Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.9

Космодемьянский Дмитрий Александрович

Некоторые спектральные вопросы акустики в пористых средах

Специальность
01.01.02 – дифференциальные уравнения в частных производных

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. А. С. Шамаев

Москва, 2006

Оглавление

Введение

Задачам, связанным с построением так называемых "эффективных" или "усредненных" характеристик сильнонеоднородных сред, посвящено очень большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов. В их числе представляют интерес работы как российских ([**41**], [**34**], монографии [**17**], [**16**] и ряд других), так и западных (например, [**50**], [**46**], [**38**], [**33**], [**39**]). Среди множества рассматриваемых моделей неоднородных сред можно выделить модели так называемых "комбинированных сред", представляющих собой смесь из двух фаз с различными механическими свойствами, так, например, каркас из упругого материала и сжимаемая (или несжимаемая) вязкая жидкость. Для построения "эффективных" или "усредненных" моделей часто используется предположение о периодичности структуры включений материала одной фазы в другую. Такое предположение упрощает задачу о построении упомянутых "эффективных" или "усредненных" моделей. Под усредненными моделями понимаются такие краевые задачи для уравнений или систем с постоянными (или относительно медленно меняющимися) "эффективными" характеристиками, что решения краевых задач для исходных двухфазных моделей сходятся (в некотором смысле) к решению соответствующих уравнений для "усредненной" модели, когда период ε рассматриваемой периодической структуры стремится к нулю. При этом в ряде случаев сходимости в классическом смысле (например, в пространстве L_2) может и не быть. Для упомянутой выше задачи о среде "упругий каркас - сжимаемая жидкость" сходимость решений будет сильной только на "упругой" фазе; на "жидкой" фазе сходимости в классическом смысле не будет. В целом, в совокупной области, представляющей собой объединение жидкой и упругой фаз, сходимость будет только слабой. Чтобы определить более точно характер поведения допредельных сред на "жидкой фазе" и установить связь допредельных решений с решением соответствующей задачи для усредненной модели, в [**1**] было введено и активно исследовалось (см., например, [**25**], [**26**], работы французских математиков [**21**], [**23**], [**22**]) понятие "двухмасштабной сходимости" . Это понятие является развитием понятия слабой сходимости. Его отличительной особенностью является то, что двухмасштабный предел последовательности функций есть функция от двух групп переменных: от переменных, меняющихся внутри области, и переменных, меняющихся внутри ячейки периодичности. Такая функция содержит существенно больше информации о поведении допредельной последовательности решений, чем слабый предел; а именно - она говорит о том, как именно "осциллирует" последовательность, а не только каково среднее значение, вокруг которого она "осциллирует" .

Определение 1. Пусть $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ при любом $\varepsilon \downarrow 0$, и для любых $\varphi(x) \in D(\Omega)$, $\psi(y) \in D(Q)$ выполняется

$$\int\limits_{\Omega} u_\varepsilon(x)\varphi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon})\,dx \to \int\limits_{\Omega\times Q} u_0(x,y)\varphi(x)\psi(y)\,dxdy$$

для некоторой функции $u_0(x,y)$. Тогда мы говорим, что $u_\varepsilon(x)$ двухмасштабно сходится к функции $u_0(x,y)$ или

$$u_\varepsilon(x,\varepsilon) \xrightharpoonup{2} u_0(x,y).$$

(Часто такую сходимость называют еще слабой двухмасштабной сходимостью).

Другой важной особенностью "усредненной" модели для упомянутой выше среды "упругий каркас - сжимаемая жидкость" – по этому пути идут **[47]**, **[3]**, **[45]** – является то обстоятельство, что она не описывается системой дифференциальных уравнений. Искомой "усредненной" модели соответствует интегро-дифференциальная система уравнений, содержащая слагаемые вида свертки неизвестной функции с экспоненциально затухающим ядром свертки, зависящим только от временной переменной. Другой способ описания "усредненной" модели, с успехом примененный в **[2]**, состоит в выводе системы уравнений для двухмасштабного предела исходной последовательности решений, то есть некоторой системы уравнений на функции от "удвоенного" количества независимых переменных. Этот способ получил широкое распространение в последнее время. Однако в ряде случаев представляется более целесообразным в прикладных целях выразить усредненную модель через интегро-дифференциальную систему уравнений для функций от исходного (а не "удвоенного") числа независимых переменных. Кроме того, также представляется целесообразным сформулировать теорему о сходимости решений без использования понятия двухмасштабной сходимости, пользуясь только классическими терминами. При этом, в случае отсутствия сильной сходимости утверждение о сходимости должно быть сформулировано не в терминах слабой сходимости и не в терминах двухмасштабной сходимости, а как утверждение о стремлении к нулю нормы $\|u_\varepsilon(x,t) - u(x,x/\varepsilon,t)\|_{L_2(\Omega)}$, где $u_\varepsilon(x,t)$ - последовательность решений допредельных задач для исходной двухфазной среды, ε - величина периода, $u(x,y,t)$ - функция, которую мы можем представить явно из решения некоторых вспомагательных краевых задач на ячейке периодичности и через решение интегро-дифференциальной системы для "усредненной" модели, Ω – область, занятая двухфазной средой.

Для этого в [**2**] введено понятие сильной двухмасштабной сходимости, и доказана эквивалентность с указанной сходимостью по норме:

Определение 2. Последовательность функций u_ε сильно двухмасштабно сходится к функции $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Q)$, если

(1)
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) dx = \int\limits_\Omega \int\limits_Q u(x,y)\, v(x,y) dx dy, \text{ как только } v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x,y)$$

Упомянутые особенности задач для "комбинированных сред" характерны не только для сред, составленных из фаз с существенно различными механическими свойствами, с различной "реологией". Они также имеют место и для сред, составленных из однотипных по "реологическим" свойствам материалов, но с механическими параметрами, существенно различными по величине. Так, ранее была детально исследована так называемая задача о "двойной пористости", к примеру в [**24**], [**32**], монографии [**18**]. Рассматривается задача о распространении (диффузии) жидкости в материале, составленном из двух фаз: хорошо проводящей жидкость и плохо проводящей жидкость. При этом предполагается, что коэффициенты проводимости соотносятся как 1 и ε^2, где ε - размер периода структуры. В этой задаче также налицо упомянутые выше особенности усредненной модели и утверждений о сходимости последовательности решений исходных задач к решению усредненной задачи. Интересный пример представляет задача о распространении звуковых волн в суспензии (микстуре) из двух сжимаемых слабовязких жидкостей, когда при стремлении ε (периода структуры) к нулю, вязкость обеих жидкостей "вырождается" как ε^2. В этом случае (см [**3**], [**42**], [**44**], [**47**]) усредненная модель описывается так называемым "динамическим законом Дарси". Это – система уравнений, которую можно свести к волновому уравнению на усредненное давление с интегро-дифференциальным слагаемым типа свертки по временной переменной вторых производных функции давления с некоторым ядром, представляющим собой сумму экспонент. В [3] изучена сходимость решений исходной системы к решению усредненной системы и даны соответствующие теоремы о сходимости в терминах слабой сходимости. (Сильной сходимости смещений жидкостей и их скоростей тут не будет ни в одной из фаз; давление же будет сходиться сильно на обеих фазах, то есть в совокупной области).

Целью настоящей работы является исследование спектров предельных ("усредненных") моделей для упомянутых выше случаев и доказательство сильной двухмасштабной сходимости решений допредельных задач к решению усредненной задачи. В работе [2] показано, что спектр предельной задачи для проблемы двойной пористости, о которой мы упомянули выше, представляет собой счетное число "серий", сходящихся к концам интервалов на вещественной оси, в которых точек спектра точно не может быть; они называются "лакунами". При этом, как границы лакун, так и точки спектра из различных серий являются нулями или полюсами некоторых мероморфных функций, которые могут быть представлены "явно". Естественно, в таком случае возникают вопросы: 1) сохранится ли подобная картина для "динамического закона Дарси" и "закона Био" (то есть закона, описывающего распространение звуковых волн в среде "упругий каркас - вязкая жидкость"); 2) какое отношение имеет спектр предельной задачи к спектрам допредельных задач, то есть сходятся ли спектры допредельных задач как множества (например, в смысле сходимости множеств по Хаусдорфу) к спектру предельной задачи. Метод Блоховских операторов в применении к теории усреднения был также использован в [**35**] и [**36**].

Чтобы исследовать первый из поставленных вопросов, сделаем существенное упрощение в рассматриваемых нами задачах, а именно - будем изучать спектр только одномерных движений, то есть спектр "стоячих волн" в нашей "усредненной" среде, бегущих от одного края "стенки" к другому в перпендикулярном "стенке" направлении со скоростями и смещениями тоже только в перпендикулярном "стенке" направлении. В настоящей работе будет показано, что спектр таких "стоячих волн" для сред, описываемых "динамическим законом Дарси" и "законом Био", будет, вообще говоря, комплексным. На вещественной оси также появятся "лакуны" и серии вещественных точек спектра будут сходиться к краям лакун. Однако в этих случаях, в отличие от задачи о "двойной пористости", появятся две комплексные серии точек спектра, уходящие на бесконечность, но так, что вещественные части имеют конечный предел. Здесь, как и для случая "двойной пористости", все точки спектра и края "лакун" могут быть определены как нули и полюса некоторых мероморфных функций, которые могут быть найдены в явном виде. Второй из поставленных выше вопросов о спектре в настоящей работе не рассматривается. Следует отметить, что для случая "двойной пористости" этот вопрос частично решен в **[2]**. Там доказано, что если области с проводимостью ε^2 в периодической структуре не связаны между собой ("дисперсные включения"), то допредельные спектры сходятся к предельному в смысле сходимости множеств по Хаусдорфу. Для недисперсных включений вопрос до сих пор остается открытым.

Отметим еще, что аналогичные "лакуны" на вещественной оси появляются в задаче о спектре оператора Шредингера в периодической среде. Доказано, что при увеличении контрастности фаз среды, зонный спектр оператора Шредингера стремится по Хаусдорфу к спектру из счетного числа интервалов, разделенных "лакунами", края которых задаются с выражениями, совпадающими с полученными в [**2**]. Так, на основании описанного выше спектрального анализа можно установить общие черты задач, имеющих столь разную физическую и механическую природу.

Следует также отметить, что большое количество работ посвящено построению приближенных формул для "эффективных" или "усредненных" характеристик материалов вида "упругий каркас–сжимаемая жидкость"или суспензия из двух жидкостей, в которых указанные характеристики выражены через простые геометрические параметры ячейки периодичности рассматриваемой среды (см. [**4**]). Укажем на работу [**5**], в которой основные характеристики распространяющейся в среде плоской волны такие, как скорость распространения, декремент затухания и т.д. выражены приближенно через коэффициент пористости среды, так называемый "просвет" и, естественно, через характеристики исходных материалов: плотность, вязкость жидкости, модуль Юнга. Под "просветом" в заданном направлении распространения понимается доля освещенной площади на плоскости, ортогональной направлению распространения, если пучок света направлен по направлению распространения волны. Кроме того, в [**6**] приведены экспериментальные данные и описана технология проведения эксперимента по измерению характеристик собственных колебаний образцов из пористого материала, насыщенного вязкой жидкостью. Далее в настоящей работе будут приведены точные формулы для собственных частот и декрементов одномерных колебаний в упругих средах. Тем самым, вполне реальным становится исследование задачи о сравнении результатов расчета собственных колебаний и декрементов затухания с экспериментальными данными.

Перейдем к обзору содержания диссертации. Диссертация состоит из пяти глав, разбитых на параграфы, введения и заключения.

В **главе 1** приводится задача "двойной пористости" , сообщаются результаты усреднения в этой задаче, а также проведен анализ спектров предельной задачи для случая "одномерных" (описанных выше) движений.

В **главе 2** приводится задача о фильтрации жидкости в пористой среде. Более полный анализ этой задачи и доказательство теоремы 3 можно найти в [**8**].

В **главе 3** рассматривается задача о колебаниях "микстуры" (суспензии) двух вязких сжимаемых жидкостей в замкнутом сосуде. Постановка задачи дана по [**1**]. Здесь при анализе спектра упрощенной предельной задачи возникает интересная особенность поведения предельного спектра. В отличие от задачи "двойной пористости" , спектр предельного оператора не будет вещественным, а, напротив, будет содержать две серии комплексно сопряженных точек, действительные части которых накапливаются к некоторой точке, а мнимые – стремятся к бесконечности. Этот результат отражен в теоремах 4–5 (см. также фиг. 4 и фиг. 5) .

В **главе 4** рассмотрен так называемый Закон Био то есть закон, описывающий распространение звуковых волн в среде "упругий каркас - вязкая жидкость". Сообщается историческая справка, постановка задачи по [**1**], приведены предельные теоремы, необходимые для доказательства двухмасштабной сходимости. Ранее ни один из авторов не получал при помощи двухмасштабной сходимости предельную задачу, известную из классических физических работ (таких как [**7**] или [**12**]). В параграфах 4–7 **главы 4** проведено строгое доказательство двухмасштабной сходимости решений допредельной системы уравнений к решениям усредненной задачи.

В параграфах 8–9 приведено спектральное исследование упрощенной предельной задачи. Обнаружено интересное сходство поведений спектров рассматриваемой задаче с поведением спектров задачи о колебании суспензии двух вязких сжимаемых жидкостей в замкнутом сосуде (**глава 3**). Эти результаты сведены в теоремы 11–12 (см. также рисунки фиг. 8, 9, 10).

В **главе 5** доказана основная теорема 14.

Теорема. Имеют место следующие сходимости:

$$\chi\left(\Omega_\varepsilon^s\right)\hat{p}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \Pi p(x),$$
$$\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \vec{u}(x) + \vec{w}(x,y),$$
$$\varepsilon\,\nabla_x \vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla_y \vec{w}(x,y),$$
$$\chi\left(\Omega_\varepsilon^h\right)\left(\nabla_x \vec{\hat{u}}_\varepsilon(x)\right) \xrightarrow{2} \chi\left(\Omega\cap Q\backslash B\right)\left(\nabla_x \vec{u}(x) + \nabla_y \vec{u}_1(x,y)\right).$$

Замечание 1. В силу результатов, приведенных и доказанных в [**2**], теорема 14 может быть сформулирована в терминах сильной сходимости следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|p_\varepsilon(x,t) - p(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \vec{u}(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \dot{\vec{u}}(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla_x\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\vec{u}(x,t) - \nabla_y\vec{u}_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla_x\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\dot{\vec{u}}(x,t) - \nabla_y\vec{u}_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \vec{u}(x,t) - \vec{w}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\nabla_x\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\vec{u}(x,t) - \nabla_x\vec{w}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \dot{\vec{u}}(x,t) - \dot{\vec{w}}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\nabla_x\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\dot{\vec{u}}(x,t) - \nabla_x\dot{\vec{w}}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0.
\end{aligned}$$

В **заключении** приведен список возможных направлений применения результатов работы.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук А. С. Шамаеву за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения; своему отцу – доценту, кандидату физико-математических наук А. А. Космодемьянскому за поддержку в трудные минуты; кандидату физико-математических наук П. Л. Гуревичу за советы в оформлении работы.

