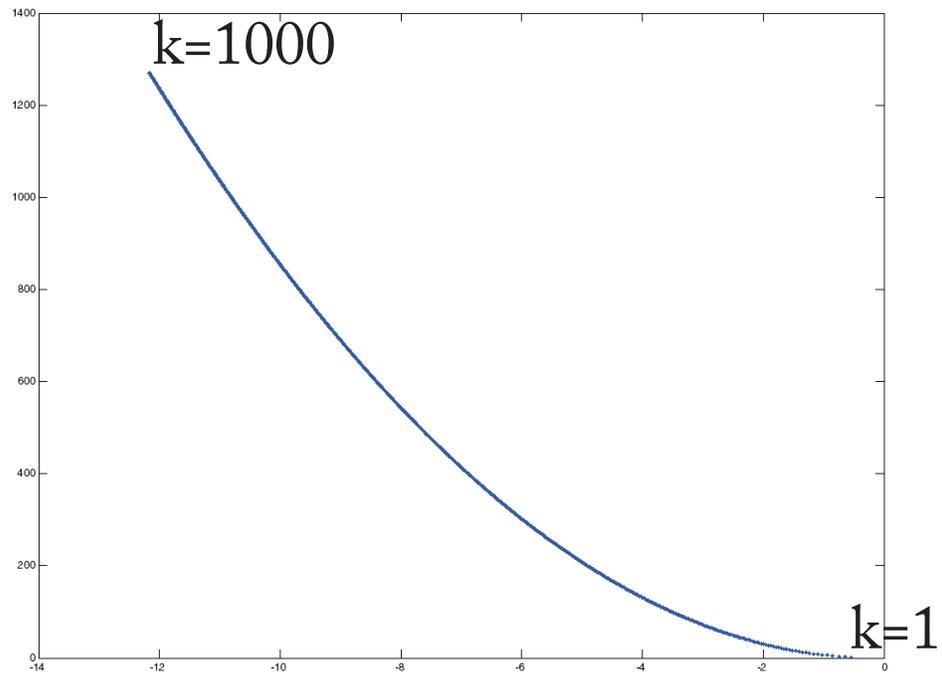
Для произвольного k возьмем $N_{k,0} = N_{k-1,1}$ (при расчетах было замечено, что для "предельных" N выполняется $N_{k+1,1} \geq N_{k,1}$, поэтому при увеличении k начальное $N = N_{k,0}$ берется равным "предельному" для $k - 1$ $N = N_{k-1,1}$) и повторим описанную выше процедуру.

Предположим, что $\varepsilon_2 = 10^{-7}$, $\varepsilon_3 = 10^{-3}$.

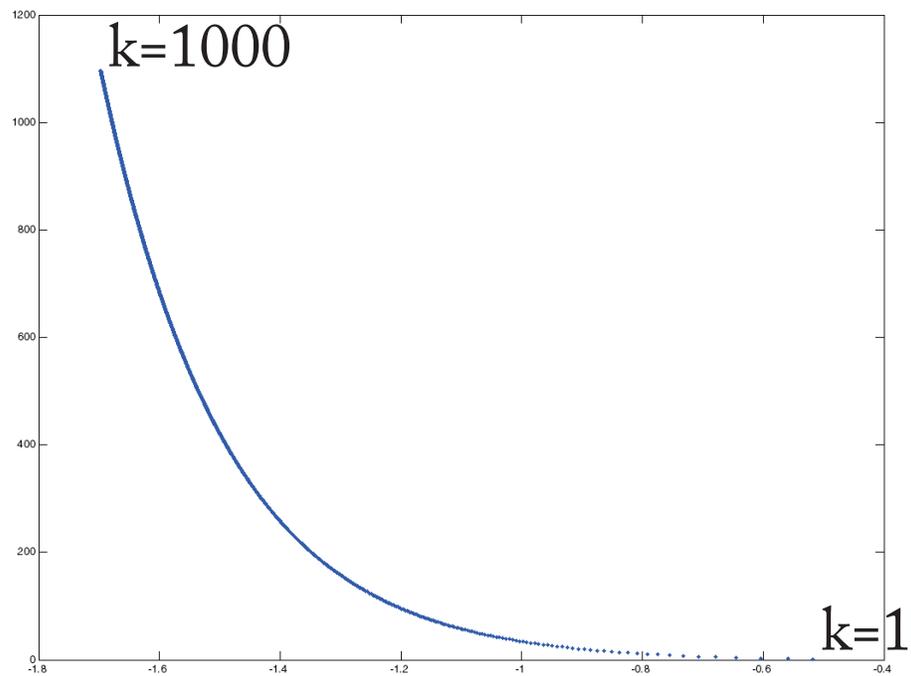
- $\gamma_k \sim k^2$, $a^i \sim i^2$, $c_i \sim \frac{1}{i}$. То есть, γ_k, a^i — собственные числа одномерных задач Дирихле и Стокса соответственно. Тогда численный расчет дает следующее поведение (с ростом k) комплексных точек спектра, т.е. комплексных корней уравнения (2.28) (точка на графике — один из двух комплексносопряженных корней (2.28), найденный при заданном k и N так, что при $N_1 = N + 1$ он не выходит из некоторой ε -окрестности) спектральная структура типа «**ЛИЛИЯ**»



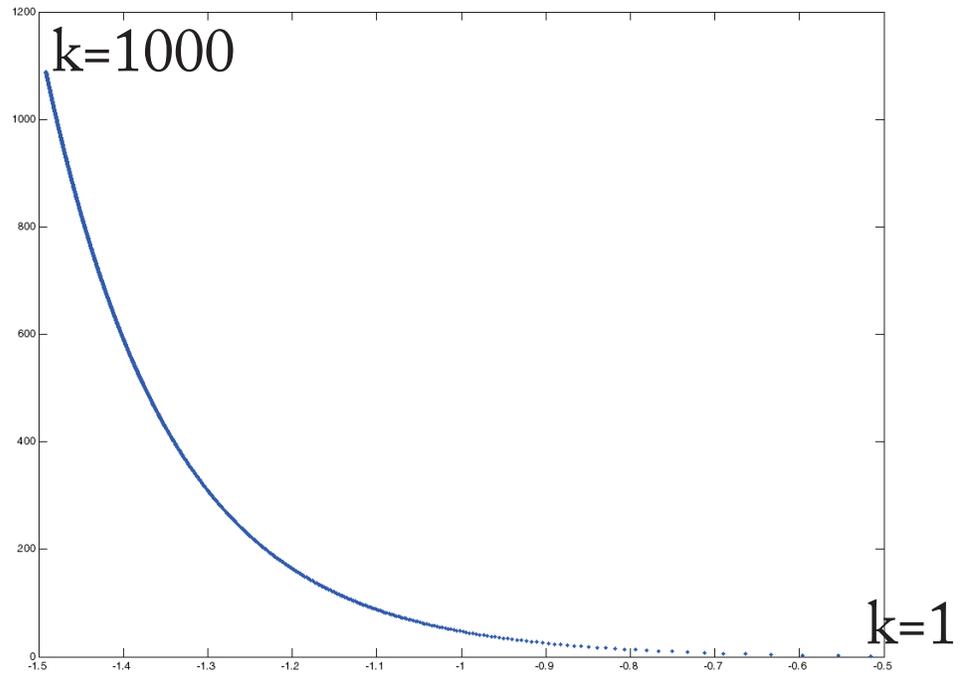
- $\gamma_k \sim k^2, a^i \sim i^2, c_i \sim \frac{1}{i^2}$ (спектральная структура типа «лилия»)



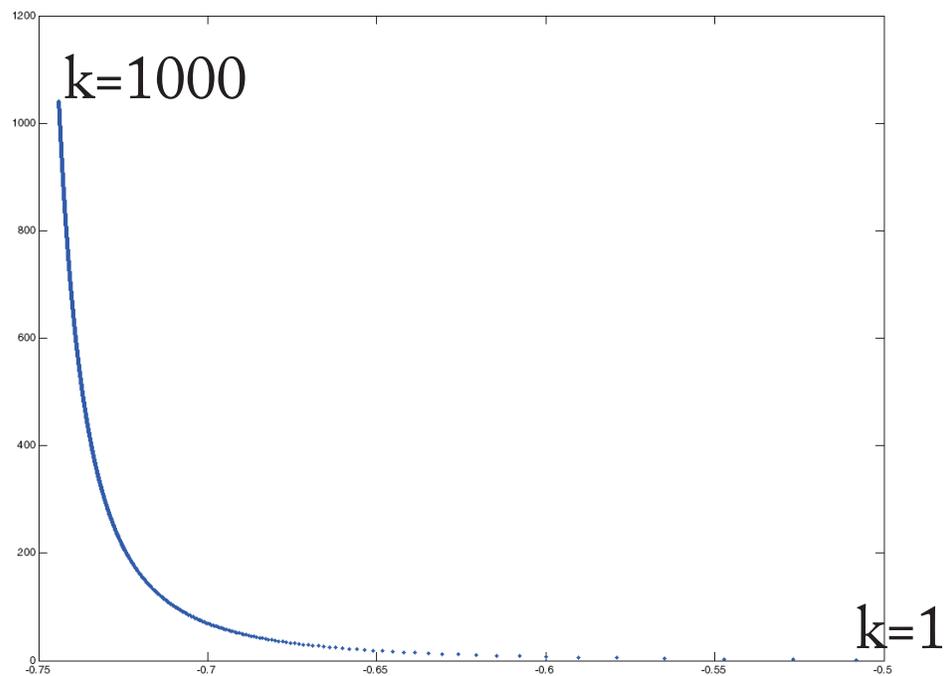
- $\gamma_k \sim k^2, a^i \sim i^2, c_i \sim \frac{1}{i^3}$ (спектральная структура типа «лилия»)