Глава 1

Проблема двойной пористости

1.1. Постановка задачи

Пусть B – периодическое с периодом 1 открытое множество в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей ,Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ так же с гладкой границей. Положим $\Omega_\varepsilon^s = \Omega \bigcap \varepsilon B$, $\Omega_h^\varepsilon = \Omega \backslash \varepsilon \bar{B}$. Введем также обозначение $Q = [0,1] \times \dots \times [0,1]$ (d раз) – единичный куб в $\mathbb{R}^d$.

В случае распространения жидкости в среде, состоящей из двух материалов разной проводимости, (см [**2**]) проблема построения "усредненной" модели сводится к исследованию асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ задачи:

$$
\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon = div\,(a_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon|_{t=0} = \varphi(x),\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}
$$

где

$$
a_\varepsilon = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\varepsilon^h, \\ \varepsilon^2, & x \in \Omega_\varepsilon^s, \end{cases}
$$

точка означает производную по переменной t, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для построения асимптотик введем следующие вспомогательные задачи или "задачи на ячейке периодичности" . Решения всех этих задач должны быть 1-периодическими функциями по переменным $y_1, \dots, y_d$. Рассмотрим спектральную задачу Дирихле:

$$
\begin{cases} \Delta\psi_k = -\lambda_k\psi_k \text{ в } B, & \psi_k|_{\partial B} = 0, \\ ||\psi_k||_{L_2(B\cap Q)} = 1, & k = 1, 2, \dots \end{cases}
$$

где $\psi_k(y)$ - периодические функции, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$. Кроме того, определим также функции $N^i(y)$ как 1-периодические решения неоднородных задач Неймана (здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ – внешняя нормаль к ∂B – границе B):

$$\begin{cases} \Delta N^i(y) = 0 & \text{в } Q\backslash B, \\ \frac{\partial N^i}{\partial \nu} = \nu_i, & \text{на } \partial B. \end{cases}$$

Определим также матрицу с постоянными коэффициентами

$$a_{ij} = \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial N^i}{\partial y_j}(y) \right\rangle_{Q\backslash B}$$

и функции

$$d(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(y) e^{-\lambda_k t}; \quad D(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \psi_k(y) >_{B\cap Q} e^{-\lambda_k t}; \quad c_k =< \psi_k(y) >_B,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Здесь мы используем обозначение $\langle f \rangle_\Omega = \int\limits_\Omega f\, dy$. Нетрудно видеть, что функция $d(y,t)$ является решением следующей краевой задачи в классе 1-периодических по y функций:

$$\begin{cases} \dot{d}(y,t) = \Delta d(y,t), & t \in (0, +\infty), \\ d|_{\partial B} = 0, \quad d|_{t=0} = 1, & y \in B. \end{cases}$$

Тогда усредненная модель, как установлено, например, в [2], примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + D(t) * u \quad \text{в } \Omega, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $(f * g)(t) \equiv \int\limits_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$ – обозначение для свертки функций f и g, $D(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-\lambda_k t}$. В работе [2] показано, что имеют место сходимости:

$$\|u_\varepsilon(x,t) - u(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

и

$$\|u_\varepsilon(x,t) - w(x, x/\varepsilon, t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

где $w(x, y, t) = d(y, t) * [\dot{u}(x, t) + f(x, t)]$.

1.2. Спектральный анализ

Предположим теперь, что решение $u(x, t)$ задачи (3) зависит только от одной пространственной переменной x_1, а также $a_{11} = 1$ и $\Omega = [0, 1]$. Кроме того, здесь и далее мы будем предполагать, что ряд для определения функции $D(t)$ состоит из конечного числа экспонент. Это предположение упрощает исследование спектральных свойств рассматриваемых задач. При этом введенное упрощение довольно естественно: при численном анализе решений мы можем иметь дело только с рядами, содержащими конечное число членов. Тогда задача (3) примет вид

$$(4) \qquad \dot{u} = u'' + D(t) * u, \;\; u(0, t) = u(1, t) = 0, \; \forall t > 0;$$

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n} M_i e^{m_i t}, \;\; m_i = -\lambda_i, \;\; M_i = c_k^2.$$

Сделаем в (4) преобразование Лапласа по переменной t. Получим

$$(5) \qquad \hat{u}(x, \lambda) \cdot \lambda = \hat{u}''(x, \lambda) + \hat{D}(\lambda) \cdot \hat{u}(x, \lambda) + \varphi(x) \quad \text{в } \Omega,$$

$\hat{u}(0, \lambda) = \hat{u}(1, \lambda) = 0$, где $\hat{u}(x, \lambda)$ и $\hat{D}(\lambda)$ – преобразования Лапласа функций u и D соответственно.

Для изучения спектральных свойств задачи (5) положим $\varphi \equiv 0$ и исследуем спектр σ_1 задачи (5), то есть множество таких $\lambda \in C$, что задача (5) при $\varphi \equiv 0$ имеет отличные от нуля решения. Будем искать функцию $u(x, \lambda)$ в виде ряда

$$(6) \qquad u(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\lambda) \sin \pi k x$$

Подставим это разложение в (5) при $\varphi \equiv 0$. Так как система функций $\{\sin \pi k x\}$ полна в $L^2[0, 1]$, приравнивая множители при каждом

$k = 1, 2, \ldots$, получим

$$\lambda \hat{u}_k = -\pi^2 k^2 \hat{u}_k + \hat{D}(\lambda) \cdot \hat{u}_k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots \tag{7}$$

Очевидно, что спектр σ_1 задачи (5) совпадает с объединением по k решений уравнения (см. фиг. 1):

$$\hat{D}(\lambda) = \lambda + \pi^2 k^2, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

(Через N_i обозначены нули функции $\hat{D}(\lambda)$).
Справедливы следующие утверждения о структуре спектра σ_1 задачи (5) (см. фиг. 2):

1.3. Результаты

Теорема 1. Спектр σ_1 предельного оператора состоит из чисел m_i, $i = 1, 2, \ldots$, а также бесконечных серий конечнократных собственных значений, сходящихся слева к точкам m_i.

Теорема 2. Множество $\Lambda_1 = \{\lambda \in R : \hat{D}(\lambda) < 0\}$ не содержит точек спектра σ_1. Оно представляет собой объединение некоторого числа интервалов ("лакун"); левым концом каждого из этих интервалов будет соответствующая точка m_i, а правым - нуль функции $\hat{D}(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{M_i}{\lambda - m_i}$(см. фиг. 3).

Глава 2

Стационарная задача фильтрации в пористой среде

Здесь приведены некоторые результаты из [8, гл.III,§13] без доказательств.

Рассмотрим следующую задачу для системы уравнений Стокса (фильтрация жидкости в перфорированной области):

$$
(8) \qquad \begin{cases} -\nabla p_\varepsilon + \Delta \vec{u}_\varepsilon + \vec{f} = 0 & \text{в } \Omega^s_\varepsilon, \\ div \vec{u}_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega^s_\varepsilon, \\ \vec{u}_\varepsilon|_{\partial \Omega^s_\varepsilon} = 0, \end{cases}
$$

решение которой понимается как обобщенное, $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ – соответствующие определения приведены в [8]. Рассмотрим поведение решения задачи (8) при $\varepsilon \to 0$.

Определим вектор-функции $\vec{v}^k(y)$, $k = 1, 2$ как решения следующих вспомогательных задач на ячейке периодичности Q.

$$
\begin{cases} -\nabla_y q^k + \Delta_{yy} \vec{v}^k + \vec{e}_k = 0, & \text{в } Q \cap B, \\ div_y \vec{v}^k = 0, & \text{в } Q \cap B, \\ \vec{v}^k|_{\partial Q \setminus B} = 0, \\ \vec{v}^k,\ q^k\text{– 1-периодические по } y_1, \dots, y_d, \end{cases}
$$

где $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$ – орты координатных осей $0y_1, \dots, 0y_d$.

Определим матрицу

$$
K_{ij} \equiv \int\limits_{Q \cap B} v^i_j \, dy_1 dy_2,
$$

которая обладает свойством положительной определенности и называется матрицей эффективной фильтрации или матрицей Дарси. Приводимый ниже результат о предельном переходе для решения задачи Стокса в перфорированной области, приводящий к так называемому "закону Дарси" , на качественном уровне был известен специалистам по теории фильтрации несколько десятков лет назад. Однако строгое математическое доказательство, обосновывающее предельный переход от задачи Стокса к закону Дарси в области без перфорации, представляло значительные математические трудности.

В работе Л. Тартара, опубликованной в приложении к монографии [**3**], указанный предельный переход был осуществлен для ограниченной области Ω. Ранее такой предельный переход был проведен в работе Д. Б. Волкова [**9**] методом асимптотических разложений для неограниченной области. В работе В. В. Жикова [**10**] существенно ослаблены условия гладкости для границы препятствия $Q \cap B$, именно, рассмотрены некоторые классы областей $Q \cap B$ без условий Липшицевости границы $\partial(Q \cap B)$. В работе Г. В. Сандракова [**11**] рассмотрены задачи нестационарной фильтрации, когда внешняя сила, действующая на область с жидкостью, зависит от времени.

Верна следующая теорема (см. [**8**]).

Теорема 3. Продолжим последовательности скоростей $\vec{u}_\varepsilon$, продолженных нулем в Ω. Существует такое продолжение давления на всю область Ω (обозначим его как P_ε), что справедливы равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P_\varepsilon(x) - p(x)\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\vec{u}_\varepsilon(x) - \vec{u}_0(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \|\nabla \vec{u}_\varepsilon(x) - \nabla \vec{u}_0(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

где функция $p(x)$ является решением задачи Неймана

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{d} K_{ij} \dfrac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum\limits_{i,j=1}^{d} K_{ij} \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} & \text{в } \Omega, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{d} K_{ij} \dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i} n_j = \sum\limits_{i,j=1}^{d} K_{ij} f_i(x) n_j & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

$K_{ij} = \int\limits_{Q \cap B} (\vec{v}_i)_j dy$, а вектор-функции $\vec{v}_i$ являются решениями следующих задач Стокса в области $Q \cap B$:

$$\begin{cases} \nabla_y q_i(y) - \Delta_{yy} \vec{v}_i(y) = \vec{e}_i & \text{в } Q \cap B, \\ div \vec{v}_i = 0, \ \vec{v}_i \in H^1_{per}(Q \cap B), \end{cases}$$

функция $\vec{u}_0$ может быть представлена в виде

$$\vec{u}_0(x, y) = \sum_{i=1}^{d} \left(f^i(x) - \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \right) \vec{v}_i(y).$$

Результат теоремы (3) показывает, что можно сделать утверждение о близости компонент решения исходной задачи и их производных к соответствующим компонентам и их производным предельной задачи в терминах сильной сходимости в пространстве $L_2(\Omega)$. Одной из задач настоящей работы является исследование возможности получения аналогичных результатов для моделей распространения акустических волн в пористой среде, представляющей собой упругий каркас, заполненный жидкостью.

Заметим, что в ряде известных работ, посвященных данному вопросу, результаты о сходимости скоростей формулируются в терминах слабой или двухмасштабной сходимости. Для приложений представляет несомненный интерес переформулировать подобные результаты в терминах сильной сходимости не только для компонент скорости, но и для компонент градиента скорости. Действительно, величины градиентов скоростей жидкости определяют диссипацию энергии в процессе фильтрации, и поэтому важны для приложений.

Замечание 2. В этом разделе используется несколько отличное от принятого в настоящей работе определение перфорированной области. Здесь мы считаем, что ячейки, имеющие общие точки с границей исходной области Ω, входят целиком в состав этой области, препятствия из таких ячеек мы не выбрасываем. Такая модификация определения перфорированной области нужна для того, чтобы на границе области не возникали "заострения" такой конфигурации, при которых слабое решение системы Стокса может не иметь решения (и, следовательно, исходная постановка задачи не имеет смысла).

Глава 3

Проблема колебаний суспензии из двух жидкостей в ограниченном сосуде

3.1. Постановка задачи

Следующая краевая задача моделирует малые колебания смеси (суспензии) из двух жидкостей с плотностями ρ_1, ρ_2, коэффициентами сжимаемости γ_1, γ_2 и коэффициентами, определяющими вязкость ν_1, ν_2 соответственно. Она имеет вид

(9)

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \ddot{u}_i^\varepsilon = -\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \nu^\varepsilon(x) \Delta u_i^\varepsilon + f_i(x,t),\ (i = 1,2,3) \qquad \text{в } \Omega,\ \vec{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon) \\ p^\varepsilon(x,t) = -\gamma^\varepsilon div \vec{u}^\varepsilon,\ \vec{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0,\ \vec{u}^\varepsilon|_{t=0} = \dot{\vec{u}}^\varepsilon|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_1, & x/\varepsilon \in B, \\ \rho_2, & x/\varepsilon \in Q \backslash B, \end{cases},\ \gamma^\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma_1, & x/\varepsilon \in B, \\ \gamma_2, & x/\varepsilon \in Q \backslash B, \end{cases}$$

$$\nu^\varepsilon(x) = \begin{cases} \nu_1, & x/\varepsilon \in B, \\ \nu_2, & x/\varepsilon \in Q \backslash B. \end{cases}$$

Далее везде в этом разделе в этом разделе предполагается, что на границе контакта двух жидкостей выполнены естественные условия непрерывности смещений и поверхностных напряжений. Вспомогательные задачи на ячейке периодичности для построения усредненной системы имеют вид (см **[3]**)

$$\begin{cases} \rho(y)\dot{\vec{d}_i} - \nu(y)\Delta_y \vec{d}_i + \vec{\nabla} q = 0, & y \in Q \\ div_y \vec{d}_i = 0, \quad \vec{d}_i|_{t=0} = \dfrac{\vec{e_i}}{\rho(y)}, & y \in Q, \end{cases}$$

вектор-функция $\vec{d}_i(y), i = 1, 2, 3$ – 1-периодична, $\vec{e}_i$ - единичный орт в направлении оси Ox_i. Тогда имеет место представление

$$\vec{d}_i(y,t) = \sum_{k=1}^{n} c_i^k \vec{\psi}_k(y) e^{-\lambda_k t}, \; c_k^i = \left\langle \left(\frac{\vec{e}_i}{\rho(y)}, \vec{\psi}_k(y) \right) \right\rangle_Q ,$$

где $\{\vec{\psi}_k(y)\}$ и $\{\lambda_k\}$ – собственные функции и собственные значения спектральной задачи типа Стокса, состоящей в определении чисел $\{\lambda_k\}$ и вектор-функций $\{\vec{\psi}_k\}$ таких, что задача

$$\begin{cases} \rho(y)\lambda_k \vec{\psi}_k(y) - \nu(y)\Delta_{yy}\vec{\psi}_k(y) + \nabla q = 0, \quad y \in Q, \\ div_y \vec{\psi}_k(y) = 0, \quad \vec{\psi}_k(y) \text{– 1-периодична.} \end{cases}$$

имеет отличные от тождественных решения. Теперь положим$D_{ij}(t) = \Big[< \vec{d}_i(y,t) >_Q \Big]_j$ и обозначим через $\mathcal{D}(t)$ – матрицу из элементов $D_{ij}(t)$, а через $\mathcal{D}(y,t)$ - матрицу с элементами $(\mathcal{D}(y,t))_{ij} = \Big[\vec{d}_i(y,t) \Big]_j$
В [**3**] асимптотическими методами найдена усредненная система

$$(10) \qquad \begin{cases} \langle \gamma^{-1}(y) \rangle_Q \, \dot{p} + div_x \Big[\mathcal{D}(t) * (\vec{f}(x,t) - \vec{\nabla} p) \Big] = 0 & \text{в } \Omega, \\ (\mathcal{D}(t) * \vec{\nabla} p, \vec{\nu}) = (\mathcal{D}(t) * \vec{f}, \vec{\nu}) & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

и изучен вопрос о сходимости решений задачи (9) к решению задачи (10). Более детальный анализ проведен авторами настоящей работы, однако, его результаты находятся в стадии оформления. Так, имеют место сходимости:

$$\| u_\varepsilon(x,t) - u^0(x, x/\varepsilon, t) \|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\| \varepsilon \nabla_x u_\varepsilon(x,t) - \nabla_y u^0(x, x/\varepsilon, t) \|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

$$|| p_\varepsilon - p ||_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

где $u^0(x,y,t) \equiv (\int\limits_0^t \mathcal{D}(\tau, y)\, d\tau) * \Big(\vec{f}(x,t) - \vec{\nabla} p \Big)$.

3.2. Спектральный анализ

Возьмем предельную задачу (10) и упростим ее, как мы поступали ранее при анализе решения задачи о двойной пористоси, сокращая количество пространственных переменных до одной. Полученную задачу можно записать в виде:

$$\dot{p} = D * p''; \;\; p'(0,t) = p'(1,t) = 0; \;\; D(t) = \sum_{i=1}^{n} M_i e^{m_i t},$$

где $m_i = -\lambda_i$, а $M_i = \left\langle \frac{1}{\gamma(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \dfrac{\psi_i^{(1)}}{\rho(y)} \right\rangle_Q \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_Q$, $\psi_i^{(k)}$ – k-тая компонента вектора $\vec{\psi}_i$.

Заметим, что $M_i \geq 0 \, (i = 1, 2, \dots)$. В самом деле,

$$M_i = \left\langle \frac{\psi_i^{(1)}}{\rho(y)} \right\rangle_Q \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_Q =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho_1} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q\cap B} + \frac{1}{\rho_2} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q\setminus B} \right) \left(\left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q\cap B} + \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q\setminus B} \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho_1} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle^2_{Q\cap B} + \frac{1}{\rho_2} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle^2_{Q\setminus B} + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q\cap B} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q\setminus B} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\rho_1} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle^2_{Q\cap B} + \frac{1}{2\rho_2} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle^2_{Q\setminus B} \geq 0.$$

Проделаем те же действия, что при исследовании задачи (5). После применения преобразования Лапласа, принимая снова λ за спектральный параметр, придем к уравнению:

$$\hat{D}(\lambda) = -\frac{1}{\pi^2 k^2} \lambda, \quad k = 1, 2, \dots \tag{11}$$

(см. фиг. 4). Здесь, в отличие от случая задачи двойной пористости, появляется мнимая часть точек спектра σ_2 предельного оператора. При $k \to \infty$ действительные части двух сопряженных собственных значений стремятся к конечному пределу, а мнимые стремятся к бесконечности. Предельными точками серий являются нули функции $\hat{D}(\lambda)$.

3.3. Результаты

Следующие два утверждения о структуре спектра σ_2 – результат простого анализ решений уравнения (11) (см. фиг. 5):

Теорема 4. Спектр σ_2 задачи (11) состоит из бесконечных серий конечнократных собственных значений, стремящихся справа к вещественным нулям функции $\hat{D}(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\lambda - m_i}$, а также двух серий сопряженных собственных значений, модули которых стремятся к бесконечности, а действительные части стремятся к величине $x_0 = \dfrac{\sum M_i m_i}{2\sum M_i} \leq 0$.

Теорема 5. Множество $\Lambda_2 = \{\lambda \in R : \hat{D}(\lambda) < 0\}$ не содержит точек спектра σ_2. Оно представляет собой бесконечное число интервалов ("лакун"). Левым концом каждого из этих интервалов будет соответствующий нуль функции $\hat{D}(\lambda)$, а правым – точка m_i(см. фиг. 6).

Замечание 3. Пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Тогда

$$M_1 = \frac{1}{\rho \left\langle \gamma^{-1} \right\rangle_Q}; \quad M_k = 0 \text{ при } k > 1; \quad m_1 = 0,$$

и уравнение (11) примет вид

$$\frac{1}{\lambda\rho \left\langle \gamma^{-1} \right\rangle_Q} = -\frac{\lambda}{\pi^2 k^2},$$

откуда

$$\lambda = \pm i \frac{\pi k}{\sqrt{\rho \left\langle \gamma^{-1} \right\rangle_Q}}$$

– собственные частоты колебаний струны.

Этот пример говорит о том, что при одинаковой плотности двух жидкостей, входящих в состав смеси, исчезают эффекты "последействия" и диссипации энергии.

Глава 4

Малые колебания комбинированной среды, состоящей из вязкой сжимаемой жидкости и упругого каркаса (Закон Био)

4.1. История вопроса

Задача о распространении акустических волн в среде, состоящей из двух фаз — упругого материала и вязкой жидкости — рассматривалась в течение последних 50–60 лет многими авторами.

Так, в работе [**7**] выведены формулы для средних величин тензора напряжений и давления в грунте (породе), который можно представить как упругий каркас с трещинами, заполненными вязкой жидкостью. При этом предполагается, что характерные размеры микронеоднородностей среды малы по сравнению с единицей измерения длины, от которой зависят средние значения компонент тензора напряжений τ_{ij} и давление p.

Здесь и далее мы принимаем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Указанные формулы имеют вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda div u + \alpha M div w), \tag{12}$$

$$p = -\alpha M div u - M div w, \tag{13}$$

где μ, λ, α, M — некоторые постоянные, зависящие от свойств упругого материала и жидкости, $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ — вектор-функция, задающая среднее смещение упругого материала ("каркаса" или "скелета"), $\vec{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)$ — среднее смещение жидкости по отношению к "каркасу" или "скелету".

В работе [**12**] с использованием уравнений (12), (13) строится модель распространения акустических волн в комбинированных средах "жидкость – упругий материал". В дальнейшем приводимый нами ниже закон распространения волн в ряде работ используется под названием "закона Био".

Система уравнений из работы [**12**] имеет вид:

$$\tilde{\rho}\ddot{\vec{u}} + \rho^s \ddot{\vec{w}} \mu \Delta \vec{u} + \nabla \left[(\mu + \lambda_c) divu + \alpha M divw \right] + f(x,t) = 0, \tag{14}$$

$$\vec{\nabla} p - \vec{f} - \rho^s \ddot{\vec{u}} = \mathbf{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\vec{w}}, \tag{15}$$

$$p = -\alpha M divu - M divw, \tag{16}$$

где $\tilde{\rho}$ – средняя плотность комбинированной среды "упругость – жидкость", ρ^s — плотность жидкости, $\mu, \lambda_c, \alpha, M$ — некоторые константы, определяющие упругие свойства вещества и сжимаемость жидкости, $\mathbf{A}(\frac{\partial}{\partial t})$ — матричный оператор, каждый элемент которого (а их $3 \times 3 = 9$) представляет собой некоторую функцию от дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial t}$. Конкретный вид этой функции строится автором из эвристических соображений, в зависимости от свойств жидкости и геометрических свойств каналов, заполненных жидкостью.

В книге [**3**] та же задача исследуется асимптотическими методами. Автор предполагает, что комбинированная среда "жидкость –

упругий материал" имеет периодическую структуру, причем период представляет собой малую величину, равную ε. Будем предполагать, что упругий материал ("каркас") и область, занятая жидкостью, являются связными множествами. Приводимую ниже систему дифференциальных уравнений авторы выводят с помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$. Она имеет вид:

$$\tilde{\rho}\ddot{u}_i + \rho^s \ddot{w}_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkn}e_{kn}(u) - \alpha_{ij}p) + f_i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{17}$$

$$\dot{\vec{w}}_k = \int\limits_{-\infty}^{t} g_{ki}(t-s)\left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho^s \ddot{u}_i\right) ds, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta\right) p + divw + \alpha_{ij}e_{ij}(u) = 0, \tag{19}$$

где Π, γ, β — коэффициенты пористости упругой среды, сжимаемости жидкости и сжимаемости упругого материала, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}|Q \cap B| - \beta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $|Q \cap B|$ — объем жидкости в одной ("стандартной") ячейке периодичности Q со стороной 1, β_{ij} — некоторые числа, характеризующие сжимаемость упругого материала при нагружениях периодической ячейки определенным набором силовых полей, приложенных к границе, q_{ijkn} — так называемый "эффективный" или "усредненный" тензор для пористой упругой среды в отсутствии жидкости, $g_{ki}(s)$ — элементы матричного (размером 3×3) интегрального оператора типа свертки, которые определяются через решение некоторых вспомогательных задач типа динамической задачи Стокса на ячейке периодичности $Q \cap B$, которые мы приведем ниже.

Рассуждения автора приводят к усредненной системе (17)–(19), однако не являются вполне строгими.

В работе [**1**] приводится вполне строгое доказательство предельного перехода от системы уравнений для двух фаз к упомянутой усредненной системе. В этой работе автор рассматривает случай сжимаемой жидкости. Для проведения строгого доказательства справедливости предельного перехода автор вводит понятие "двухмасштабной сходимости", обобщающей понятие слабой сходимости, и доказывает свойства этой сходимости.

Аналогичному вопросу посвящена статья [**13**], где с помощью метода т. н. “двухмасштабной” сходимости выводится указанная система для случая несжимаемой жидкости.

4.2. Постановка задачи

Пусть, как и ранее, $Q = (0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ – единичный куб в $\mathbb{R}^3$, B – периодическое с периодом 1 открытое множество в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей такое, что $Q \cap B$ связно, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ так же с гладкой границей, положим $\Omega_\varepsilon^s = \Omega \cap \varepsilon B$, $\Omega_\varepsilon^h = \Omega \backslash \varepsilon \bar{B}$, где $0 < \varepsilon < 1$ - малый параметр.

Далее мы будем пользоваться следующими обозначениями для произвольных вектор-функций $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ и $\vec{w} = (w^1, w^2, w^3)$:

$$E_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right),\ e_{ij}(\vec{w}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^i}{\partial y_j} + \frac{\partial w^j}{\partial y_i}\right).$$

Соответственно мы обозначаем за div_y оператор дивергенции по переменным y, а div_x (или просто div) означает оператор дивергенции по переменным x.

После этих предварительных замечаний мы можем приступить к формулировке математической постановки задачи. Итак, пусть $a_{ijkl} (1 \leq\ i, j, k, l \leq 3)$ и μ, η– действительные числа, удовлетворяющие следующим условиям

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{jilk} = a_{klij},$$

$$a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{ij},\ \alpha > 0,\ \ \forall \xi_{ij} \in R,\ \xi_{ij} = \xi_{ji},$$

$$\mu > 0; \quad \eta/\mu > -(2/3)\alpha, \ 0 < \alpha < 1.$$

Определим также такие 1-периодические по каждой координате функции

$$\begin{array}{llll} c_{ijkl}(y) = a_{ijkl}, & y \in Q \backslash B, & b_{ijkl}(y) = 0 & y \in Q \backslash B \\ c_{ijkl}(y) = \gamma \delta_{ij} \delta_{kl}, & y \in Q \cap B, & b_{ijkl}(y) = \eta \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), & y \in Q \cap B. \end{array}$$

(здесь δ_{ij} - символ Кронекера). Далее

$$\rho(y) = \rho^h, \ y \in Q \backslash B, \ \ \rho(y) = \rho^s, \ y \in Q \cap B, \ \ \gamma = c_0^2 \rho^s, \ c_0 > 0$$

ρ_h – плотность упругого материала, c_0 – скорость звука в жидкости. Также мы будем для периодических функций использовать обозначение

$$w^\varepsilon(x) = w(\frac{x}{\varepsilon}) \ \text{для любой функции } w = w(y).$$

Затем, для любых функций $\vec{u} = (u^i)$ и $\vec{v} = (v^i)$ из $H^1(\Omega)$ определим билинейные формы

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \int\limits_\Omega b_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx,$$

$$c(\vec{u}, \vec{v}) = \int\limits_\Omega c_{ijkl} \frac{\partial u^k}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx.$$

Для функции $\vec{f}(x,t) = (f^i)(x,t)$, $i = 1, 2, 3$ из $L^2_{loc}(L^2(\Omega); 0, +\infty)$, удовлетворяющей для почти всех $0 < t < +\infty$ оценке

$$||\vec{f}(x,t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq K\, e^{mt} \ (K > 0, m \in R),$$

мы рассматриваем следующую краевую задачу, которую мы сначала формулируем в виде интегрального тождества:

Найти такую функцию $\vec{u}_\varepsilon(x,t) \in L^2\left(H^1_0(\Omega); (0, +\infty)\right)$ *(отклонение точки среды от положения равновесия в точкех в момент* *времени* t*),что*

$$(20)\qquad \int\limits_{\Omega} \rho^{\varepsilon} \ddot{u}_{\varepsilon}^{i} \cdot v^{i} dx + \varepsilon^{2} b^{\varepsilon}(\dot{\vec{u}}_{\varepsilon}, \vec{v}) + c^{\varepsilon}(\vec{u}_{\varepsilon}, \vec{v}) = \int\limits_{\Omega} f^{i} \cdot v^{i} dx$$

$$\forall \vec{v} = (v^{i}) \in H_{0}^{1}(\Omega),\ \vec{u}_{\varepsilon}(x,0) = \dot{\vec{u}}_{\varepsilon}(x,0) = 0.$$

Замечание 4. Формы b^{ε} и c^{ε} могут быть представлены в следующем виде:

$$b^{\varepsilon}(\vec{u}, \vec{v}) = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^{s}} \left(\eta\, div\vec{u}\, div\vec{v} + 2\mu E_{ij}(\vec{u}) E_{ij}(\vec{v})\right) dx,$$

$$c^{\varepsilon}(\vec{u}, \vec{v}) = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^{s}} \gamma\, div\vec{u}\, div\vec{v}\, dx + \int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^{h}} a_{ijkl} \frac{\partial u^{k}}{\partial x_{l}} \cdot \frac{\partial v^{i}}{\partial x_{j}} dx,$$

и, ввиду симметрии коэффициентов a_{ijkl}, последнее представление можно переписать как

$$\int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^{h}} a_{ijkl} \frac{\partial u^{k}}{\partial x_{l}} \cdot \frac{\partial v^{i}}{\partial x_{j}} dx = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^{h}} a_{ijkl} E_{kl}(\vec{u}) E_{ij}(\vec{v}) dx.$$

Сформулированная выше задача допускает эквивалентную формулировку в следующей дифференциальной записи (см [3]):

(21)

$$\begin{cases} \rho^{h} \ddot{u}_{\varepsilon}^{i} - \frac{\partial}{\partial x_{j}}(a_{ijkh} e_{kh}(\vec{u}_{\varepsilon})) = f^{i}(x,t), & x \in \Omega_{\varepsilon}^{h} \\ \rho^{s} \ddot{u}_{\varepsilon}^{i} - \eta \varepsilon^{2} \Delta \dot{u}_{\varepsilon}^{i} + \dfrac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_{i}}(x) - 2\mu\varepsilon^{2} \frac{\partial}{\partial x_{j}}(e_{kh}(\vec{u}_{\varepsilon})) = f^{i}(x,t), & x \in \Omega_{\varepsilon}^{s}, \\ p^{\varepsilon}(x,t) = -\gamma\, div\vec{u}_{\varepsilon},\ [\vec{u}_{\varepsilon}]|_{S_{\varepsilon}} = 0,\ [\sigma_{ij}(\vec{u}_{\varepsilon})\nu_{j}]|_{S_{\varepsilon}} = 0, & S_{\varepsilon} = Q \cap \varepsilon\partial B, \\ \vec{u}_{\varepsilon}(x,0) = \dot{\vec{u}}_{\varepsilon}(x,0) = 0,\ \vec{u}_{\varepsilon}|_{\partial\Omega} = 0, & \end{cases}$$

здесь вектор-функция $\vec{u}_{\varepsilon}$ представляет собой вектор смещения упругой компоненты в упругой фазе и жидкости в жидкой фазе,$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}})$, $p^{\varepsilon}(x,t)$ – давление в жидкой фазе, $[f]\,|_{S}$ – скачок функции f при переходе через поверхность S,

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -\delta_{ij} p + (\eta \delta_{ij}\delta_{kh} + 2\mu \delta_{ik}\delta_{ih}) e_{kh}\left(\dot{\vec{u}}_{\varepsilon}\right) & \text{в } \Omega_{\varepsilon}^{s}, \\ a_{ijkh} e_{kh} & \text{в } \Omega_{\varepsilon}^{h}. \end{cases}$$

Сделаем преобразование Лапласа

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

обеих частей интегрального тождества (20).

Задача (20) в переменных $(x,\, y,\, \lambda)$ для фиксированного λ такого, что $Re\lambda > \lambda_0 > 0$, где λ_0 достаточно велико, примет вид:

Найти такую функцию $\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$, *что*

$$\lambda^2 \int\limits_\Omega \rho^\varepsilon \hat{u}_\varepsilon^i \cdot v^i dx + \lambda \varepsilon^2 b^\varepsilon(\vec{\hat{u}}_\varepsilon, \vec{v}) + c^\varepsilon(\vec{\hat{u}}_\varepsilon, \vec{v}) = \int\limits_\Omega \hat{f}^i \cdot v^i dx \tag{22}$$

$\forall \vec{v} = (v^i) \in H_0^1(\Omega)$.

Здесь аргумент λ у функций $\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x, \lambda), \vec{\hat{f}}(x, \lambda)$ для удобства опущен. Впредь мы не будем писать зависимость от параметра λ за исключением случаев, когда это может привести к недоразумению.

4.3. Предельные теоремы

Нам понадобится определение двухмасштабной сходимости, сформулированное в [**1**]:

Определение 3. Пусть $u_\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$ при любом $\varepsilon \downarrow 0$, и для любых $\varphi(x) \in D(\Omega)$, $\psi(y) \in D(Q)$ выполняется

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon(x) \varphi(x) \psi(\frac{x}{\varepsilon})\, dx \to \int\limits_{\Omega \times Q} u_0(x, y) \varphi(x) \psi(y)\, dx dy$$

для некоторой функции $u_0(x, y)$. Тогда мы говорим, что $u_\varepsilon(x)$ двухмасштабно сходится к функции $u_0(x, y)$ или

$$u_\varepsilon(x, \varepsilon) \stackrel{2}{\rightharpoonup} u_0(x, y).$$

(Часто такую сходимость называют еще слабой двухмасштабной сходимостью).

В процессе развития этого понятия были сформулированы и доказаны так называемые Теоремы Нгуетсенга. Здесь нам удобно дать формулировки и некоторые следствия из них, за доказательством же можно обратиться либо к первоисточнику [1], либо к монографии [8], в которой эти вопросы широко освещаются.

Теорема 6. (Первая теорема сходимости)

Предположим, что

$$\int\limits_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2 \, dx < C,$$

где $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Тогда из последовательности функций $\{u_\varepsilon(x)\}$ можно выбрать двухмасштабно сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 7. (Вторая теорема сходимости)

Предположим, что $u_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\Omega} \left(|u_\varepsilon(x)|^2 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\right) \, dx < C,$$

где $C > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Тогда из последовательности функций $\{u_\varepsilon(x)\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{u_{\varepsilon'}(x)\}$, что

$$u_{\varepsilon'} \xrightarrow{2} u(x), \quad \varepsilon' \to 0,$$

$$\nabla_x u_{\varepsilon'} \xrightarrow{2} \nabla_x u(x) + \nabla_y u^{(1)}(x, y), \quad \varepsilon' \to 0,$$

где $u(x) \in H^1(\Omega)$ и $u^{(1)}(x, y)$ – некоторая функция от переменных $x \in \Omega$, $y \in Q$, $u^{(1)}(x, y) \in L_2(\Omega; H^1(Q))$.

Теорема 8. (Третья теорема сходимости)

Предположим, что

$$\int\limits_{\Omega} |u_\varepsilon(x)|^2\,dx < C$$

и $\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla_x u_\varepsilon(x)|^2\,dx < C$, *где* $C > 0$ *не зависит от* $\varepsilon > 0$. *Тогда из последовательности функций* $\{u_\varepsilon(x)\}$ *можно выбрать такую подпоследовательность, что*

$$u_{\varepsilon'} \xrightarrow{2} u(x), \quad \varepsilon' \to 0,$$

$$\varepsilon\nabla_x u_{\varepsilon'}(x) \xrightarrow{2} \nabla_y u(x,y), \quad \varepsilon' \to 0,$$

где функция $u(x,y) \in L_2(\Omega; H^1(Q))$.

Теорема 9. (Четвертая теорема сходимости)

Предположим, что $u_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \left(|u_\varepsilon(x)|^2 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\right)\,dx < C$$

и

$$\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u_\varepsilon(x)|^2\right)\,dx + \int\limits_{\Omega} \left(|u_\varepsilon(x)|^2\right)\,dx < C,$$

где $C > 0$ *не зависит от* $\varepsilon > 0$. *Тогда из последовательности функций* $\{u_\varepsilon(x)\}$ *можно выбрать такую подпоследовательность, что*

$$u_{\varepsilon'} \xrightarrow{2} u(x,y), \quad \varepsilon \to 0,$$

где функция $u(x,y) \in L_2(\Omega; H^1(Q))$, *причем* $u(x,y) = u(x)$, $y \in Q\backslash B$, $u(x) \in H^1(\Omega)$ *и для любых* $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Phi(y) \in C_{per}^\infty(Q)$ *имеет место сходимость*

$$\chi(\Omega_{\varepsilon'}^h)\nabla_x u_{\varepsilon'} \xrightarrow{2} \chi(\Omega \times Q\backslash B)\left(\nabla_x u(x) + \nabla_y u^{(1)}(x,y)\right), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $u^{(1)}(x,y)$ – *некоторая функция от переменных* $x \in \Omega$, $y \in Q$ $u^{(1)}(x,y) \in L_2(\Omega; H^1(Q))$. *Кроме того, при* $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon'\chi(\Omega_{\varepsilon'}^s)\nabla_x u_{\varepsilon'} \xrightarrow{2} \nabla_y u(x,y).$$

Здесь функция $\chi(D)$ – характеристическая функция множества D:

$$\chi(y) = 1, \;\; y \in D; \qquad \chi(y) = 0, \;\; y \notin D.$$

Приведенные четыре теоремы представляют собой удобный и эффективный инструмент исследования задач усреднения. С их помощью мы сделаем несколько оценок, которые помогут нам в дальнейшем изучении задачи.

4.4. Слабая двухмасштабная сходимость

Начнем с результатов некоторых предварительных несложных вычислений (проделанных, например в **[3]**). Из тождества (22) следует, что существует такая константа $K > 0$, что

$$c^{\varepsilon}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}, \vec{\hat{u}}_{\varepsilon}) \leq K, \;\; \forall \varepsilon > 0, \tag{23}$$

$$\varepsilon^2 b^{\varepsilon}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}, \vec{\hat{u}}_{\varepsilon}) \leq K, \;\; \forall \varepsilon > 0, \tag{24}$$

(где для простоты мы опять опускаем параметр λ и пишем $\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}$ вместо $\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(\lambda)$) и

$$b^{\varepsilon}(\vec{v}, \vec{v}) + c^{\varepsilon}(\vec{v}, \vec{v}) \geq K||\vec{v}||_{H_0^1(\Omega)}$$

для всех $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)$. Из (23) и (24) следует немедленно, что

$$\varepsilon||\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}||_{H_0^1(\Omega)} \leq K, \;\; \forall \varepsilon. \tag{25}$$

Также в **[1]** доказано (мы приводим здесь этот факт без доказательства), что

$$||div\, \vec{\hat{u}}_{\varepsilon}||_{L_2(\Omega)} \leq K, \quad \forall \varepsilon, \tag{26}$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^h} \left| \frac{\partial \hat{u}_{\varepsilon}^i}{\partial x_j} \right|^2 dx \leq K, \;\; 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Теперь мы можем сформулировать два важных утверждения.

Лемма 1. *Можно выбрать подпоследовательность* $\varepsilon \downarrow 0$, что

(27) $$\vec{\hat{u}}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \vec{w}_0(x,y);$$

(28) $$\varepsilon \nabla_x \vec{\hat{u}}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \nabla_y \vec{w}_0(x,y), \text{ где } \vec{w}_0 = (w_0^k) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q));$$

(29) $$div_y \vec{w}_0 = 0, \text{ более того, } \vec{u}_w(x) = \int\limits_Q \vec{w}_0(x,y)dy,$$

где $\vec{u}_w(x)$ *– слабый* L^2*–предел функций* $\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x,\lambda)$.
(Здесь $\nabla_x \vec{v}$ - матрица 3×3 с коэффициентами $\dfrac{\partial v^i}{\partial x_j}$, а сходимость понимается поэлементно).

Доказательство. Утверждение (27) напрямую следует из Первой Теоремы Нгуетсенга, свойство (28) получается из (25), Третьей Теоремы Нгуетсенга и (27). Первая часть (29) сразу выводится из (26) и (28), а вторая - из (27) и ограниченности $\{\vec{\hat{u}}_\varepsilon\}$ в $L_2(\Omega)$.

$\square$

Лемма 2. *Пусть* ε *– подпоследовательность из* (27)–(29), *тогда*

(30) $$\chi(\Omega^h_\varepsilon)\nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \chi\left(\Omega \times (Q \backslash B)\right)\left(\nabla_x \vec{u}(x) + \nabla_y \vec{u}_1(x,y)\right),$$

где

$$\vec{u} = (u^k) \in H^1_0(\Omega), \ \vec{u}_1 = (u_1^k) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q \backslash B)), \int\limits_{Q \backslash B} u_1^k dy = 0.$$

Выполняется и соотношение

(31) $$\vec{w}_0(x,y) = \vec{u}(x) + \vec{w}(x,y),$$

(32)
$$\vec{w} \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q)); \ \vec{w}(x,y) = 0, \ y \in Q \backslash B; \ div_y \vec{w}(x,y) = 0, y \in Q \cap B.$$

Доказательство. Доказательство последнего не вызывает затруднений и состоит из применения определения двухмасштабной сходимости, Второй и Четвертой теорем сходимости и уже полученных результатов (27)–(29)).