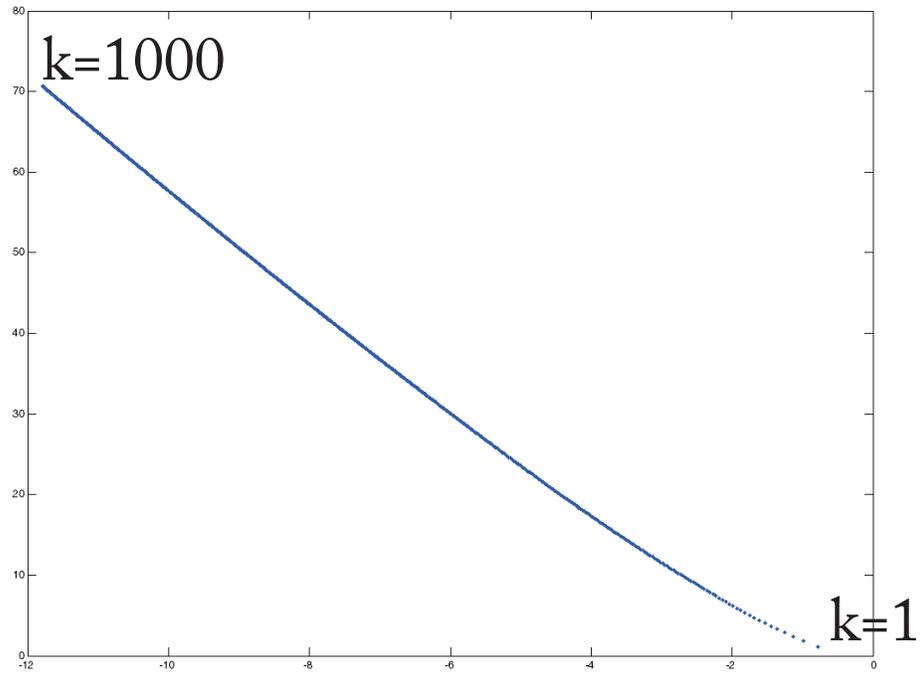
- $\gamma_k \sim k^2, a^i \sim i^2, c_i \sim \frac{1}{i^{3+\varepsilon_1}}, \varepsilon_1 = 0.1$ (спектральная структура типа «крест»)



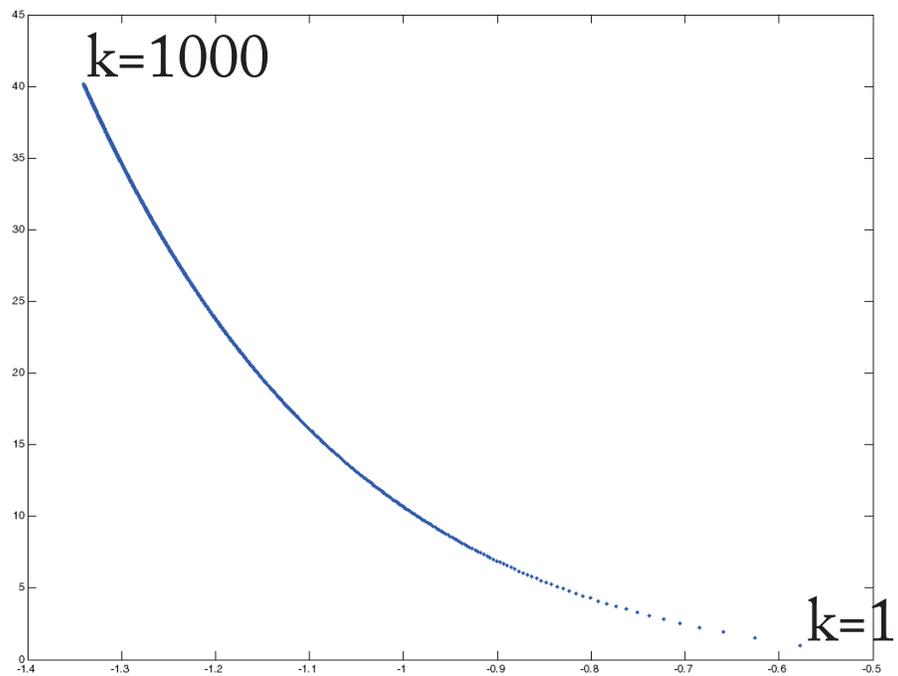
- $\gamma_k \sim k^2, a^i \sim i^2, c_i \sim \frac{1}{i^4}$ (спектральная структура типа «крест»)



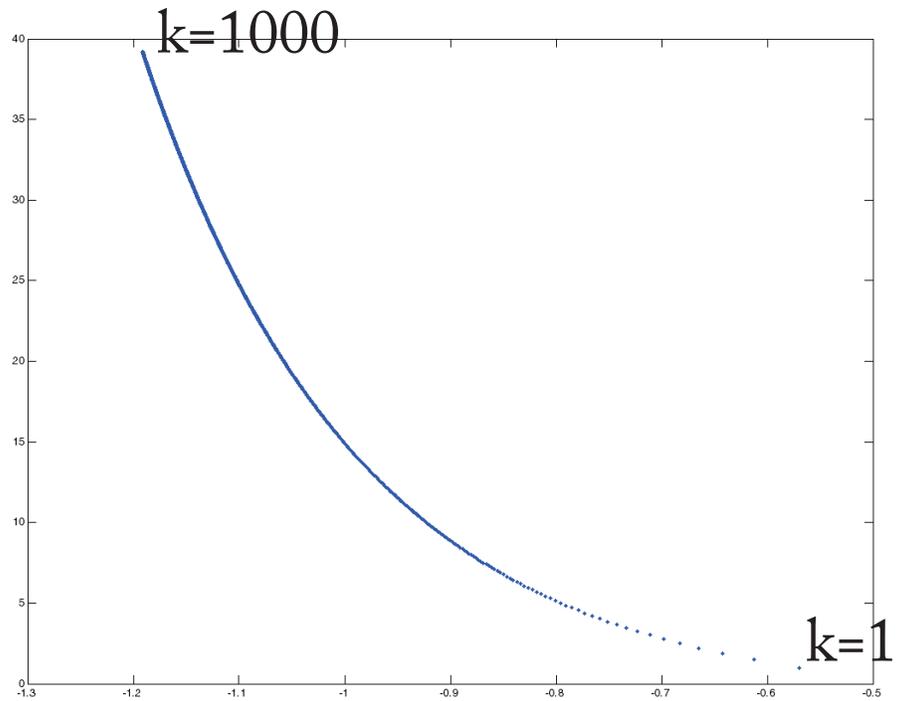
- $\gamma_k \sim k, a^i \sim i, c_i \sim \frac{1}{i}$. Двумерный случай. (спектральная структура типа «ЛИЛИЯ»)



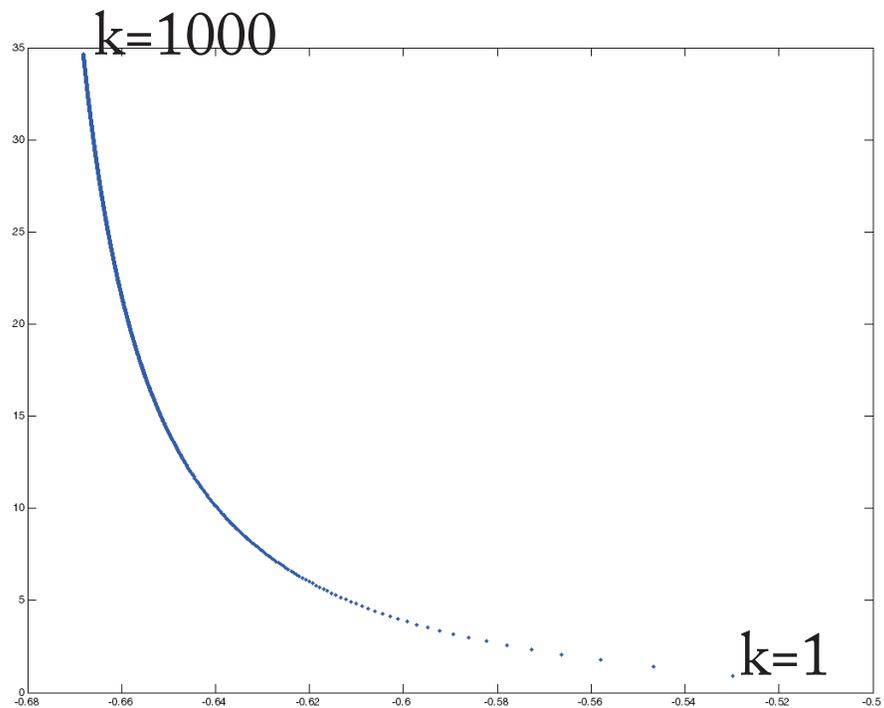
- $\gamma_k \sim k, a^i \sim i, c_i \sim \frac{1}{i^2}$ (спектральная структура типа «ЛИЛИЯ»)



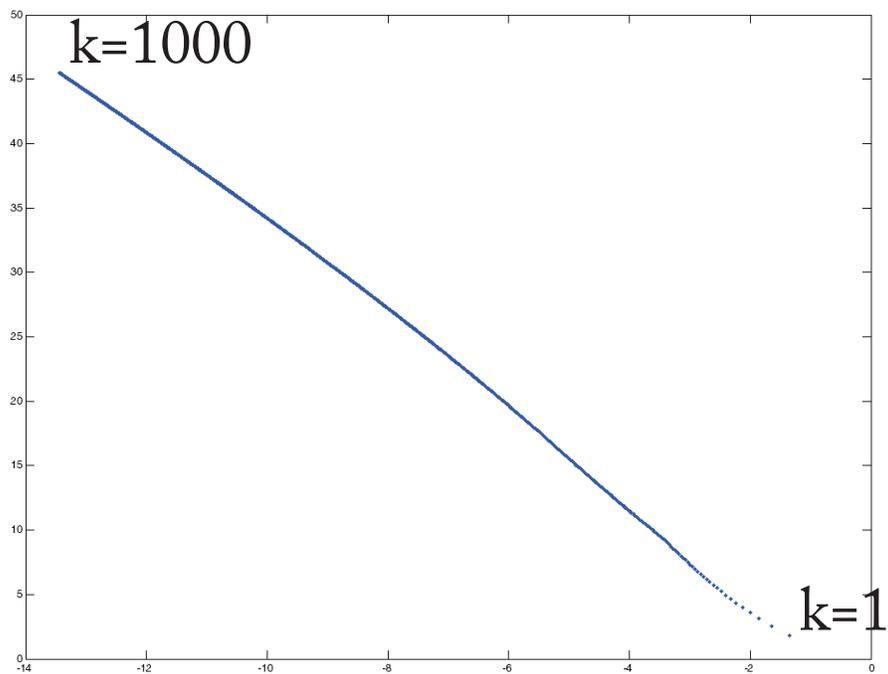
- $\gamma_k \sim k, a^i \sim i, c_i \sim \frac{1}{i^{2+\varepsilon_1}}, \varepsilon_1 = 0.1$ (спектральная структура типа «крест»)