$\square$

Теперь приступим к изучению предельного поведения давления на мягкой (жидкой) фазе. Из уравнения неразрывности следует, что давление p_ε и перемещение $\vec{u}_\varepsilon$ связаны по правилу:

$$\hat{p}_\varepsilon = -\gamma\, div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon \text{ в } \Omega^s_\varepsilon. \tag{33}$$

Это значит, что $\hat{p}_\varepsilon \in L^2(\Omega^s_\varepsilon)$, $\|\hat{p}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^s_\varepsilon)} \leq C, \forall\varepsilon > 0$. Следующим нашим шагом будет доопределение давления на всей области Ω. Введём такие функции $P^{kl}_\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $1 \leq k, l \leq 3$, что

$$\int\limits_\Omega P^{kl}_\varepsilon v^i\, dx = \int\limits_{\Omega^h_\varepsilon} \frac{\partial \hat{u}^k_\varepsilon}{\partial x_l} v^i\, dx - \frac{\delta_{kl}}{3\gamma} \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \hat{p}_\varepsilon v^i\, dx, \quad \forall\, \vec{v} = (v^i) \in L^2(\Omega). \tag{34}$$

Последовательность P^{kl}_ε, $\varepsilon > 0$ ограничена в $L^2(\Omega)$. Обозначая за P^{kl} её двухмасштабный предел при $\varepsilon \to 0$, легко с помощью (30) получить такое равенство

$$P^{kl}(x,y) = \frac{\partial u^k}{\partial x_l}(x) + \frac{\partial u^k_1}{\partial y_l}(x,y), \quad x \in \Omega,\, y \in Q \backslash B.$$

В итоге, полагая

$$p(x,y) = -\sum_{l=1}^{3} \gamma P^{ll}(x,y), \quad x \in \Omega,\, y \in Q \cap B$$

и используя (31), приходим к следующему результату

Теорема 10. *Пусть ε – подпоследовательность из* (30)–(32). *Тогда верно также, что*

$$\hat{p}_\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} p(x,y),\ p \in L^2(\Omega; L^2_{per}(Q)) \tag{35}$$

Более того

(36)
$$\int\limits_{Q\setminus B} div_y \vec{u}_1(x,y)\,dy = |Q\cap B| div_x \vec{u}(x) + div_x \int\limits_{Q\cap B} \vec{w}(x,y)\,dy + \frac{1}{\gamma}\int\limits_{Q\cap B} p(x,y)dy.$$

Замечание 5. Последнее тождество (36) является ключевым в определении относительного смещения $w(x,y)$. Поэтому разберём его более подробно.

Итак, (34) при $k=l$, $\varepsilon>0$ выглядит как

$$\begin{cases} P^{kk}_\varepsilon = \dfrac{\partial \hat{u}^k_\varepsilon}{\partial x_k}, & \text{для } x\in\Omega^h_\varepsilon, \\ P^{kk}_\varepsilon = \dfrac{1}{3} div\,\vec{\hat{u}}_\varepsilon, & \text{для } x\in\Omega^s_\varepsilon \end{cases} \tag{37}$$

После двухмасштабного предельного перехода, в соответствии с определением $p(x,y)$ и (30), получим ($k=1,\,2,\,3$)

$$\begin{cases} P^{kk} = \dfrac{\partial u^k}{\partial x_k}(x) + \dfrac{\partial u^k_1}{\partial y_k}(x,y), & \text{для } x\in\Omega,\ y\in Q\setminus B, \\ P^{kk} = -\dfrac{1}{3\gamma} p(x,y), & \text{для } x\in\Omega,\ y\in Q\cap B \end{cases} \tag{38}$$

Теперь сведём (38) в одно интегральное тождество, ведь

$$-\frac{\hat{p}_\varepsilon}{\gamma} \xrightarrow{2} -\frac{p(x,y)}{\gamma},$$

то есть

$$div\,\vec{\hat{u}}_\varepsilon \xrightarrow{2} \sum_{k=1}^{3} P^{kk}$$

и при этом $\|div\,\vec{\hat{u}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le C$, $\forall\varepsilon>0$.

С другой стороны из (29) известно, что $div_y \vec{w}(x,y)=0$. Тогда получаем

$$div\,\vec{\hat{u}}_\varepsilon \xrightarrow{2} div\,\vec{w}_0(x,y) = div_x \vec{u}(x) + div_x \vec{w}(x,y).$$

Следовательно, верно соотношение

$$\sum_{k=1}^{3} P^{kk} = div_x \vec{u}(x) + div_x \vec{w}(x,y). \tag{39}$$

Подставляя значение для P^{kk} из (38) в последнее равенство, и интегрируя по ячейке периодичности Q, получаем окончательно

(40)
$$\int\limits_{Q} div_x\vec{u}\,dy+\int\limits_{Q\cap B} div_x\vec{w}(x,y)\,dy=\int\limits_{Q\setminus B} div_x\vec{u}\,dy+\int\limits_{Q\setminus B} div_y\vec{u}_1\,dy-\frac{1}{\gamma}\int\limits_{Q\cap B} p\,dy,$$

что немедленно влечет (36).

Лемма 3. *$p(x,y)$ не зависит от быстрой переменной y*, и $p(x)\in L^2(\Omega)$.

Доказательство. Для доказательства предложения подставим в (22) пробную функцию вида

$$\vec{v}(x,\varepsilon)=\varepsilon\vec{\psi}(\frac{x}{\varepsilon})\,\varphi(x),\quad \vec{\psi}\in H^1_{per}(Q),\,\varphi\in D(\Omega).$$

Перейдём к двухмасштабному пределу по (30) и (35). В результате получим задачу на ячейке периодичности Q для функции $\vec{u}_1(x,y)$, $\forall\vec{\psi}\in H^1_{per}(Q)$:

(41)
$$\int\limits_{Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_l}(x)+\frac{\partial u_1^k}{\partial y_l}(x,y)\right)\frac{\partial\psi^i}{\partial y_j}(y)dy-\int\limits_{Q\cap B} p(x,y)div_y\,\vec{\psi}(y)dy=0.$$

Проинтегрируем вторую часть этого тождества по частям

$$\int\limits_{Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_l}(x)+\frac{\partial u_1^k}{\partial y_l}(x,y)\right)\frac{\partial\psi^i}{\partial y_j}(y)dy+\int\limits_{Q\cap B}\frac{\partial p(x,y)}{\partial y_i}\psi^i(y)dy=0.$$

и в качестве пробной подставим функцию $\vec{\psi}\in H^1_{per}(Q)$, для которой выполняется условие $supp\,\vec{\psi}(y)\subset Q\cap B$. Тогда первое слагаемое в (41) обращается в ноль, и, следовательно

$$\int\limits_{Q\cap B}\frac{\partial p(x,y)}{\partial y_i}\psi^i(y)dy=0,\ \forall\vec{\psi}\in H^1_{per}(Q),\ supp\,\vec{\psi}\subset Q\cap B,$$

что моментально влечет $p(x) \in L^2(\Omega)$.

$\square$

4.5. Задача на ячейке периодичности

Подставим в (22) пробную функцию вида

$$\vec{v}(x,\varepsilon) = \vec{\varphi}(\frac{x}{\varepsilon})\zeta(x), \ \ div_y\vec{\varphi}(y) = 0, \ \vec{\varphi}(y)|_{Q\setminus B} = 0, \ \zeta(x) \in D(\Omega),$$

и после несложных вычислений, используя (27)–(29), (30)–(32) и (35) и устремив $\varepsilon \to 0$, получим интегральное тождество:

$$(42) \quad \lambda^2\rho^s \int\limits_{Q\cap B} w^i\varphi^i dy - \lambda\mu \int\limits_{Q\cap B} \Delta_{yy}w^i\varphi^i \, dy = \\ = \left(\hat{f}^i(x) - \lambda^2\rho^s u^i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\right) \int\limits_{Q\cap B} \varphi^i dy.$$

В тождестве (42) перенесем все слагаемые в одну часть. Получим

(43)

$$\int\limits_{Q\cap B} \left(\lambda^2\rho^s w^i(x,y) - \lambda\mu\Delta_{yy}w^i(x,y) - (\hat{f}^i(x) - \lambda^2\rho^s u^i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x))\right)\varphi^i(y)dy = 0,$$

при условии, что $div_y\vec{\varphi} = 0, \ \vec{\varphi}|_{Q\cap B} = 0$.

Рассмотрим некоторую градиентную функцию $\Psi(x,y)$, то есть такую, что существует

$\vec{\nabla}_y\Psi(x,y) = \vec{\Theta}(x,y) \in L^2(\Omega; H^1(Q))$. Значит для любой $\vec{\zeta}(y) \in H^1(Q)$, из тождества

$$\int\limits_{Q\cap B} \Psi(x,y) div_y\vec{\zeta}(y) = 0$$

следует тождество

$$-\int\limits_{Q\cap B} \vec{\nabla}_y\Psi(x,y)\vec{\zeta}(y) = 0.$$

В силу произвольности выбора $\vec{\varphi}(y)$ в (43), можем взять $\vec{\varphi}(y) = \vec{\nabla}_y \Psi(x,y)$.

Тогда получим из (43):

$$\lambda^2 \rho^s w^i(x,y) - \lambda\mu\Delta_{yy} w^i(x,y) - (\hat{f}^i(x) - \lambda^2\rho^s u^i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x)) = -\left(\nabla_y \Psi(x,y)\right)^i,$$

при этом $\vec{\nabla}_y \Psi(x,y) \in L^2(\Omega; H^1(Q))$. Преобразовывая последнее тождество, придем к следующему виду:

$$\vec{\nabla}_y \Psi(x,y) + \lambda^2\rho^s \vec{w}(x,y) - \lambda\mu\Delta_{yy}\vec{w}(x,y) =$$
$$= \vec{\hat{f}}(x) - \lambda^2\rho^s\vec{u}(x) - \vec{\nabla}p(x).$$

Будем искать $\vec{w}(x,y)$ в виде

$$\vec{w}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\vec{\Xi}_i(y),$$

где $M_i(x)$, $\vec{\Xi}_i(y)$, $(i = 1,2,3)$ - функции, подлежащие определению. Следовательно, при заданных $\vec{\hat{f}}(x), p(x)$ необходимо определить такие $M_i(x)$, $\vec{\Xi}_i(y)$, что

$$(\nabla_y\Psi(x,y))^j + \lambda^2\rho^s \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\Xi_i^j(y) - \lambda\mu \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\Delta_{yy}\Xi_i^j(y) =$$
$$= \hat{f}^j(x) - \lambda^2\rho^s u^j(x) - \frac{\partial p}{\partial x_j}(x),$$

для некоторой функции $\nabla_y\Psi(x,y) \in L^2(\Omega; H^1(Q))$, или

$$(44) \quad (\nabla_y\Psi(x,y))^j + \sum_{i=1}^{3} M_i(x)\left(\lambda^2\rho^s\Xi_i^j(y) - \lambda\mu\Delta_{yy}\Xi_i^j(y)\right) =$$
$$= \hat{f}^j(x) - \lambda^2\rho^s u^j(x) - \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)$$

Заметим, что верно следующее тождество

$$\vec{\hat{f}}(x) - \lambda^2\rho^s\vec{u}(x) - \vec{\nabla}p(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\left(\hat{f}^j(x) - \lambda^2\rho^s u^j(x) - \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)\right)\vec{e}_j,$$

где $\vec{e}_j$ - соответствующие координатные орты. Следовательно, тождество (44) может быть представлено в виде

$$(45)\quad \vec{\nabla}_y\Psi(x,y)+\sum_{i=1}^{3}M_i(x)\left(\lambda^2\rho^s\vec{\Xi}_i(y)-\lambda\mu\Delta_{yy}\vec{\Xi}_i(y)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\right)\vec{e}_i.$$

Теперь определим функции $M_i(x)$, $\Psi(x,y)\,(i=1,2,3)$:

$$M_i(x)=\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x),$$

$$\Psi(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\left(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\right)\psi^i(y).$$

Подставим эти разложения в (45):

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\right)\left(\nabla\psi^i(y)+\lambda^2\rho^s\vec{\Xi}_i(y)-\lambda\mu\Delta_{yy}\vec{\Xi}_i(y)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\left(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\right)\vec{e}_i$$

Окончательно, определим вектор-функции$\vec{\Xi}_i(y)$, $\vec{\psi}(y)$ как решение задачи Стокса на ячейке:

(46)

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\psi^i(y)+\lambda^2\rho^s\vec{\Xi}_i(y)-\lambda\mu\Delta_{yy}\vec{\Xi}_i(y)=\vec{e}_i, & y\in Q\cap B,\ i=1,2,3\\ div_y\vec{\Xi}_i=0, & \\ \vec{\Xi}_i|_{\partial(Q\cap B)}=0. & \end{cases}$$

Следовательно, нами доказана

Лемма 4. Функция $w(x,y)$ представляется в виде

$$(47)\qquad \vec{w}(x,y)=\sum_{i=1}^{3}M_i(x)\vec{\Xi}_i(y),$$

где M_i, $i=1,\ 2,\ 3$ определяются по формуле

$$M_i=\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x),$$

а $\vec{\Xi}_i$, $i = 1,\, 2,\, 3$ – из (46).

Замечание 6. Здесь следует отметить, что задача поставлена в перемещениях. Если ввести новые функции $\vec{L}_i = \lambda\,\vec{\Xi}_i$, то относительно них система (46) выглядит так:

(48)
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\psi^i(y) + \lambda\rho^s\vec{L}_i(y) - \mu\Delta_{yy}\vec{L}_i(y) = \vec{e}_i, \;\; y \in Q \cap B,\, i = 1,2,3 \\ div_y\vec{L}_i = 0, \\ \vec{L}_i|_{\partial(Q\cap B)} = 0. \end{cases}$$

4.6. Предельная система уравнений

Перейдём к описанию предельной системы уравнений для случая колебаний вязкоупругого материала при условии, что жидкость сжимаема. Подставим в уравнение (22) пробную функцию $\vec{v} = \vec{\varphi}(x) \in D(\Omega)$. После элементарных преобразований и применений результатов о двухмасштабной сходимости (27)–(29), (30)–(32) и (35), получим следующее интегральное тождество:

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega} (\tilde{\rho}u^i + \rho^s\tilde{w}^i)\varphi^i dx - \Pi \int\limits_{\Omega} p(x)\, div\,\vec{\varphi} dx + \\ + \int\limits_{\Omega\times(Q\setminus B)} a_{ijkl}\Big(\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_1^k}{\partial y_l}\Big)\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j} dxdy = \int\limits_{\Omega} \hat{f}^i(x)\varphi^i dx \tag{49}$$

Напомним, что здесь и далее

$$\tilde{w} = \int\limits_Q w(y)\, dy.$$

Введём несколько новых обозначений, для $\vec{u},\, \vec{v} \in H^1(Q)$:

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int\limits_{Q\setminus B} a_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial y_l}\frac{\partial v^i}{\partial y_j} dy, \tag{50}$$

тогда пусть $\vec{Q}$, $\vec{Q}_i^j \in H^1_{per}(Q\backslash B)$, $(i,j = 1,2,3)$ – такие вектор-функции с нулевым средним на $Q\backslash B$, что

$$(51) \qquad a(\vec{Q},\vec{v}) = \int\limits_{Q\backslash B} div_y \vec{v} dy, \ \ \forall \vec{v} \in H^1_{per}(Q\backslash B), \int\limits_{Q\backslash B} v(y)\,dy = 0$$

$$(52) \qquad a(\vec{Q}_i^j,\vec{v}) = \int\limits_{Q\backslash B} a_{ijkl}\frac{\partial v^k}{\partial y_l}, \ \ \forall \vec{v} \in H^1_{per}(Q\backslash B), \int\limits_{Q\backslash B} \vec{v}(y)\,dy = 0.$$

Константы

$$(53) \qquad \beta_{ij} = -\int\limits_{Q\backslash B} div_y \vec{Q}_i^j dy, \quad \beta = \int\limits_{Q\backslash B} div_y \vec{Q} dy$$

описывают физические характеристики среды. Также пусть $\vec{p}_i^j$ – это вектор, чьи компоненты суть $y_j\delta_{ik}$, $(k = 1,2,3)$, тогда определим коэффициенты тензора q_{ijkl}, $(1 \le i,j,k,l \le 3)$ следующим образом

$$(54) \qquad q_{ijkl} = a(\vec{Q}_i^j - \vec{p}_i^j, \vec{Q}_k^l - \vec{p}_k^l).$$

Замечание 7. Функции $\vec{Q}$, $\vec{Q}_i^j$ могут быть определены и классическим образом. Доказательство эквивалентности этих определений несложно, и мы не будем его здесь приводить. Определим вектор-функции $\vec{Q}_i^j \in H^1_{per}(Q\backslash B)$, $(1 \le i,j \le 3)$ как решения задач на ячейке периодичности:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_p}\left(a_{pqkl}e_{kl}\left(\vec{Q}_i^j\right)\right) = 0, & y \in Q, \\ a_{pqkl}e_{kl}\left(\vec{Q}_i^j\right)\nu_j = -a_{pijk}\nu_k, & y \in \partial B, \end{cases}$$

а вектор-функцию $\vec{Q} \in H^1_{per}(Q\backslash B)$ как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ijkl}e_{kl}\left(\vec{Q}\right)\right) = 0, & y \in Q\backslash B, \\ a_{ijkl}e_{kl}\left(\vec{Q}\right)\nu_j = \nu_i, & y \in \partial B \end{cases}$$

на ячейке периодичности Q.