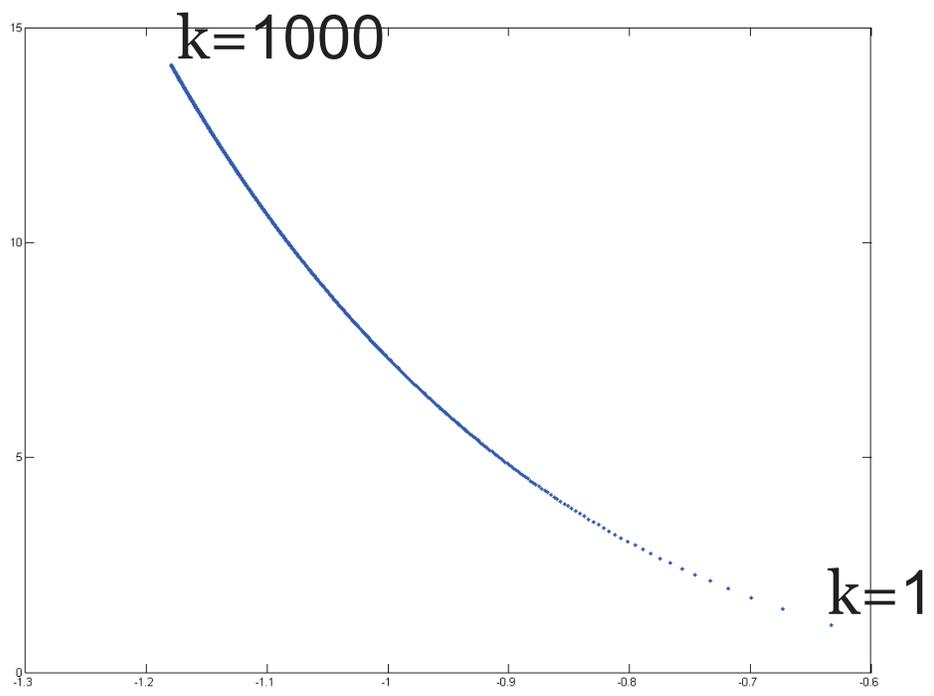
- $\gamma_k \sim k, a^i \sim i, c_i \sim \frac{1}{i^3}$ (спектральная структура типа «крест»)



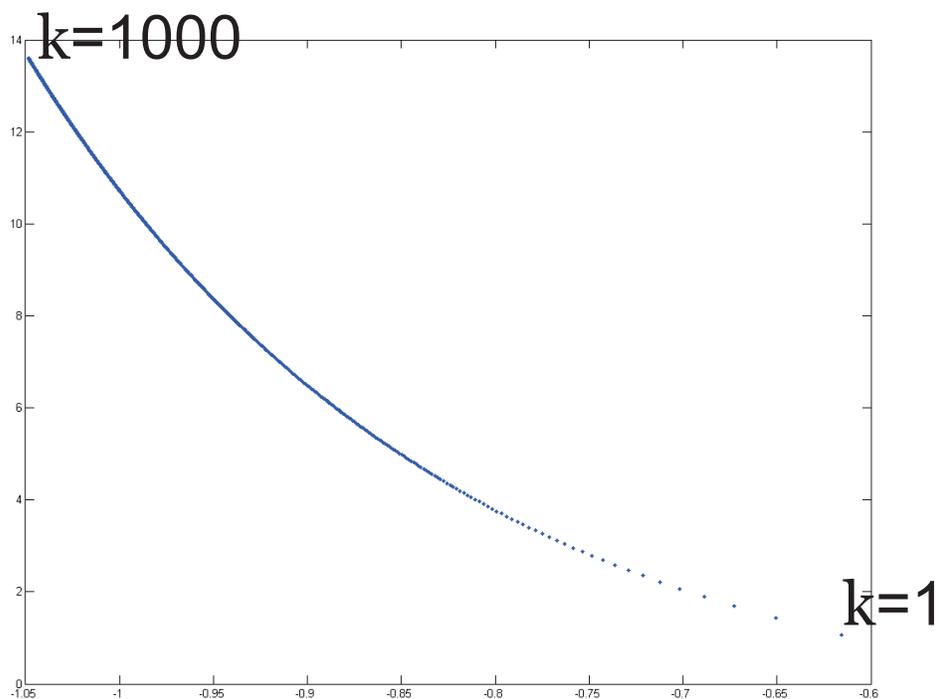
- $\gamma_k \sim k^{2/3}, a^i \sim i^{2/3}, c_i \sim \frac{1}{i^{2/3}}$. Трехмерный случай. (спектральная структура типа «лилия»)



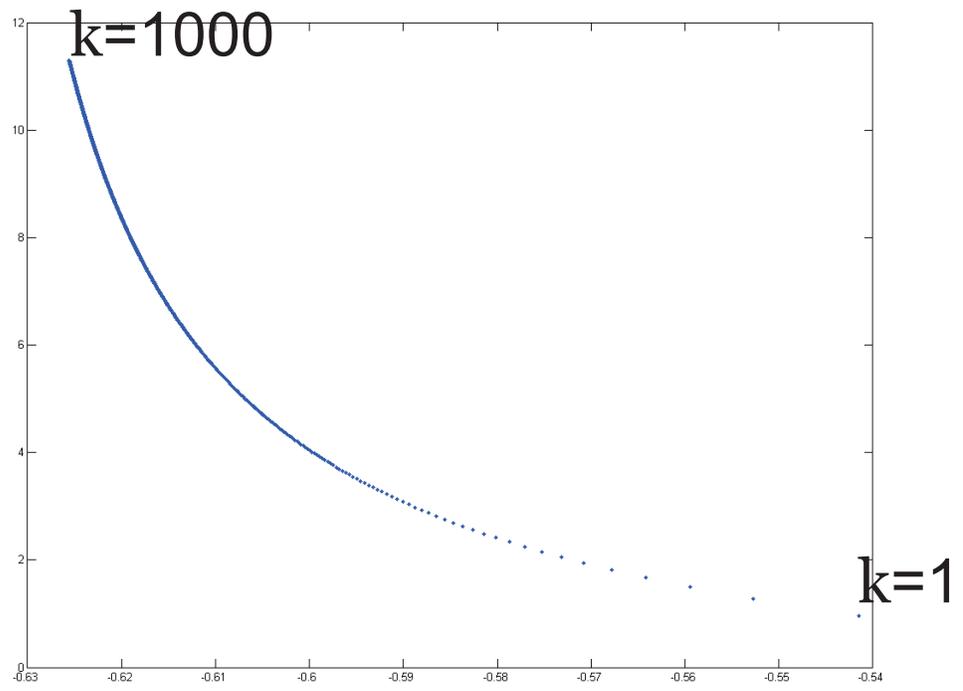
- $\gamma_k \sim k^{2/3}, a^i \sim i^{2/3}, c_i \sim \frac{1}{i^{5/3}}$ (спектральная структура типа «лилия»)



- $\gamma_k \sim k^{2/3}, a^i \sim i^{2/3}, c_i \sim \frac{1}{i^{5/3+\varepsilon_1}}, \varepsilon_1 = 0.1$ (спектральная структура типа «крест»)



- $\gamma_k \sim k^{2/3}, a^i \sim i^{2/3}, c_i \sim \frac{1}{i^{8/3}}$ (спектральная структура типа «крест»)

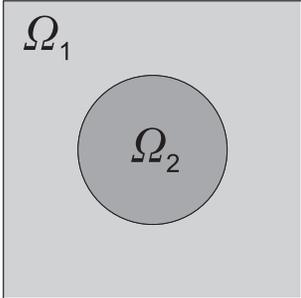


Глава 3

Численное решение вспомогательной задачи на ячейке периодичности.

3.1. Постановка задачи.

Рассматривается задача на ячейке периодичности $Y = [0, 1]^2$:



The diagram shows a square domain labeled Ω_1 with a smaller circular domain labeled Ω_2 inside it. The square is shaded light gray, and the circle is shaded a darker gray.

(3.1)

{

$$\begin{cases} \rho \dot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \rho \dot{v} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \operatorname{div} z = 0, \\ z_1|_S = z_2|_S \text{ (т.е. } z \text{ непрерывна через } S), \\ \sigma_{ij}^1 n_i|_S = \sigma_{ij}^2 n_i|_S, \\ z \text{ — периодическая с периодом } Y \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{\rho}, \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где $(x, y) \in Y = [0, 1]^2 = Y_1 \cup Y_2$ (Y_i — жидкость с плотностью ρ_i и вязкостью μ_i), $z = (u, v)$, $z_i = z|_{Y_i}$, $\mu|_{Y_i} = \mu_i = \text{const}$, $\rho|_{Y_i} = \rho_i = \text{const}$, S — граница между Y_1 и Y_2 , $n = (n_1, n_2)$ — вектор единичной нормали к S , а $\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl}$, т.е.

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sigma_{i1}n_i = -pn_1 + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}n_1 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_2, \\ \sigma_{i2}n_i = -pn_2 + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}n_2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_1. \end{cases}$$

3.2. Вывод разностных формул.

Рассмотрим на $Y = [0, 1]^2$ равномерную сетку (x_i, y_j) , $x_i = ih$, $y_j = jh$, где $i, j = 0, \dots, N - 1$, $h = \frac{1}{N}$. Обозначим $P_{i,j} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$ и введем дискретные функции $p_{i,j} = p(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})$, $\mu_{i,j} = \mu(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})$, $\rho_{i,j} = \rho(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})$ (т.е. $p_{i,j}, \mu_{i,j}, \rho_{i,j}$ заданы в центре $P_{i,j}$), $u_{i,j} = u(x_{i+1}, y_j + \frac{h}{2})$, $v_{i,j} = v(x_i + \frac{h}{2}, y_{j+1})$ (т.е. $u_{i,j}, v_{i,j}$ заданы на сторонах $P_{i,j}$ или в центрах $U_{i,j} = \{(x, y) | x_i + \frac{h}{2} \leq x \leq x_{i+1} + \frac{h}{2}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$, $V_{i,j} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j + \frac{h}{2} \leq y \leq y_{j+1} + \frac{h}{2}\}$). Будем считать, что $P_{i,j} \subset \Omega_k$, $k = 1, 2$, если центр $P_{i,j}$ $(x_i + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}) \in \Omega_k$.