Тензор q_{ijkl}, $(1 \le i,j,k,l \le 3)$ будет определен как

$$q_{ijkl} = \left\langle a_{ijkl} + a_{ijgm} e_{gm}\left(\vec{Q}_k^l\right)\right\rangle_{Q\backslash B},$$

а константы из (52)–(53) как $(1 \le i,j \le 3)$

$$\beta_{ij} = \left\langle div_y \vec{Q}_i^j\right\rangle_{Q\backslash B}, \quad \beta = \left\langle div_y \vec{Q}\right\rangle_{Q\backslash B}.$$

Используя это обозначение, можно преобразовать слагаемые в левой части (49):

$$\int\limits_{Q\backslash B} a_{ijkl}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_1^k}{\partial y_l}\right)dxdy = q_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \beta_{ij} p(x). \tag{55}$$

Подставим полученное в (55) в тождество (49), тогда $\forall \vec{\varphi} \in D(\Omega)$:

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega} (\tilde{\rho} u^i + \rho^s \tilde{w}^i)\varphi^i dx - \Pi \int\limits_{\Omega} p(x)\, div\, \vec{\varphi}\, dx + \int\limits_{\Omega} \left(q_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \beta_{ij} p(x)\right)\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j} dxdy =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \hat{f}^i(x)\varphi^i dx.$$

В этом тождестве выполним интегрирование по частям:

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega} (\tilde{\rho} u^i + \rho^s \tilde{w}^i)\varphi^i dx + \Pi \int\limits_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\,\varphi^i dx - \tag{56}$$
$$- \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \beta_{ij} p(x)\right)\varphi^i dxdy = \int\limits_{\Omega} \hat{f}^i(x)\varphi^i dx.$$

Из произвольности выбора $\vec{\varphi}(x)$ заключаем, что последнее тождество может быть записано в дифференциальной форме:

$$\lambda^2 \tilde{\rho} u^i + \lambda^2 \rho^s \tilde{w}^i - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l} - \alpha_{ij} p(x)\right) + \Pi \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = \hat{f}_i(x), \quad i = 1,2,3,$$

или

$$\lambda^2 \tilde{\rho} u^i + \lambda^2 \rho^s \tilde{w}^i = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \alpha_{ij} p(x)\right) + \hat{f}_i(x), \quad i = 1,2,3. \tag{57}$$

$\alpha_{ij} = \Pi\delta_{ij} - \beta_{ij}$, а $\Pi = |Q \cap B|$ – пористость среды.

Замечание 8. Как было отмечено выше, дифференциальная запись приводится здесь для удобства прочтения, поскольку условие $u_\varepsilon(x) \in H_0^1(\Omega)$ не гарантирует, вообще говоря, существования вторых производных $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

Далее, используя обозначения (50)–(54), можно переформулировать (41) при фиксированном x:

$$a\left(\vec{u}_1(x,y), \vec{v}(y)\right) = -\frac{\partial u^k}{\partial x_l}(x) \int\limits_{Q\setminus B} a_{ijkl} \frac{\partial v^i}{\partial y_j}(y)\, dy - p(x) \int\limits_{Q\cap B} div_y\, \vec{v}\, dy,$$

(58)

$$\vec{u}_1(x,y) \in H^1_{per}(Q\setminus B), \int\limits_{Q\setminus B} \vec{u}_1(y)dy = 0, \ \ \forall \vec{v} \in H^1_{per}(Q\setminus B), \int\limits_{Q\setminus B} \vec{v}(y)\, dy = 0,$$

где $a(\cdot,\cdot)$ представляет собой форму из (50).

Заметим, что $a(\cdot,\cdot)$–коэрцитивна, поэтому функции из (50–54) и решение (58) определены однозначно.

Из единственности решений (58) мы получаем:

$$\vec{u}_1(x,y) = -\frac{\partial u^k}{\partial x_l}(x)\vec{Q}^l_k(y) - p(x)\vec{Q}(y), \tag{59}$$

откуда, путём подстановки (59) в (36), мгновенно следует

$$(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta)p(x) - \beta_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l} + \Pi\, div_x \vec{u}(x) + div_x \vec{w}(x) = 0$$

или

$$(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta)p(x) + div_x \vec{w}(x) + \alpha_{ij}E_{ij}(\vec{u}(x)) = 0. \tag{60}$$

Следовательно, в образах преобразования Лапласа мы получили следующую предельную систему:

$$(61)\qquad \begin{cases} \lambda^2\tilde{\rho}u^i+\lambda^2\rho^s\tilde{w}^i=\frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkl}\frac{\partial u^k}{\partial x_l}-\alpha_{ij}p(x))+\hat{f}^i(x),\\ \\ \lambda\, w^k=(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x))L_{ik},\\ \\ (\frac{\Pi}{\gamma}+\beta)p(x)+div_x\vec{\tilde{w}}(x)+\alpha_{ij}E_{ij}(\vec{u}(x))=0. \end{cases}$$

$(i=1,2,3)$, $L_{ik}=(\vec{L}_i)^k.\vec{L}_i$ удовлетворяет задаче Стокса на ячейке периодичности:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\psi^i(y)+\lambda\rho^s\vec{L}_i(y)-\mu\Delta_{yy}\vec{L}_i(y)=\vec{e}_i, \;\; y\in Q\cap B,\, i=1,2,3\\ div_y\vec{L}_i=0,\\ \vec{L}_i|_{\partial(Q\cap B)}=0. \end{cases}$$

4.7. Исключение относительного перемещения из системы

Рассмотрим систему (61). Проинтегрируем по ячейке второе уравнение этой системы

$$\lambda\, w^k=(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x))\cdot L_{ik},$$

выразим $\vec{\tilde{w}}(x,y)$ и подставим в первое и третье. Напомним, что волной обозначается среднее по ячейке $\vec{\tilde{w}}=<\vec{w}>_Q$, тогда

$$\tilde{w}_k=\frac{1}{\lambda}(\hat{f}^i(x)-\lambda^2\rho^s u^i(x)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x))\cdot\tilde{L}_{ik}.$$

После подстановки первое уравнение системы (61) примет вид

$$\lambda^2\tilde{\rho}u^k+\lambda\rho^s\hat{f}^i(x)\cdot\tilde{L}_{ik}-\rho_s^2\lambda^3u^i(x)\cdot\tilde{L}_{ik}-\lambda\rho^s\frac{\partial p}{\partial x_i}(x)\cdot\tilde{L}_{ik}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkl}\frac{\partial u^i}{\partial x_l}-\alpha_{kj}p(x))+\hat{f}^k(x),$$

а третье, соответственно, вид

$$(\frac{\Pi}{\gamma}+\beta)p(x)-\tilde{L}_{ik}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_k}=-\alpha_{ij}E_{ij}(\vec{u}(x))-\tilde{L}_{ik}\frac{\partial\hat{f}_i}{\partial x_k}+\lambda^2\rho^s\tilde{L}_{ik}\frac{\partial u^i}{\partial x_k}.$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа в системе (61). Сначала выпишем прообраз второго уравнения этой системы. Оно будет выглядеть так:

$$\dot{w}^k(x,y,t) = (f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)) * d_{ik}(y,t), \tag{62}$$

где d_{ik} - прообраз Лапласа от функций L_{ik}, а $f*g = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t-s)g(s)ds$ - оператор свертки.

Введём матрицу $\mathcal{D}(t)$, (3×3), коэффициенты которой - гладкие функции переменной t:

$$(\mathcal{D}(t))_{ij} = \int\limits_{Q} d_{ij}(y,t)dy,$$

а $p(x,t)$, $\vec{u}(x,t)$, $\vec{w}(x,y,t)$ - прообразы Лапласа от функций $p(x,\lambda)$, $\vec{u}(x,\lambda)$, $\vec{w}(x,y,\lambda)$ соответственно. Получается, что уравнение (62) можно записать в форме

$$\tilde{w}^k(x,y,t) = (f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)) * \int\limits_{0}^{t} (\mathcal{D}(\tau))_{ik}\, d\tau,$$

вычисляя затем производные по t

$$\ddot{\tilde{w}}^k(x,y,t) = (f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)) * \dot{\mathcal{D}}_{ik}(t) + \\ + \mathcal{D}_{ik}(0)(f^i(x,t) - \rho^s \ddot{u}^i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)),$$

приходим к окончательной формулировке предельной задачи:

Найти такие функции

$$\vec{u}(x,t) \in H_0^1(\Omega;(0,+\infty)),\ p(x,t) \in L^2(\Omega;(0,+\infty)),$$

что

$$(63)\quad \tilde{\rho}\ddot{u}^k+\rho^s\dot{\mathcal{D}}_{ik}(t)*(f^i(x,t)-\rho^s\ddot{u}^i(x,t)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t))+$$
$$+\rho^s\mathcal{D}_{ik}(0)(f^i(x,t)-\rho^s\ddot{u}^i(x,t)-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t))=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_j}(q_{ijkl}\frac{\partial u^i}{\partial x_l}-\alpha_{jk}p(x,t))+f^k(x,t),$$

$$(64)\quad (\frac{\Pi}{\gamma}+\beta)p(x,t)+div_x((\int\limits_0^t\mathcal{D}_{ik}(\tau)d\tau)*(f^i(x,t)-\rho^s\ddot{u}^i(x,t)-$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_i}(x,t)))+\alpha_{ij}E_{ij}(\vec{u}(x,t))=0$$

$$(65)\qquad \vec{u}(x,0)=\dot{\vec{u}}(x,0)=0.$$

$D(t)$ – матричная (3×3) функция, коэффициенты которой - гладкие функции переменной t:

$$(\mathcal{D}(t))_{ij}=\int\limits_Q(\vec{d}_i)_j(y,t)dy,$$

а $\vec{d}_i$ определяются из задачи $(i=1,2,3)$

$$(66)\qquad \begin{cases}\vec{\nabla}\psi^i(y)+\rho^s\frac{\partial\vec{d}_i}{\partial t}(y)-\mu\Delta_{yy}\vec{d}_i(y)=0, & y\in Q\cap B,\\ div_y\,\vec{d}_i=0, & y\in Q\cap B\\ \vec{d}_i|_{\partial Q\cap B}=0,\ \ \vec{d}_i|_{t=0}=\vec{e}_i. & \end{cases}$$

Решение (66) существует и единственно с точностью до аддитивной постоянной для давления, α_{ij}, β, β_{ij}, Π, q_{ijkl} определены в (50)–(54).

4.8. Спектральный анализ

Здесь мы имеем дело уже не с одним уравнением, а с системой, что несколько усложняет исследование. Уменьшив, как и выше, при рассмотрении задач (2) и (11), количество пространственных переменных до одной, получим из (63)–(65) систему уравнений на функции $u(x,t)$, $p(x,t)$

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\,\ddot{u} + \rho_s \dot{D}(t) * (f - p' - \rho_s \ddot{u}) + \rho_s D(0)\,(f - p' - \rho_s \ddot{u}) = Qu'' - Ap' + f, \\ Bp + d(t) * (f - p' - \rho_s \ddot{u})' + Au' = 0, \end{cases}$$

где

$$D(t) = (\mathcal{D}(t))_{11}\,; \;\; d(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} D(\tau)d\tau \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{m_k} e^{m_k t},$$

$M_k = \left\langle \vec{\Psi}_k^{(1)} \right\rangle_{Q\cap B}^2$, $m_k = -\lambda_k$, с начальными условиями $u(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0$, $x \in [0,1]$ и с краевыми условиями $u(0,t) = \dot{u}(0,t) = u(1,t) = \dot{u}(1,t) = p'(0,t) = p'(1,t) = 0$, $t \in (0,+\infty)$.

Для исследования спектральных свойств этой задачи положим $f = 0$. Краевые условия Дирихле на функцию u непосредственно вытекают из условий (65). Условие Неймана на функцию p можно получить из уравнения (18) и условий $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{3} \dot{w}_k \cdot \nu_k|_{\partial\Omega} = 0$ (из которых второе – условие "непротекания" жидкости через границу $\partial\Omega$).