Пользуясь теоремой о среднем, проинтегрируем (3.1'3) по $P_{i,j}$:

$$0 = \int_{P_{i,j}} \operatorname{div} z dP_{i,j} = \int_{P_{i,j}} \nabla \cdot z dP_{i,j} = \int_{\partial P_{i,j}} z \cdot n d\sigma \approx (u_{i,j} - u_{i-1,j} + v_{i,j} - v_{i,j-1})h$$

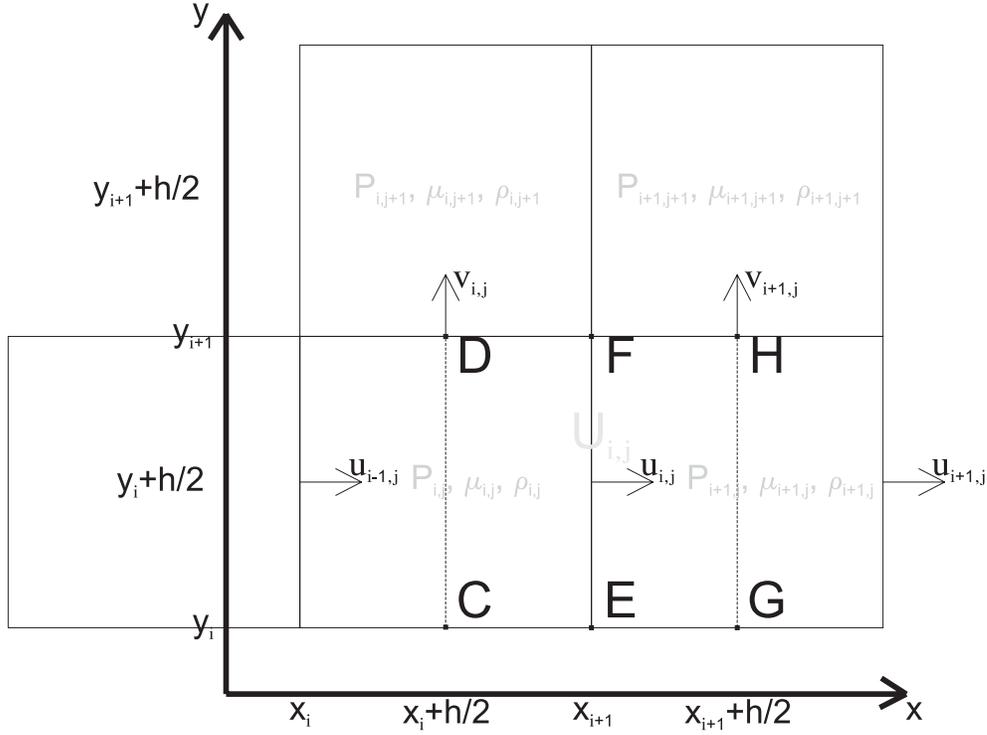
или

$$(3.3) \quad u_{i,j} - u_{i-1,j} + v_{i,j} - v_{i,j-1} = 0.$$

3.2.1. Приближение уравнений движения.

Запишем (3.1'1), (3.1'2) в виде:

$$(3.4) \quad \rho \dot{z} = -\nabla p + \mu \Delta z = -\nabla \cdot w, \quad \text{где } w = p\bar{e} - \mu \nabla z.$$



Обозначим

$$w_1 = p\bar{e}_1 - \mu\nabla u,$$

$$w_2 = p\bar{e}_2 - \mu\nabla v,$$

тогда (3.1'1),(3.1'2) можно представить

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \rho\dot{u} &= -\nabla w_1, \\ \rho\dot{v} &= -\nabla w_2. \end{aligned}$$

Проинтегрируем (3.5) по $U_{i,j}$:

$$(3.6) \quad \int_{U_{i,j}} \rho\dot{u} dx dy = \int_{U_{i,j}} \nabla \cdot w_1 dx dy,$$

где представим $\dot{u} \approx \frac{u^{t+\tau} - u^t}{\tau}$, $u^t = u(x, y, t)$. Тогда левую часть (3.6) можно приблизить следующим образом:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \int_{U_{i,j}} \rho\dot{u} dx dy &\approx \int_{U_{i,j}} \rho \frac{u^{t+\tau} - u^t}{\tau} dx dy \approx \\ &\approx \frac{u_{i,j}^{t+\tau} - u_{i,j}^t}{\tau} \int_{U_{i,j}} \rho dx dy = \frac{u_{i,j}^{t+\tau} - u_{i,j}^t}{\tau} \cdot \frac{(\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j})h^2}{2}. \end{aligned}$$

Далее будем считать $u_{i,j} = u_{i,j}^{t+\tau} = u(x_{i+1}, y_j + \frac{h}{2}, t + \tau)$, $v_{i,j} = v_{i,j}^{t+\tau} = v(x_i + \frac{h}{2}, y_{j+1}, t + \tau)$ и пропускать индекс $\bullet^{t+\tau}$ (заметим, что получающаяся таким образом схема будет *неявной* и уравнение задается на следующем слое по времени по отношению к $u_{i,j}^t$).

Преобразуем правую часть (3.6), учитывая, что w_1 непрерывна внутри $U_{i,j}$, за исключением, может быть, отрезка EF (он может оказаться границей раздела двух жидкостей):

$$\begin{aligned} \int_{U_{i,j}} \nabla \cdot w_1 dx dy &= \int_{CDFE} \nabla \cdot w_1 dx dy + \int_{EFGH} \nabla \cdot w_1 dx dy = \\ &= \int_{\partial CDFE} w_1^i \cdot n d\sigma + \int_{\partial EFGH} w_1^i \cdot n d\sigma, \end{aligned}$$

где n — внешняя нормаль, а w_1^i — предел w_1 при стремлении к границе областей $CDFE, EFGH$ изнутри. Внутри $P_{i,j}$ функция w_1 непрерывна, но на границе $P_{i,j}$ может претерпевать разрыв. Отсюда (так как на EF $n = \pm \bar{e}_1$)

$$(3.8) \quad \int_{U_{i,j}} \nabla \cdot w_1 dx dy = \int_{\partial CDHG} w_1^i \cdot n d\sigma - \int_{EF} (w_1^+ - w_1^-) \cdot \bar{e}_1 d\sigma,$$

где w_1^+, w_1^- — пределы w_1 при стремлении к EF справа и слева соответственно (аналогично p^\pm, u^\pm, v^\pm). По (3.1'5), (3.2'1) имеем $-p^+ + 2\mu^+ \frac{\partial u^+}{\partial x} = -p^- + 2\mu^- \frac{\partial u^-}{\partial x}$, следовательно $(w_1^+ - w_1^-) \cdot \bar{e}_1 = p^+ - \mu^+ \frac{\partial u^+}{\partial x} - p^- + \mu^- \frac{\partial u^-}{\partial x} = \mu^+ \frac{\partial u^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial u^-}{\partial x}$. Воспользуемся уравнением неразрывности (3.1'3) : $\frac{\partial u^\pm}{\partial x} = -\frac{\partial v^\pm}{\partial y}$. На EF функция $\frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывна как производная в направлении, касательном к поверхности (см. [6], р. 47): $\frac{\partial v^+}{\partial y} = \frac{\partial v^-}{\partial y}$. Тогда

$$\begin{aligned} (3.9) \quad \int_{EF} (w_1^+ - w_1^-) \cdot \bar{e}_1 d\sigma &= - \int_{EF} (\mu^+ - \mu^-) \frac{\partial v^+}{\partial y} dy = \\ &= -(\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j}) \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\partial v^+}{\partial y} dy \approx \\ &\approx (\mu_{i,j} - \mu_{i+1,j}) \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j} - v_{i,j-1} - v_{i+1,j-1}}{2}. \end{aligned}$$

Разобьем

$$(3.10) \quad \int_{\partial CDHG} w_1^i \cdot n d\sigma = \\ = \int_{CD} w_1 \cdot n d\sigma + \int_{DH} w_1 \cdot n d\sigma + \int_{HG} w_1 \cdot n d\sigma + \int_{CG} w_1 \cdot n d\sigma.$$

Рассмотрим $w_1 \cdot n|_{HG} = w_1 \cdot \bar{e}_1|_{HG} = p - \mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \Rightarrow$

$$(3.11) \quad \int_{HG} w_1 \cdot n d\sigma \approx w_1 \cdot n|_{(x_{i+1} + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2})} |HG| \approx \\ \approx \left(p_{i+1,j} - \mu_{i+1,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right) h.$$

Аналогично

$$(3.12) \quad \int_{CD} w_1 \cdot n d\sigma \approx \left(\mu_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - p_{i,j} \right) h.$$

Вдоль DH и CG функция w_1 может быть разрывна. Исследуем $w_1 \cdot n|_{DH} = w_1 \cdot \bar{e}_2|_{DH} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$: введем вспомогательную функцию $\omega(y) = \int_{S(y)} \mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$, где вместо DH интегрируем по $S(y) = \left\{ (x, y) | x \in [x_i + \frac{h}{2}, x_{i+1} + \frac{h}{2}] \right\}$. Функция $\omega(y)$ может быть разрывна в y_{j+1} . Из (3.1'5), (3.2'1) следует, что

$$\mu^+ \frac{\partial u^+}{\partial y} + \mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} = \mu^- \frac{\partial u^-}{\partial y} + \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x},$$

а скачок функции $\omega(y)$ может быть выражен как

$$(3.13) \quad \omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0) = \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial u^+}{\partial y} - \mu^- \frac{\partial u^-}{\partial y} \right) d\sigma = \\ = - \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma,$$

где $\frac{\partial v}{\partial x}$ как производная в направлении касательном к поверхности непрерывна при переходе через DH , (см. [6], р. 47) за исключением,

может быть, точки $F(x_{i+1}, y_{j+1})$. Поэтому предыдущую формулу можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma = \int_{DH} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_{j+1}) (\mu^+ - \mu^-) d\sigma = \\
& = \int_{DF} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_{j+1}) (\mu^+ - \mu^-) d\sigma + \int_{FH} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_{j+1}) (\mu^+ - \mu^-) d\sigma = \\
& = (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j}) \int_{x_i + \frac{h}{2}}^{x_{i+1}} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_{j+1}) dx + \\
& \quad + (\mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j}) \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1} + \frac{h}{2}} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y_{j+1}) dx = \\
& = (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j}) (v(x_{i+1}, y_{j+1}) - v(x_i + \frac{h}{2}, y_{j+1})) + \\
& \quad + (\mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j}) (v(x_{i+1} + \frac{h}{2}, y_{j+1}) - v(x_{i+1}, y_{j+1})),
\end{aligned}$$

где используем непрерывность $v(x, y)$ на ячейке. Приближим

$$v(x_{i+1}, y_{j+1}) \approx \frac{v(x_i + \frac{h}{2}, y_{j+1}) + v(x_{i+1} + \frac{h}{2}, y_{j+1})}{2} = \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0) &= -(\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j}) \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} - v_{i,j} \right) - \\
&\quad - (\mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j}) \left(v_{i+1,j} - \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \right)
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0) &= \\
&= -\frac{1}{2}(\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j})(v_{i+1,j} - v_{i,j}) - \\
&\quad - \frac{1}{2}(\mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j})(v_{i+1,j} - v_{i,j}) = \\
&= \frac{v_{i,j} - v_{i+1,j}}{2}(\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j}).
\end{aligned}$$

Определим непрерывную на $[y_j + h/2, y_{j+1} + h/2]$ функцию

$$\omega^-(y) = \begin{cases} \omega(y), & y \in [y_j + h/2, y_{j+1}) \\ \omega(y) - (\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0)), & y \in [y_{j+1}, y_{j+1} + h/2]. \end{cases}$$

Нам нужно найти $\int_{DH} w_1 \cdot nd\sigma = - \int_{DH} \mu \frac{\partial u}{\partial y} dx = -\omega(y_{j+1} - 0) = -\omega^-(y_{j+1})$.