Введем обозначение $-p'(x,t) - \rho_s \ddot{u}(x,t) = z(x,t)$. Тогда $z(0,t) = z(1,t) = 0$, $t \in (0,+\infty)$. Продифференцируем второе уравнение по x. Получим

$$Bp' + d(t) * z'' + Au'' = 0.$$

Используя равенство $p' = -z - \rho_s \ddot{u}$, получим

$$-Bz - B\rho_s \ddot{u} + d(t) * z'' + Au'' = 0,$$

тогда система уравнений для функций $u(x,t), z(x,t)$ примет вид

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\,\ddot{u} + \rho_s \dot{D}(t) * z + \rho_s D(0) z = Qu'' + Az + A\rho_s \ddot{u}, \\ -Bz - B\rho_s \ddot{u} + d(t) * z'' + Au'' = 0. \end{cases} \tag{67}$$

Так как краевые условия для функций $u(x,t), z(x,t)$ нулевые, будем искать представления для функций $u(x,t), z(x,t)$, разлагая их в ряд по $\{\sin \pi k x\}$ (полной системе функций в $L^2[0,1]$):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \pi k x,$$

$$z(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin \pi k x.$$

Подставим эти разложения в (67), получим (подразумевая суммирование по k, будем опускать знаки суммирования):

(68)

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\, \ddot{u}_k \sin \pi k x + \rho_s \dot{D}(t) * z_k \sin \pi k x + \rho_s D(0) z_k \sin \pi k x = \\ \qquad\qquad = -\pi^2 k^2 Q u_k \sin \pi k x + A z_k \sin \pi k x + A \rho_s \ddot{u}_k \sin \pi k x, \\ -B z_k \sin \pi k x - B \rho_s \ddot{u}_k \sin \pi k x - \\ \qquad\qquad -\pi^2 k^2 d(t) * z_k \sin \pi k x - A \pi^2 k^2 u_k \sin \pi k x = 0. \end{cases}$$

Приравняем множители при каждом k:

(69)

$$\begin{cases} \tilde{\rho}\, \ddot{u}_k - A \rho_s \ddot{u}_k + \pi^2 k^2 Q u_k = -\rho_s \dot{D}(t) * z_k - \rho_s D(0) z_k + A z_k, \\ -B \rho_s \ddot{u}_k - A \pi^2 k^2 u_k = \pi^2 k^2 d(t) * z_k + B z_k. \end{cases}$$

Сделаем преобразование Лапласа системы (69). Тогда

$$\begin{cases} \lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) \hat{u}_k + \pi^2 k^2 Q \hat{u}_k = -\rho_s \hat{D}(\lambda) \hat{z}_k + A \hat{z}_k, \\ -B \lambda^2 \rho_s \hat{u}_k - A \pi^2 k^2 \hat{u}_k = \pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) \hat{z}_k + B \hat{z}_k, \end{cases}$$

или

$$(70) \qquad \begin{cases} \left(\lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) + \pi^2 k^2 Q\right) \hat{u}_k = -\left(\lambda \rho_s \hat{D}(\lambda) - A\right) \hat{z}_k, \\ \left(B \lambda^2 \rho_s + A \pi^2 k^2\right) \hat{u}_k = -\left(\pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) + B\right) \hat{z}_k. \end{cases}$$

Будем рассматривать λ в качестве спектрального параметра. Тогда (70) имеет нетривиальное решение при условии

$$(71) \quad \left(\lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) + \pi^2 k^2 Q\right) \left(\pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) + B\right) - \\ - \left(\lambda \rho_s \hat{D}(\lambda) - A\right) \left(B \lambda^2 \rho_s + A \pi^2 k^2\right) = 0.$$

Уравнение (71) будет предметом нашего изучения. Объединение его корней при всех натуральных k и составляют спектр σ_3 задачи (67).

Заметим сначала, что с помощью соотношения

$$\hat{D}(\lambda) = \lambda\hat{d}(\lambda) - d(0).$$

уравнение (71) можно переписать в виде

$$\left(\lambda^2(\tilde{\rho} - A\rho_s) + \pi^2 k^2 Q\right)\left(\pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) + B\right) - \\ - \left(\lambda^2\rho_s\hat{d}(\lambda) - \lambda\rho_s d(0) - A\right)\left(B\lambda^2\rho_s + A\pi^2k^2\right) = 0.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\hat{d}(\lambda)\left(B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4\right) = \\ = B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2,$$

или

$$\hat{d}(\lambda) = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2+BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}. \tag{72}$$

(На фиг. 7 и фиг. 8 изображены графики функций $\hat{d}(\lambda)$ и правой части последнего равенства при различных k).

4.9. Результаты

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 11. Спектр σ_3 задачи (67) при $k \to \infty$ представляет собой объединение двух частей:

первая часть состоит из серий конечнократных собственных значений, которые имеют в качестве предельных точек вещественные корни уравнения $\hat{d}(\lambda) = 0$ (эти корни не зависят от k, далее мы будем обозначать их через K_i);

вторая часть при каждом k состоит из трех корней, модули которых стремятся к бесконечности с ростом k, причем один из корней второй серии действителен и стремится к бесконечности со скоростью $O(k^2)$, два других с ростом k растут как $O(k)$. Если они комплексны, то действительные части стремятся к постоянной x_0, задаваемой формулой

$$x_0 = \frac{1}{2}\times$$
$$\times\frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\, d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}.$$

при этом имеет место сходимость справа(см. фиг. 9).

Замечание 9. Необходимым и достаточным условием комплексности двух корней второй серии, упомянутых в условии Теоремы 11 будет соотношение

$$\left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1\right)\cdot x_0 > 0.$$

Теорема 12. Положим $\Lambda_3 = \{\lambda \in R : \hat{d}(\lambda) > 0\}$. Тогда множество Λ_3 не содержит точек спектра σ_3. При этом оно представляет собой объединение интервалов ("лакун"). Левым концом каждого из этих интервалов будет точка m_i, а правым – соответствующий нуль функции $\hat{d}(\lambda)$(см. фиг. 10).

Доказательство. (Теорем 11 и 12)

Исследуем уравнение

(73)
$$\hat{d}(\lambda) = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где

$$\hat{d}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)}, \text{ и } m_i < m_{i-1};\ m_1 < 0,$$

на наличие равномерно ограниченных по k решений. Уравнение (73) удобно представить в виде:

$$(74)\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{m_i(\lambda-m_i)} =$$

$$= \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2+BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s-\tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}, \quad k=1,\,2,\,\ldots$$

Заметим, что поскольку все M_i положительны, уравнение $\hat{d}(\lambda)=0$ имеет ровно $n-1$ вещественных корней. Эти корни будут предельными точками вещественных решений уравнения (74). Более точно, имеет место следующая лемма

Лемма 5. Для любого малого $\delta>0$ существует такой номер K, что при любом $k>K$, $\lambda_k^{(i)}\in U_\delta(K_i)$, где $\lambda_k^{(i)}$ соответствующим образом занумерованный корень уравнения (74), а$U_\delta(x)$ – δ-окрестность точки x.

Доказательство. (Леммы 5)

Правая часть при фиксированном k представляет из себя мероморфную функцию от λ с полюсами в точках, где

$$(75)\qquad B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s-\tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4 = 0.$$

Уравнение (75) – биквадратное уравнение, причем из определения физических констант мы знаем, что B, ρ_s и Q положительны. Отсюда, действительные корни этого уравнения выражаются по формуле $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\mu}$, где

$$\mu = \frac{1}{2B\rho_s^2}\left(-(2A\rho_s-\tilde{\rho})k^2 + \sqrt{\frac{1}{4}(2A\rho_s-\tilde{\rho})^2k^4 + 4BQ\rho_s k^4}\right).$$

Преобразуя последнее выражение, получим

$$\mu = \frac{k^2}{2B\rho_s^2}\left(-(2A\rho_s-\tilde{\rho}) + \sqrt{\frac{1}{4}(2A\rho_s-\tilde{\rho})^2 + 4BQ\rho_s}\right)$$

Поэтому

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu} = \pm C_1 \cdot k.$$

Теперь устремим k к бесконечности. Нули (75) будут "разъезжаться" к бесконечности со скоростью $O(k)$. Значит при любом фиксированном $\lambda = \lambda_0 \neq \infty$ можно выбрать такой номер $K(\lambda_0)$, что при $k > K(\lambda_0)$ функция в правой части (74) убывает по k квадратично, то есть

$$F(\lambda_0, k) = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda_0^3 + B\tilde{\rho}\lambda_0^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda_0 + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda_0^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda_0^2 - Qk^4} = O(k^{-2}),$$

когда $k > K(\lambda_0)$, $k \to \infty$.

Заметим теперь, что при фиксированном $\lambda \neq m_i$ левая часть уравнения (74) определена и не зависит от k.
Функция правой части (74) при фиксированном $\lambda_0 \in (-\infty, m_1)$ и достаточно больших k определена и монотонно стремится к нулю при $k \to \infty$ (это очевидно следует из явного выражения для функции $F(\lambda, k)$.
В силу единственности нуля функции $\hat{d}(\lambda)$ на (m_{i+1}, m_i) (это следствие положительности всех M_i) и непрерывности ее на этом интервале, получаем утверждение Леммы 5.

$\square$

Лемма 6. Пусть $D(0) \neq \dfrac{\widetilde{\rho}}{\rho_s^2}$. Тогда:
1) при каждом фиксированном k число корней уравнения (73) будет равно $n+2$;
2) при этом $n-1$ корней являются вещественными, и для них справедлива Лемма 5.

Доказательство. (Леммы 6)

Чтобы доказать первое из двух утверждений Леммы 6, приведем к общему знаменателю дробь в записи функции $\hat{d}(\lambda)$:

(76)

$$\hat{d}(\lambda) = \sum \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)} = \sum \frac{M_i}{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda - m_i} = \frac{A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \cdots + A_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda - m_i)},$$

где $A_1 = \sum \frac{M_i}{m_i} = d(0) \neq 0$. Подставим его в (74), учитывая, что $A_1 = d(0)$:

$$\frac{d(0)\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \cdots + A_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda - m_i)} =$$

$$= \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}.$$

Отсюда ($\lambda \neq m_i$, и $k > K(m_n)$):

(77)

$$\left(d(0)\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \cdots + A_n\right)\left(B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4\right) =$$

$$= \left(B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2\right)\prod_{i=1}^{n}(\lambda - m_i).$$

Старшие по λ члены в левой и правой частях данного уравнения совпадают, следовательно, уравнение имеет степень $n + 2$. Коэффициент при старшей степени равен

$$\left(A_2 + d(0)\sum_{i=1}^{n} m_i\right) B\rho_s^2 - B\tilde{\rho},$$

где $A_2 = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_i}\left(\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} m_j\right)$, и после преобразований это условие принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_i} m_i B\rho_s^2 - B\widetilde{\rho} = D(0)B\rho_s^2 - B\widetilde{\rho} \neq 0$$

По условию леммы, это выражение не обращается в ноль, поэтому применяя Основную теорему алгебры, получаем, что общее количество корней (с учетом кратности) уравнения (73) равно $n + 2$.

Ранее нами было установлено, что $n-1$ корень этого уравнения при каждом k действителен, что и завершает доказательство Леммы 6.

$\square$

Тем самым мы выделили первую часть из двух частей спектра σ_3, упомянутых в условии Теоремы 11.

Исследование второй части спектра σ_3 потребует некоторых вычислений. Напомним, что

$$\hat{d}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)}, \text{ где } m_i < m_{i-1},\ m_1 < 0$$

Зафиксируем k. Заметим теперь, что при $d(0) \neq 0$ можно достаточно хорошо угадать асиптотику функции $\hat{d}(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ (параметр λ здесь комплексный).
Для этого "перевернем" функцию $\hat{d}(\lambda)$:

$$\left(\hat{d}(\lambda)\right)^{-1} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda - m_i)}{d(0)\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \cdots + A_n}.$$

Чтобы изучить асимтотику функции $\hat{d}(\lambda)$ вдали от точек m_i, разделим с остатком числитель этой дроби на знаменатель (выделим главную часть):

$$\left(\hat{d}(\lambda)\right)^{-1} = \frac{1}{d(0)}\left(\lambda - \frac{D(0)}{d(0)} + o(\lambda)\right), \quad \lambda \in R \backslash U_\delta(m_i) \tag{78}$$

"Перевернем" равенство (72) и заменим в нем $\hat{d}^{-1}(\lambda)$ полученным представлением, опуская бесконечно малые:

$$\left(\lambda - \frac{D(0)}{d(0)}\right) = d(0)\cdot \frac{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}$$

После преобразований, получим:

$$B\rho_s^2 d(0)\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde\rho)d(0)k^2\lambda^2 - Qd(0)k^4 =$$

$$= \left(B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde\rho\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2+BQ)k^2\right)\left(\lambda - \frac{D(0)}{d(0)}\right).$$

Легко видеть, что члены с λ^4 (старшие степени) сокращаются, и после некоторых вычислений уравнение принимает следующий вид:

$$(79)\quad (B\tilde\rho - B\rho_s^2 D(0))\lambda^3 + \left((\tilde\rho - A\rho_s)d(0)k^2 - A\rho_s D(0)k^2\right)\lambda^2 +$$
$$+\left((A^2+BQ)k^2 - A\rho_s D(0)k^2\right)\lambda + \left(Qd(0)k^4 - (A^2+BQ)\frac{D(0)}{d(0)}k^2\right) = 0.$$

Корни этого уравнения зависят от k. Численные расчеты показывали, что один из корней "быстро убегал" на бесконечность, а другие два были комплексно сопряженными и также уходили на бесконечность, но с меньшей скоростью. Следующая лемма представляет собой строгую формулировку последнего утверждения: (см. график 4)

Лемма 7. Пусть $D(0) \neq \dfrac{\widetilde{\rho}}{\rho_s^2}$. Тогда:

(1) Действительный корень уравнения (79) при $k \to \infty$ зависит от k, как $O(k^2)$.

(2) Два других корня зависят от k как $O(k)$ при $k \to \infty$. Когда они комплексно сопряженные, действительные их части по мере роста k стремятся к числу x_0, которое может быть найдено по формуле:

$$x_0 = \frac{1}{2}\times$$
$$\times\frac{\left(B\tilde\rho - B\rho_s^2 D(0)\right)d(0)Q - (A^2+BQ-A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde\rho) - A\rho_s D(0))}{\left(d(0)(A\rho_s-\tilde\rho) - A\rho_s D(0)\right)^2}.$$

Доказательство. (Леммы 7)

Зафиксируем λ и подставим в уравнение (79) $\lambda = \zeta k^2$. Тогда получим при старших степенях

$$(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\zeta^3 k^6 + ((\tilde{\rho} - A\rho_s)d(0) - A\rho_s D(0))k^6\zeta^2 + o(k^5) = 0.$$

Пренебрегая младшими членами, получим уравнение на ζ:

$$\zeta^2 k^6((B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\zeta + ((\tilde{\rho} - A\rho_s)d(0) - A\rho_s D(0))) = 0.$$

Следовательно

$$\zeta = \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}},$$

и

$$\lambda \sim \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} k^2$$

есть асимптотика действительного корня уравнения (79) по k^2. Таким образом, мы доказали первое утверждение Леммы 7.