Функция $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывна при переходе через EF как производная в направлении касательном к поверхности [6], за исключением, может быть, конечных точек $E(x_{i+1}, y_i), F(x_{i+1}, y_{i+1})$. Введем функцию

$$\Lambda(y) = \int_{S(y)} \mu dx,$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega(y) &\approx \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y) \int_{S(y)} \mu dx = \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y) \Lambda(y), \quad y \neq y_{j+1}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y) &\approx \omega(y) / \Lambda(y), \quad y \neq y_{j+1}. \end{aligned}$$

Функция u непрерывна на ячейке, следовательно, даже если $\frac{\partial u}{\partial y}$ пре-

терпевает разрыв в точке y_{j+1} , справедливо

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1} - u_{i,j} &= \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y) dy \approx \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \omega(y)/\Lambda(y) dy = \\
&= \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1}} \omega^-(y)/\Lambda(y) dy + \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \omega(y)/\Lambda(y) dy = \\
&= \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \omega^-(y)/\Lambda(y) dy + (\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0)) \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{1}{\Lambda(y)} dy \approx \\
&\approx \omega^-(y_{j+1}) \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} + (\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0)) \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
\omega^-(y_{j+1}) &\approx \left(\int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right)^{-1} \times \\
&\times \left((u_{i,j+1} - u_{i,j}) - (\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0)) \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\int_{y_{j+1}}^{y_{j+1}+\frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} = \frac{h/2}{\frac{h}{2}\mu_{i,j+1} + \frac{h}{2}\mu_{i+1,j+1}} = \frac{1}{\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}},$$

$$\int_{y_j+\frac{h}{2}}^{y_{j+1}+\frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} = \int_{y_j+\frac{h}{2}}^{y_{j+1}} \frac{dy}{\Lambda(y)} + \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1}+\frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} = \frac{1}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}} + \frac{1}{\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}}.$$

Окончательно

$$(3.14) \quad \int_{DH} w_1 \cdot n d\sigma \approx - \left[\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \right. \\ \left. - \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}} \times \right. \\ \left. \times \frac{v_{i,j} - v_{i+1,j}}{2} (\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j}) \right] = \\ = \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}} (u_{i,j} - u_{i,j+1}) - \\ - \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j})}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}} (v_{i+1,j} - v_{i,j}).$$

Для нахождения $\int_{CG} w_1 \cdot n d\sigma$ нужно найти $\omega^+(y_j)$, где $\omega^+(y_j) = \omega(y_j + 0)$.

Из (3.13) следует, что

$$\omega(y_{j+1} + 0) = \omega(y_{j+1} - 0) - \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\omega^+(y_{j+1}) &\approx \left(\int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right)^{-1} \times \\
&\left((u_{i,j+1} - u_{i,j}) - (\omega(y_{j+1} + 0) - \omega(y_{j+1} - 0)) \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right) - \\
&\quad - \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma = \\
&= \left(\int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right)^{-1} \times \\
&\times \left((u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma \int_{y_{j+1}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right) = \\
&= \left(\int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1} + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right)^{-1} \times \\
&\times \left((u_{i,j+1} - u_{i,j}) - \int_{DH} \left(\mu^+ \frac{\partial v^+}{\partial x} - \mu^- \frac{\partial v^-}{\partial x} \right) d\sigma \int_{y_j + \frac{h}{2}}^{y_{j+1}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right).
\end{aligned}$$

Последняя формула позволяет вычислить $\int_{CG} w_1 \cdot n d\sigma$ при нахождении

$\int_{U_{i,j+1}} \nabla \cdot w_1 dx dy$ (т.е. интеграл по нижней стороне квадрата $U_{i,j+1}$), сле-

довательно, для получения интеграла по нижней стороне квадрата $U_{i,j}$ для вычисления $\int_{U_{i,j}} \nabla \cdot w_1 dx dy$ нужно заменить в ней, с учетом (3.13),

j на $j - 1$. Таким образом, получаем

$$\omega^+(y_j) \approx \left(\int_{y_{j-1} + \frac{h}{2}}^{y_j + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right)^{-1} \left[(u_{i,j} - u_{i,j-1}) - \frac{v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1}}{2} (\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1}) \int_{y_{j-1} + \frac{h}{2}}^{y_j} \frac{dy}{\Lambda(y)} \right],$$

а так как

$$\int_{y_{j-1} + \frac{h}{2}}^{y_j + \frac{h}{2}} \frac{dy}{\Lambda(y)} = \frac{1}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}}$$

$$\int_{y_{j-1} + \frac{h}{2}}^{y_j} \frac{dy}{\Lambda(y)} = \frac{1}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1}},$$

то

$$(3.15) \quad \int_{CG} w_1 \cdot n d\sigma \approx \frac{(\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) -$$

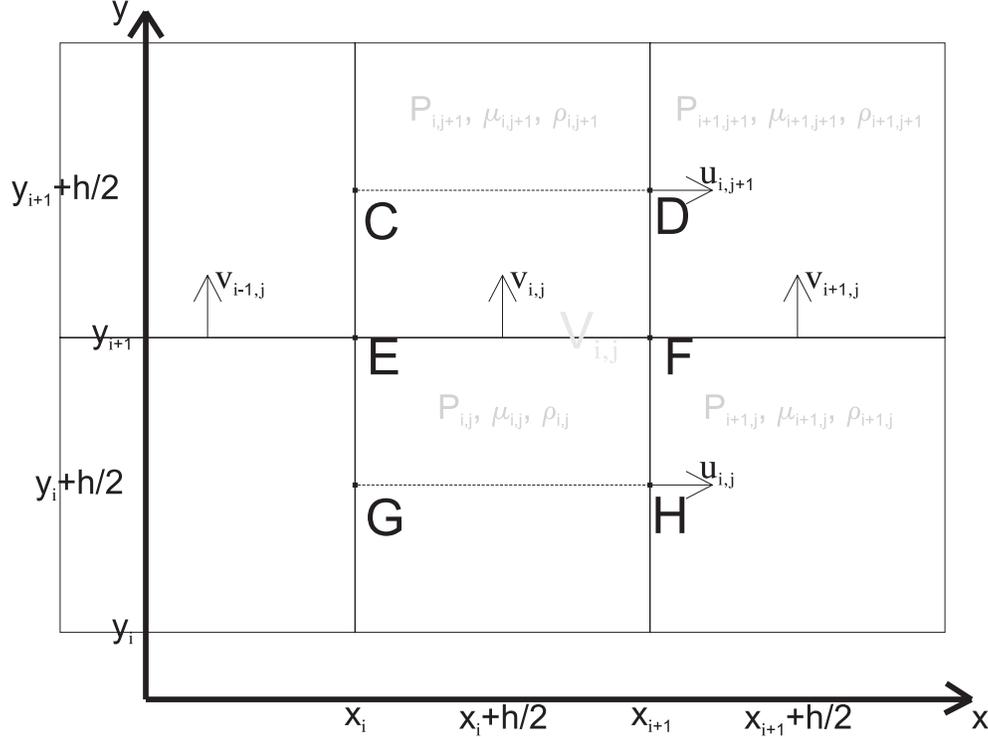
$$- \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}} (v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1}) \times$$

$$\times \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1}}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1}} =$$

$$= \frac{(\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}} (u_{i,j} - u_{i,j-1}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1})}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}} (v_{i,j-1} - v_{i+1,j-1}).$$

Таким образом, формулы (3.6)-(3.15) дают нам численную аппроксимацию уравнения (3.1'1).



Для вывода приближенного уравнения на v

$$(3.16) \quad \int_{V_{i,j}} \rho v dx dy = \int_{V_{i,j}} \nabla \cdot w_2 dx dy,$$

нужно в формулах (3.6)-(3.15) заменить индексы (i, j) на (j, i) и $u_{i,j}$ на $v_{j,i}$ (и, соответственно, наоборот, $v_{i,j}$ на $u_{j,i}$):

$$(3.17) \quad \int_{V_{i,j}} \rho v dx dy \approx \frac{v_{i,j} - v_{i,j}^t}{\tau} \cdot \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}{2} h^2,$$

$$(3.18) \quad \int_{HG} w_2 \cdot n d\sigma \approx \left(p_{i,j+1} - \mu_{i,j+1} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h} \right) h,$$

$$(3.19) \quad \int_{CD} w_2 \cdot n d\sigma \approx \left(\mu_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h} - p_{i,j} \right) h,$$

$$(3.20) \quad \int_{DH} w_2 \cdot n d\sigma \approx \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})(\mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j+1}} (v_{i,j} - v_{i+1,j}) - \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})(\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j+1}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}),$$

$$(3.21) \quad \int_{CG} w_2 \cdot n d\sigma \approx \frac{(\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1})(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})}{\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + \mu_{i,j} + \mu_{i,j+1}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})(\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j} + \mu_{i,j+1} - \mu_{i-1,j+1})}{\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + \mu_{i,j} + \mu_{i,j+1}} (u_{i-1,j} - u_{i-1,j+1}),$$

$$(3.22) \quad \int_{EF} (w_2^+ - w_2^-) \cdot \bar{e}_2 d\sigma \approx (\mu_{i,j} - \mu_{i,j+1}) \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i-1,j+1}}{2}$$

и

$$(3.23) \quad \frac{v_{i,j} - v_{i,j}^t}{\tau} \cdot \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}{2} h^2 \approx$$

$$\approx \int_{CD} w_2 \cdot n d\sigma + \int_{DH} w_2 \cdot n d\sigma + \int_{HG} w_2 \cdot n d\sigma + \int_{CG} w_2 \cdot n d\sigma - \int_{EF} (w_2^+ - w_2^-) \cdot \bar{e}_2 d\sigma.$$

3.3. Методы решения системы линейных уравнений.

Таким образом, в п.2 была получена система уравнений $Az = b$, где A — матрица размера $3N^2 \times 3N^2$, z — вектор размерности $3N^2$, составленный из троек $(u_{i,j}, v_{i,j}, p_{i,j})$ ($i, j = 0, \dots, N-1$).

Уточним организацию матрицы A : в строке с номером $k = 3Nj + 3i$ записано уравнение (1.1) для u_{ij} (формулы (2.8), (2.10), (2.11), (2.12), (2.17), (2.18)), в строке $k = 3Nj + 3i + 1$ — уравнение (1.2) для v_{ij} (формулы (2.21)-(2.26)), в строке $k = 3Nj + 3i + 2$ — уравнение (1.3) (формула (2.1)); в столбце с номером $l = 3Nj + 3i$ стоит коэффициент a_{kl} при u_{ij} в соответствующем уравнении, в столбце $l = 3Nj + 3i + 1$ — коэффициент a_{kl} при v_{ij} , в столбце $l = 3Nj + 3i + 2$ — коэффициент a_{kl} при p_{ij} .

В векторе z при $l = 3Nj + 3i$ элемент $z_l = u_{i,j}$, при $l = 3Nj + 3i + 1$ $z_l = v_{i,j}$, при $l = 3Nj + 3i + 2$ $z_l = p_{i,j}$.

Элемент b_l , $l = 3Nj + 3i$ вектора b соответствует правой, известной части уравнения для $u_{i,j}$, т.е. $b_l = \frac{u_{i,j}^t}{\tau} \cdot \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i+1,j}}{2} h^2$, при $l = 3Nj + 3i + 1$ — известной части уравнения для $v_{i,j}$, $b_l = \frac{v_{i,j}^t}{\tau} \cdot \frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}{2} h^2$, а при $l = 3Nj + 3i + 2$ имеем $b_l = 0$, как это следует из формулы (2.1).

Запишем в виде таблицы получившиеся в п.2 уравнения. Уравнение неразрывности:

$v_{i,j-1}$	$u_{i-1,j}$	$u_{i,j}$	$v_{i,j}$
-1	-1	1	1

Уравнения движения:

$u_{i,j-1}$ $-\mathcal{M}_{CG}^{u,u}$	$v_{i,j-1}$ $\mathcal{M}_{CG}^{u,v} + m_{i,j}^u$	$v_{i+1,j-1}$ $-\mathcal{M}_{CG}^{u,v} + m_{i,j}^u$	$v_{i-1,j}$ $-\mu_{i,j}$	$\frac{u_{i,j}}{2} + \frac{\rho_{i+1,j} h^2}{\tau} + (\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j}) + \mathcal{M}_{DH}^{u,u} + \mathcal{M}_{CG}^{u,u}$	$v_{i,j}$ $\mathcal{M}_{DH}^{u,v} - m_{i,j}^u$	$p_{i,j}$ $-h$	$u_{i+1,j}$ $-\mu_{i+1,j}$	$v_{i+1,j}$ $-\mathcal{M}_{DH}^{u,v} - m_{i,j}^u$	$p_{i+1,j}$ h	$u_{i,j+1}$ $-\mathcal{M}_{DH}^{u,u}$
$v_{i,j-1}$ $-\mu_{i,j}$	$u_{i-1,j}$ $\mathcal{M}_{CG}^{v,u} + m_{i,j}^v$	$v_{i-1,j}$ $-\mathcal{M}_{CG}^{v,v}$	$u_{i,j}$ $\mathcal{M}_{DH}^{v,u} - m_{i,j}^v$	$\frac{v_{i,j}}{2} + \frac{\rho_{i,j+1} h^2}{\tau} + (\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j}) + \mathcal{M}_{DH}^{v,v} + \mathcal{M}_{CG}^{v,v}$	$p_{i,j}$ $-h$	$v_{i+1,j}$ $-\mathcal{M}_{DH}^{v,v}$	$u_{i-1,j+1}$ $-\mathcal{M}_{CG}^{v,u} + m_{i,j}^v$	$u_{i,j+1}$ $-\mathcal{M}_{DH}^{v,u} - m_{i,j}^v$	$v_{i,j+1}$ $-\mu_{i,j+1}$	$p_{i,j+1}$ h

где

$$(3.24) \quad m_{i,j}^u = \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i+1,j}}{2}, m_{i,j}^v = \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i,j+1}}{2},$$

$$(3.25) \quad \mathcal{M}_{DH}^{u,u} = \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}},$$

$$(3.26) \quad \mathcal{M}_{DH}^{u,v} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j+1} - \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j})}{\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}},$$

$$(3.27) \quad \mathcal{M}_{CG}^{u,u} = \frac{(\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1})(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}},$$

$$(3.28) \quad \mathcal{M}_{CG}^{u,v} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j})(\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j} - \mu_{i+1,j-1})}{\mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1} + \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j}},$$

$$(3.29) \quad \mathcal{M}_{DH}^{v,v} = \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})(\mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j+1}},$$

$$(3.30) \quad \mathcal{M}_{DH}^{v,u} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})(\mu_{i+1,j} - \mu_{i,j} + \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i,j+1})}{\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i+1,j+1}},$$

$$(3.31) \quad \mathcal{M}_{CG}^{v,v} = \frac{(\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1})(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})}{\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + \mu_{i,j} + \mu_{i,j+1}},$$

$$(3.32) \quad \mathcal{M}_{CG}^{v,u} = \frac{1}{2} \frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})(\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j} + \mu_{i,j+1} - \mu_{i-1,j+1})}{\mu_{i-1,j} + \mu_{i-1,j+1} + \mu_{i,j} + \mu_{i,j+1}}.$$

Из таблиц видно, что A — сильно разрежена, в каждой строке матрицы не более 11 ненулевых элементов. Исследуем этот вопрос подробнее. На главной диагонали лежат элементы $(u_{i,j}, v_{i,j}, p_{i,j})$, слева от нее — $(u_{i-1,j}, v_{i-1,j}, p_{i-1,j})$, справа — $(u_{i+1,j}, v_{i+1,j}, p_{i+1,j})$. Запишем блок, состоящий из 3-х уравнений (на u, v и уравнение неразрывности), включающий главную диагональ:

уравнение на u	$u_{i-1,j}$	0	0	$u_{i,j}$	$v_{i,j}$	$p_{i,j}$	$u_{i+1,j}$	$v_{i+1,j}$	$p_{i+1,j}$
уравнение на v	$u_{i-1,j}$	$v_{i-1,j}$	0	$u_{i,j}$	$v_{i,j}$	$p_{i,j}$	0	$v_{i+1,j}$	0
уравнение неразрывности	$u_{i-1,j}$	0	0	$u_{i,j}$	$v_{i,j}$	0	0	0	0

Таким образом, имеем ленту шириной 11 элементов, из которых ненулевых не более 7 (в уравнении на $u_{i,j}$ — 7, в уравнении на $v_{i,j}$ — 6, в уравнении неразрывности — 3).

На побочной диагонали, слева от главной, расположены ненулевые элементы $u_{i,j-1}, v_{i,j-1}, v_{i+1,j-1}$, из которых состоит лента, шириной 6

элементов (крайний левый элемент — $u_{i,j-1}$, крайний правый — $v_{i+1,j-1}$):

$$\begin{array}{lcl}
 \text{уравнение на } u & u_{i,j-1} & v_{i,j-1} & 0 & 0 & v_{i+1,j-1} \\
 \text{уравнение на } v & 0 & v_{i,j-1} & 0 & 0 & 0 \\
 \text{уравнение неразрывности} & 0 & v_{i,j-1} & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

На побочной диагонали, справа от главной, расположены ненулевые элементы $u_{i-1,j+1}$, $u_{i,j+1}$, $v_{i,j+1}$, $p_{i,j+1}$ из которых состоит лента, шириной 6 элементов:

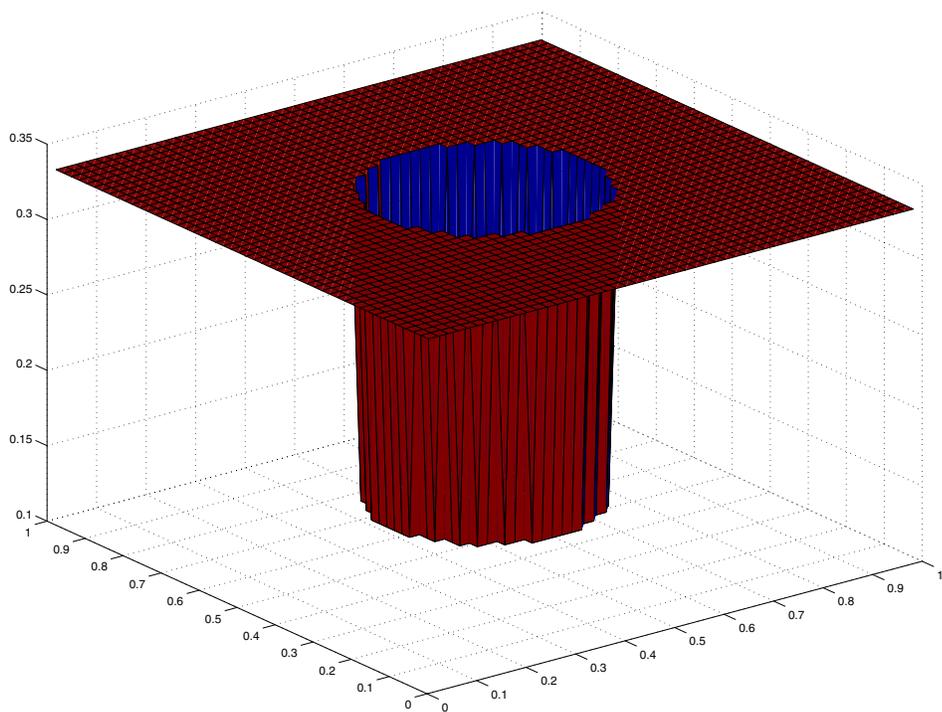
$$\begin{array}{lcl}
 \text{уравнение на } u & 0 & 0 & 0 & u_{i,j+1} & 0 & 0 \\
 \text{уравнение на } v & u_{i-1,j+1} & 0 & 0 & u_{i,j+1} & v_{i,j+1} & p_{i,j+1} \\
 \text{уравнение неразрывности} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

При составлении матрицы A необходимо учесть условия периодичности: если в уравнении на элемент с индексом (i, j) имеем $i = 0$, то элементы с индексом $(i - 1, j)$ есть элементы с индексом $(N - 1, j)$, если $i = N - 1$, то вместо $(i + 1, j)$ используются $(0, j)$. Аналогично, если $j = 0$, то вместо $(i, j - 1)$ пишем $(i, N - 1)$, а если $j = N - 1$, то $(i, 0)$ вместо $(i, j + 1)$. Например, в уравнении на $u_{N-1,0}$ коэффициент $\mathcal{M}_{CG}^{u,v}$ (3.28) записывается как коэффициент при $v_{i+1,j-1} = v_{0,N-1}$, а в формуле (3.28) берется $\mu_{i+1,j-1} = \mu_{0,N-1}$.

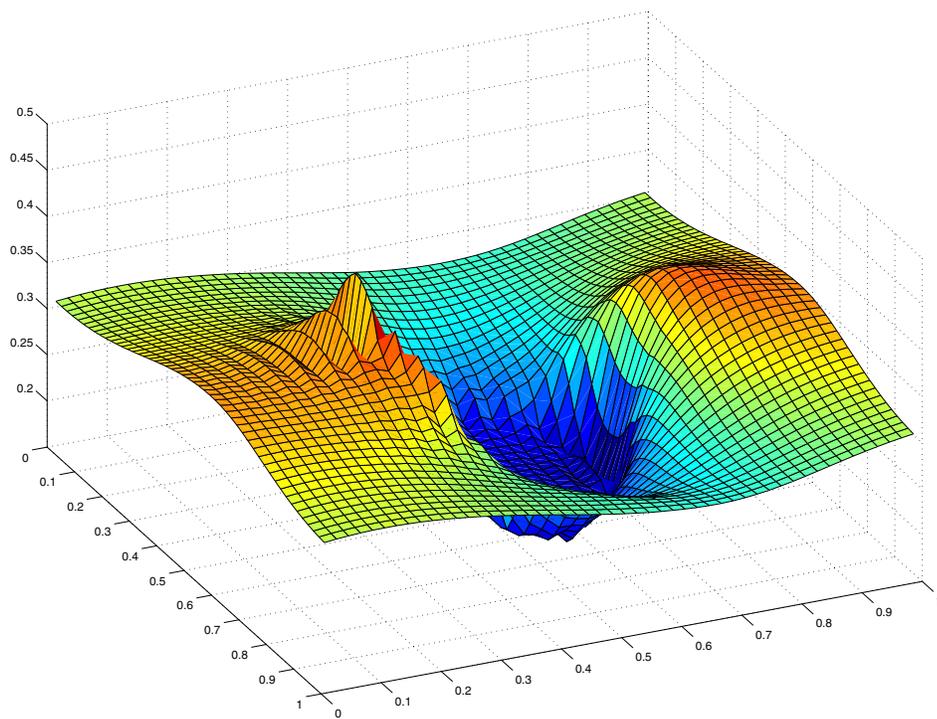
3.4. Результаты численного решения вспомогательной задачи на ячейке периодичности

Рассмотрим следующие параметры задачи: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 8$, $N = 50$. Тогда решения задач будут выглядеть следующим образом:

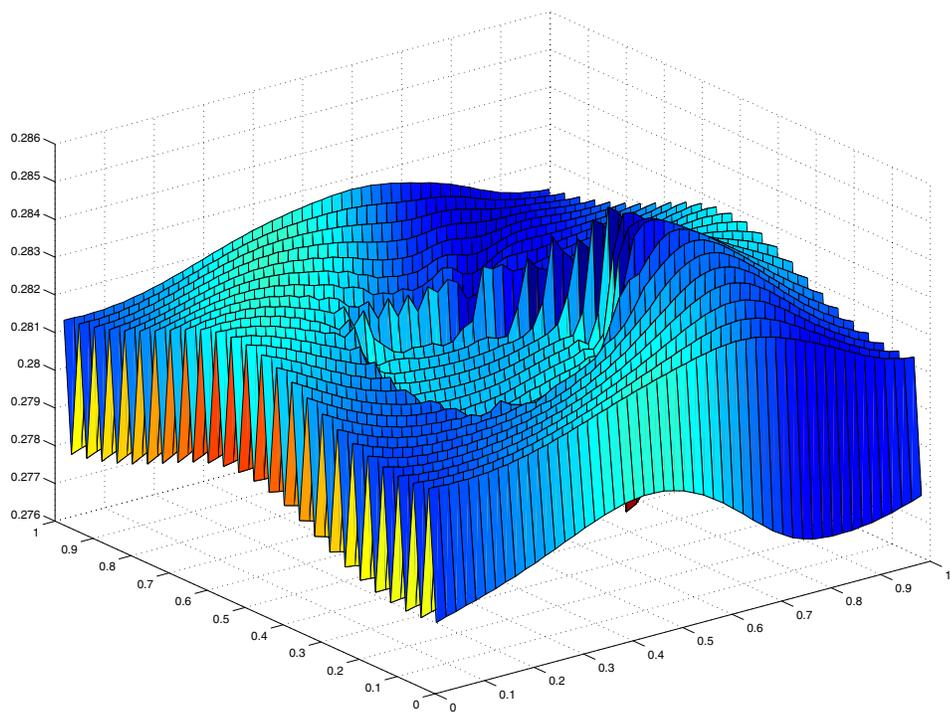
$$u|_{t=0} :$$



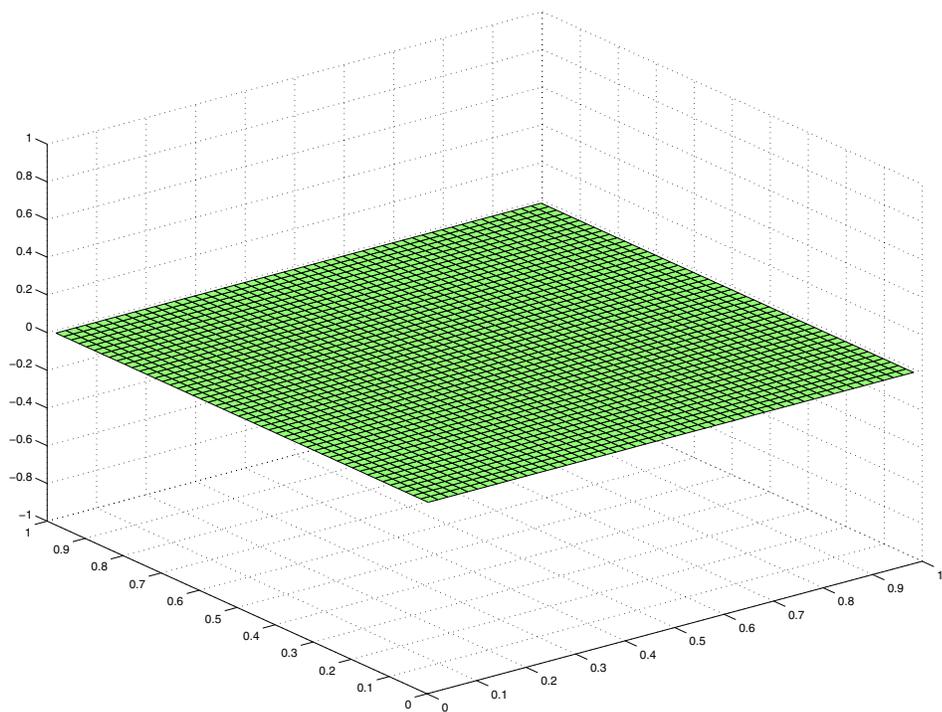
$u|_{t=\tau_1}$ (после первого шага по времени) :



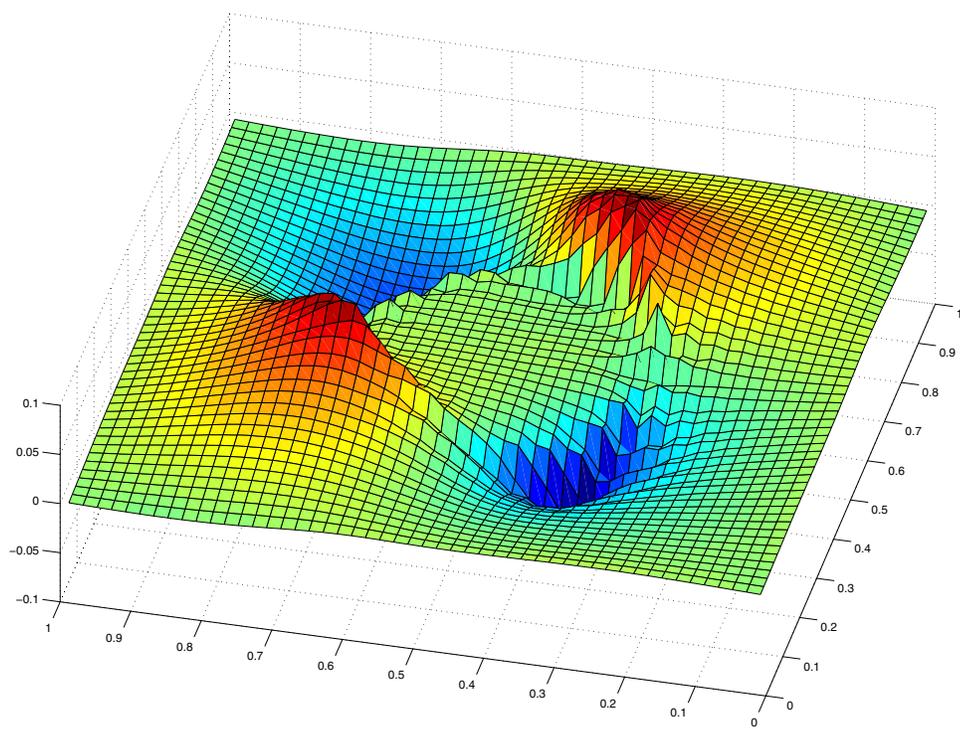
$u|_{t=\tau_{115}}$ (после 115-го шага по времени) :



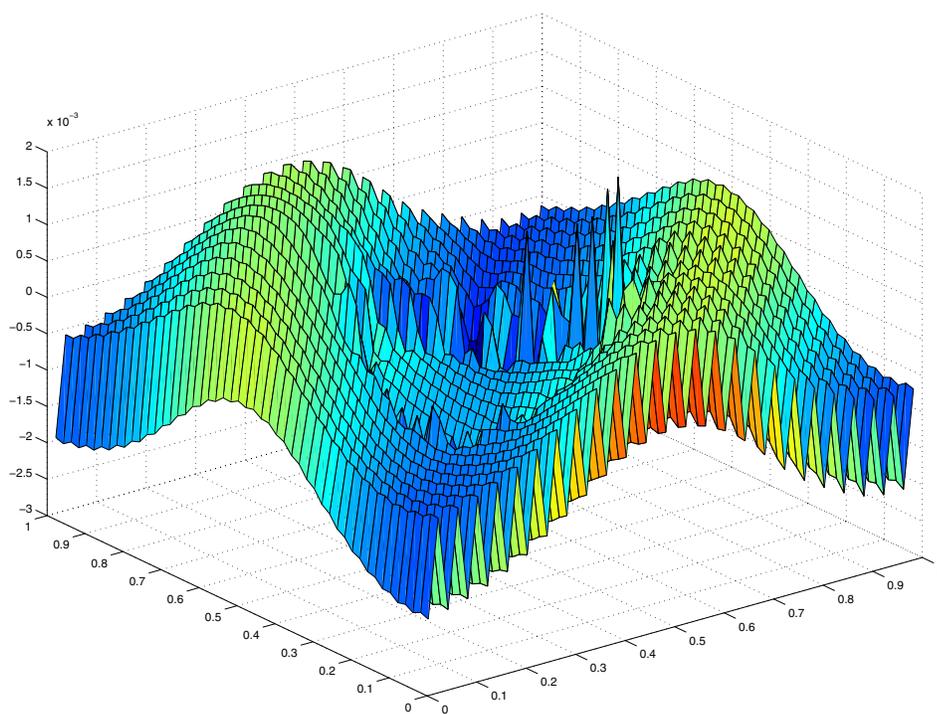
$v|_{t=0} :$



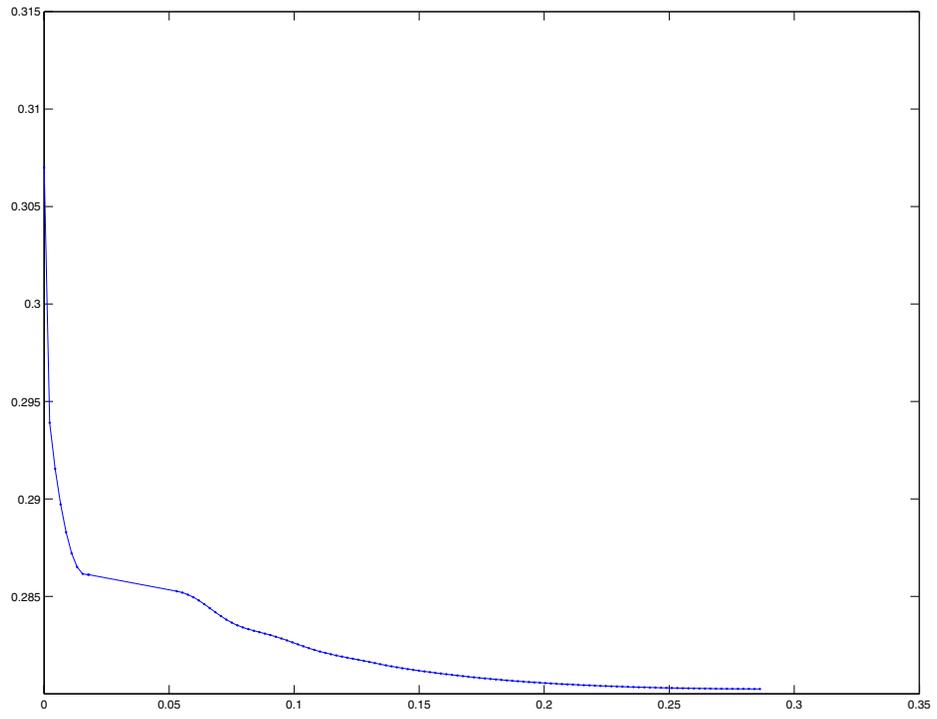
$v|_{t=\tau_1}$ (после первого шага по времени) :



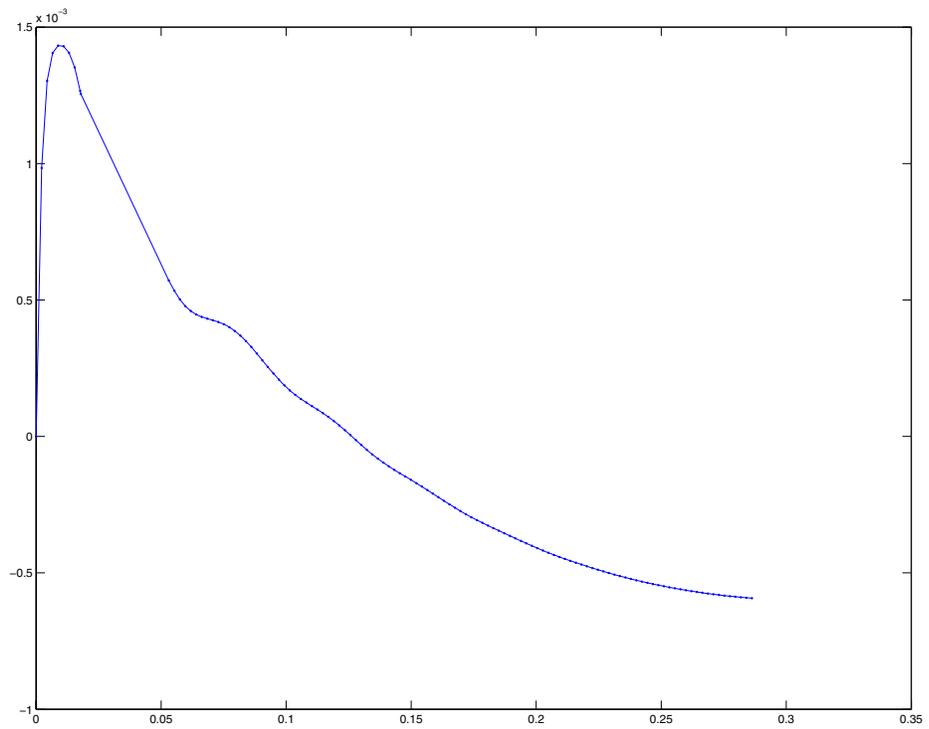
$v|_{t=\tau_{115}}$ (после 115-го шага по времени) :



$\langle u \rangle_Y$ (элемент матрицы ядра свертки в акустическом уравнении $K_{1,1}$) :



$\langle v \rangle_Y$ (элемент матрицы ядра свертки в акустическом уравнении $K_{1,2}$) :



Литература

- [1] G. Allaire *Homogenization and two-scale convergence* // SIAMJ. Math. Anal. - vol. 23, pp. 1482-1518, 1992.
- [2] G. Allaire, A. Damlamian, U. Hornung *Two-scale convergence on periodic surfaces and applications* // Mathematical Modeling of Flow through Porous Media. Editors: A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, A. Mikelic - Singapore, pp. 15-25, 1995.
- [3] M. A. Biot. *Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media* // Journal of Acoustical Society of America, 34, pp. 1254-1264, 1962.
- [4] R. P. Gilbert, A. Mikelic *Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I* // Nonlinear Analysis - 40, pp. 185-212, 2000.
- [5] M. E. Gurtin, A. C. Pipkin *A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds* // Arch. Rational Mechanics and Analysis, vol. 31, pp. 113-126, 1968.
- [6] V. Laptev *Numerical Solution of Coupled Flow in Plain and Porous Media* // PhD Thesis, University of Kaiserslautern, 2004.
- [7] D. Lukassen, G. Nguetseng, P. Wall *Two-scale convergence* // Intern. J. Pure and Appl. Math. - vol. 20, No. 1, pp. 35-86, 2002.
- [8] G. Metivier. *Valeurs propres des opérateurs définis sur la restriction de systèmes variationnels à des sous-espaces* - J. Math. Pures Appl., vol. 57, 1978, p.133-156.
- [9] M. Neuss-Radu *Some extension of two-scale convergence* // C. R. Acad. Sciences Paris - vol. 322, seria I, pp. 899-904, 1996.
- [10] G. Nguetseng. *A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization* - SIAM J.Math.Anal. V.20, №3, 1989, p.608-623.

- [11] G. Nguetseng. *Asymptotic analysis for a staff variational problem arising in mathematics* // SIAMJ. Math. Anal. - vol. 21, No. 6, pp. 1396-1414, 1990.
- [12] L. Pandolfi *The controllability of the Gurtin-Pipkin equation: a cosine operator approach* // Appl. Math. Optim., vol. 52, pp. 143-165, 2005.
- [13] J. Sanchez-Hubert *Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture* // Math. Methods Appl. Sci. - vol. 2, pp. 1-18, 1980.
- [14] V. V. Vlasov, J. Wu *Solvability and Spectral Analysis of Abstract Hyperbolic Equations with Delay* // Functional Differential Equations, 2009 (submitted).
- [15] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров *Динамическая модель пористой среды, заполненной вязкой жидкостью* // ДАН, сер. Механика, Т.401 №5, с. 630-633, М. 2005г.
- [16] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров *Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью* // Изв. РАН МТТ, №1, с. 109-119, М. 2005г.
- [17] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров *Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом* // Изв. РАН МТТ, №5, с. 145-156, М. 2002г.
- [18] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров *Упругие свойства гранулированной среды, пропитанной жидкостью* // Изв. РАН МТТ, №1, с. 3-16, М. 2008г.
- [19] К. И. Бабенко. *Об асимптотике собственных значений линеаризованных уравнений Навье-Стокса* - ДАН СССР т.263, №3, 1982г, стр.521-525.
- [20] Н. С. Бахвалов, А. В. Князев *Эффективное вычисление осредненных характеристик композитов периодической структуры из существенно разнородных материалов* // ДАН СССР, т. 313, №4 с. 777-781, 1990г.
- [21] Н. С. Бахвалов, А. В. Князев *Эффективный итерационный метод решения уравнений Ламе для почти несжимаемых сред и уравнений Стокса* // ДАН СССР, т. 319, №1 с. 13-17, 1991.

- [22] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко *Осреднение процессов в периодических средах* // М. Наука, 1984г.
- [23] В. В. Власов, А. Д. Медведев *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории, Гл.1* // Современная математика, Фундаментальные направления, т. 30, М., с. 3-173, 2008г.
- [24] В. В. Жиков *О двухмасштабной сходимости* // Труды семинара им. Петровского, вып. 23 - Москва, Изд. МГУ, с. 149-187, 2003 г.
- [25] В.В. Жиков. *Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости* - Мат.сборник т.191, №7, 2000г, стр.31-72.
- [26] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник *Усреднение дифференциальных операторов* // М. Физматлит, 1993г.
- [27] К. Иосида *Функциональный анализ* - М. Мир, 1967г.
- [28] Т. Като *Теория возмущений линейных операторов* - М. Мир, 1972г.
- [29] Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев *О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью* // Современная математика, Фундаментальные направления, т. 17, М., с. 88-109, 2006г.
- [30] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного*
- [31] А. Мейерманов *Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах* // Сибирский Математический Журнал, т. 48, № 3, с.645-667, 2007г.
- [32] А. В. Милославский *Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости* // Деп. в Укр. ВИНТИ 17.07.87 (1225-87).
- [33] В. П. Михайлов. *Дифференциальные уравнения в частных производных* - М. Наука, 1976г.
- [34] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев *Математические задачи сильно неоднородных упругих сред* // М. МГУ, 1990г.

- [35] Г. П. Панасенко *Численное решение ячеечных задач теории осреднения* // ЖВМ и МФ № 28, с. 281-286, 1988г.
- [36] А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев. *Усреднение. Методы и некоторые приложения* - Новосибирск, Изд. "Тамара Рожковская", 2007г.
- [37] Э. Санчес-Паленсия. *Неоднородные среды и теория колебаний* - М. Мир, 1984г.
- [38] Я. И. Френкель *К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве* // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1944.
- [39] А. С. Шамаев, В. А. Самарин *О распространении акустических волн в среде, состоящей из вязкого жидкого и упругого материала* // ВИНТИ «Итоги науки», 2007г.
- [40] С. Б. Шульга *Усреднение нелинейных вариационных задач с помощью двухмасштабной сходимости* // Труды математического института им. В.А. Стеклова, т. 235, с. 1-8, 2001 г.