Для исследования двух других корней уравнения (79) применим метод неопределенных коэффициентов. Предположим, что действительный корень этого уравнения имеет асимптотику вида

$$\frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \cdot k^2 - \theta k^0 - \theta_1 k^{-2}$$

где θ, θ_1 подлежат определению, и разделим многочлен в левой части (79) на

$$\lambda - \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \cdot k^2 + \theta k^0 + \theta_1 k^{-2} \tag{80}$$

"с остатком". Приравнивая в остатке коэффициенты при старших степенях k к нулю, получим линейное уравнение на θ:

$$Qd(0) + \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \times$$
$$\times ((A^2 + BQ - A\rho_s D(0) - \theta \cdot (A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)) = 0,$$

откуда

(81)
$$\theta = \frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\, d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}.$$

Аналогичным образом находится и величина θ_1.
Частное от деления с остатком (79) на (80) будет многочленом второй степени

$$(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\lambda^2 - (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))(\theta + \theta_1 k^{-2})\lambda + \dots .$$

Таким образом, действительный корень (79) может быть представлен в виде

$$\lambda \sim -\frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \cdot k^2 - \theta + o(k^{-2})$$

где θ берется из (81), а два других будут корнями уравнения

$$(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\lambda^2 - (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))(\theta + \theta_1 k^{-2}) \cdot \lambda +$$

$$+(A^2 + BQ - A\rho_s D(0) - (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)) \cdot \theta)k^2 + O(1) = 0.$$

Сокращая на $B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)$:

$$\lambda^2 - (\theta + \theta_1 k^{-2}) \cdot \lambda + \left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1\right) \cdot \theta k^2 + O(1) = 0$$

Корни последнего уравнения находятся по известной формуле:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \left((\theta + \theta_1 k^{-2}) \pm \sqrt{\theta^2 - 4\left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1\right) \cdot \theta k^2 + O(1)} \right),$$

что доказывает утверждение 2 Леммы 7.
Если выполнено условие

$$\left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1\right) \cdot \theta > 0,$$

то при $k \to \infty$ корни $\lambda_{1,2}$ будут комплексно сопряженными, действительная часть их будет иметь вид

$$\Re(\lambda_{1,2}) = \frac{1}{2} \cdot (\theta + \theta_1 k^{-2}),$$

и так как $\theta_1 \equiv const$, при $k \to \infty$

$$\Re(\lambda_{1,2}) \longrightarrow$$
$$\frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\, d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{2\,(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}.$$

Таким образом, здесь картина спектра похожа на случай микстуры (суспензии) двух жидкостей. При $k \to \infty$ корни $\lambda_{1,2}$ будут "накапливаться" около прямой $\Re(\lambda_{1,2}) = \frac{1}{2} \cdot (\theta + \theta_1 k^{-2})$, "убегая" к плюс и минус бесконечности соответственно. Тем самым закончено доказательство Леммы 7, а вместе с ней и Теоремы 11 .

$\square$

Утверждение Теоремы 12 очевидно следует из Леммы 5 и явного вида функций в левой и правой частях уравнения (73).

$\square$

Глава 5

Сильная двухмасштабная сходимость

Предыдущие результаты устанавливали двухмасштабную сходимость решений допредельных задач к решению усредненной задачи. Во введении мы уже отмечали, что эта сходимость не всегда может быть выражена в терминах сильной сходимости в L_2. Однако в случае "двойной пористости" было получено (как мы уже отмечали) условие близости в терминах сильной двухмасштабной сходимости, которое, в свою очередь, может быть переформулировано в терминах сходимости в пространстве L_2.

5.1. Определение и основные свойства

Определение 4. Пусть последовательность функций $\{u_\varepsilon(x)\}$, равномерно ограниченная в $L^2(\Omega)$, сходится двухмасштабно к функции $w_0(x,y)$ и

(82) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2\,dx = \int\limits_{\Omega\times Q} \left(w_0(x,y)\right)^2\,dxdy$$

назовем, последовательность $\{u_\varepsilon(x)\}$ сильно двухмасштабно сходящейся к предельной функции $w_0(x,y)$.

В **[8]** доказаны следующие результаты о сильной двухмасштабной сходимости.

(1) Если последовательность функций $u_\varepsilon(x)$ в совокупности ограничена в $L^2(\Omega)$, $\|u_\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega)}\le C$ для всех $\varepsilon>0$, то

(83) $$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega |u_\varepsilon(x)|^2\,dx \ge \int\limits_{\Omega\times Q} \left(w_0(x,y)\right)^2\,dxdy,$$

где $w_0(x,y)$ – двухмасштабный предел функций $u_\varepsilon(x)$.

(2) Пусть предельная функция $w_0(x,y) \in C(\overline{\Omega} \times Q)$. Тогда последовательность $\{u_\varepsilon(x)\}$ сильно двухмасштабно сходится к $w_0(x,y)$ если и только если

$$\|w(x, \frac{x}{\varepsilon}) - u_\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \ \varepsilon \to 0. \tag{84}$$

Замечание 10. Условие принадлежности предельной функции пространству непрерывных на квадрате функций можно заменить на более слабое. В [**8**] этот вопрос рассматривается подробнее, мы приведем здесь один результат – достаточно, чтобы предельная функция $w_0(x,y)$ имела вид

$$w_0(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \varphi^j(x)\psi^j(y), \quad \vec{\varphi} \in L^2(\bar{\Omega}), \vec{\psi} \in C(Q), \tag{85}$$

для некоторого натурального N.

Утверждение (84) проясняет связь сильной двухмасштабной сходимости со сходимостью в $L^2(\Omega)$ по норме.
Именно, если предельная функция удовлетворяет некоторым дополнительным условиям регулярности (здесь мы требуем непрерывности на $\Omega \times Q$), то условие сильной двухмасштабной сходимости (82) может быть переформулировано в терминах обычной сходимости в $L^2(\Omega)$, (84).

В [**2**] сформулировано эквивалентное определение сильной двухмасштабной сходимости (и доказана сама эквивалентность).

Определение 5. Последовательность u_ε сильно двухмасштабно сходится к функции $u(x,y) \in L^2(\Omega \times Q)$, если

(86)
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) v_\varepsilon(x) dx = \int_\Omega \int_Q u(x,y)\, v(x,y) dx dy, \ \textit{как только}\, v_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} v(x,y)$$

Из этого определения вытекает еще одно важное свойство сильной двухмасштабной сходимости.

Утверждение 13. Если последовательности функций $u_\varepsilon(x)$ и $v_\varepsilon(x)$ сходятся соответственно к функциям $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и

$$u_\varepsilon \xrightarrow{2} u(x,y), \quad v_\varepsilon \xrightarrow{2} v(x,y), \tag{87}$$

тогда если существует слабый двухмасштабный предел произведения $u_\varepsilon(x) \cdot v_\varepsilon(x)$, то он равен произведению предельных функций $u(x,y)\, v(x,y)$.

Замечание 11. Будем понимать сильную двухмасштабную сходимость вектор-функций как покоординатную сильную двухмасштабную сходимость:

$$\vec{u}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \vec{u}(x,y),$$

если и только если для любого i:

$$u^i_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} u^i(x,y).$$

Нашей задачей будет проверка наличия сильной двухмасштабной сходимости в области Ω при $\varepsilon \to 0$ решений $\vec{u}_\varepsilon(x)$ допредельных задач (21) к решению усредненной задачи (63)–(65):

$$\vec{\tilde{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \vec{u}(x) + \vec{w}(x,y),$$

$$\chi(\Omega^h_\varepsilon)\nabla_x \vec{\tilde{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \chi\left(\Omega \cap Q \backslash B\right)\left(\nabla_x \vec{u}(x) + \nabla_y \vec{u}_1(x,y)\right),$$

$$\varepsilon\, \nabla_x \vec{\tilde{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla_y \vec{w}(x,y),$$

где функции $w(x,y)$ и $u_1(x,y)$ определены в (30) и (32) соответственно.

5.2. Шаг 1

Подставим в интегральное тождество

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{u}^i_\varepsilon \cdot \hat{v}^i dx + \lambda\varepsilon^2 b^\varepsilon(\vec{\hat{u}}_\varepsilon, \vec{\hat{v}}) + c^\varepsilon(\vec{\hat{u}}_\varepsilon, \vec{\hat{v}}) = \int\limits_{\Omega} \hat{f}^i \cdot \hat{v}^i dx \tag{88}$$

в качестве пробной функцию $\vec{\hat{v}}(x,\varepsilon) = \vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \in H^1_0(\Omega)$.

Получим

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega} \rho^\varepsilon \hat{u}^{i\,2}_\varepsilon dx + \lambda\varepsilon^2 b^\varepsilon(\vec{\hat{u}}_\varepsilon, \vec{\hat{u}}_\varepsilon) + c^\varepsilon(\vec{\hat{u}}_\varepsilon, \vec{\hat{u}}_\varepsilon) = \int\limits_{\Omega} \hat{f}^i \cdot \hat{u}^i_\varepsilon dx. \tag{89}$$

Воспользуемся приведенным ранее представлением форм $b^\varepsilon(\cdot,\cdot)$ и $c^\varepsilon(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{aligned} b^\varepsilon(\vec{u},\vec{v}) &= \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \left(\eta\, div\, \vec{u} \cdot div\, \vec{v} + 2\mu E_{ij}(\vec{u})\, E_{kl}(\vec{v})\right) dx, \\ c^\varepsilon(\vec{u},\vec{v}) &= \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \gamma\, div\, \vec{u} \cdot div\, \vec{v}\, dx + \int\limits_{\Omega^h_\varepsilon} a_{ijkl} E_{ij}(\vec{u}) E_{kl}(\vec{v})\, dx. \end{aligned} \tag{90}$$

При подстановке (90) в (89), получим

$$\begin{aligned} &\lambda^2 \int\limits_{\Omega} \rho^\varepsilon \vec{\hat{u}}^2_\varepsilon dx + \lambda\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \eta\, div\, \vec{\hat{u}}^2_\varepsilon\, dx + 2\mu\lambda\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} (\nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon)^2\, dx + \\ &+ \int\limits_{\Omega^h_\varepsilon} a_{ijkl} E_{ij}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon) E_{kl}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon)\, dx + \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \gamma\, (div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon)^2\, dx = \int\limits_{\Omega^h_\varepsilon} \vec{\hat{f}} \cdot \vec{\hat{u}}_\varepsilon\, dx + \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \vec{\hat{f}} \cdot \vec{\hat{u}}_\varepsilon\, dx. \end{aligned} \tag{91}$$

Поскольку

$$\vec{\hat{u}}_\varepsilon \in H^1_0(\Omega), \quad \|\varepsilon \nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon|_{L^2(\Omega^s_\varepsilon)} \le c, \quad \|div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^s_\varepsilon)} \le c, \quad \|\nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^h_\varepsilon)} \le c,$$

(эти утверждения доказаны в [**1**]), возможно перейти в (91) к нижнему пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$(92)\quad \lambda^2 \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \rho^\varepsilon |\vec{\hat{u}}_\varepsilon|^2 dx +$$

$$+ \lambda \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \varepsilon^2 \eta\, |div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon|^2\, dx + 2\lambda\mu \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \varepsilon^2 |\nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon|^2\, dx +$$

$$+ \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^h_\varepsilon} a_{ijkl} E_{ij}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon) E_{kl}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon)\, dx +$$

$$+ \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^s_\varepsilon} \gamma\, |div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon|^2\, dx = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \vec{\hat{f}}(x) \cdot\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon\, dx.$$

Отметим, что в предельный переход в правой части (92) сводится к предельному переходу в интеграле, где в подынтегральном выражении одна из функций сходится слабо. Слабый предел $\vec{\hat{u}}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ равен $\vec{u}(x) + \vec{\bar{w}}(x)$, как доказано нами ранее. Поэтому

$$(93)\qquad \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \vec{\hat{f}}(x) \cdot\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon\, dx = \int\limits_{\Omega} \vec{\hat{f}}(x)\, \Big(\vec{u}(x) + \vec{\bar{w}}(x)\Big)\, dx.$$

5.3. Шаг 2

Рассмотрим функции $\vec{Q}^{kl}(y)$ и $\vec{Q}(y)$. Они определены на жесткой фазе и принадлежат $H^1(Q\backslash B)$. Продолжим эти функции на всю ячейку периодичности Q с сохранением нормы, обозначив продолжения, соответственно, за $\vec{Q}^{kl}_0$ и $\vec{Q}_0$, так, чтобы полученное продолжение принадлежало $H^1(Q)$. Определим функцию $\vec{z}(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q))$:

$$(94)\quad \vec{z}(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y) \equiv -\dfrac{\partial u^k}{\partial x_l}(x)\vec{Q}^{kl}(y) - p(x)\vec{Q}(y), & y \in Q\backslash B, \\ -\dfrac{\partial u^k}{\partial x_l}(x)\vec{Q}^{kl}_0(y) - p(x)\vec{Q}_0(y), & y \in Q \cap B. \end{cases}$$

Отметим, что функция $\vec{z}(x,y)$ на границе $\partial(Q\backslash B)$ не терпит разрыва, поскольку $\vec{Q}^{kl}_0$ и $\vec{Q}_0$ являются продолжением функций $\vec{Q}^{kl}$ и $\vec{Q}$ соответственно.

Рассмотрим функцию $v(x,\varepsilon)$ следующего вида

$$\begin{cases} \vec{v}(x,\varepsilon) = \vec{u}(x) + \varepsilon \vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \vec{\delta}_\varepsilon^{(1)}(x), & x \in \Omega_\varepsilon^h, \\ \vec{v}(x,\varepsilon) = \vec{u}(x) + \vec{w}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \vec{z}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x), & x \in \Omega_\varepsilon^s, \end{cases}$$

функции $w(x,y)$ и $u_1(x,y)$ определены выше в (30) и (32), при этом для них выполнены следующие свойства, при $k=1,2,3$:

$$\vec{w}(x,y) = (w^k) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q)); \;\; \vec{w}(x,y) = 0,\, y \in Q \backslash B,$$

$$div_y \vec{w}(x,y) = 0,\, y \in Q \cap B,$$

$$\vec{u}_1(x,y) = (u_1^k) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q\backslash B)), \int\limits_{Q\backslash B} u_1^k dy = 0.$$

Функции $\vec{\delta}_\varepsilon^{(1)}(x)$ и $\vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x)$ таковы, что

$$||\vec{\delta}_\varepsilon^{(1)}(x)||_{H^1(\Omega)} \to 0,\; \varepsilon \to 0,$$

$$||\vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x)||_{L_2(\Omega)} \to 0,\; \varepsilon \to 0,$$

$$\varepsilon ||\nabla \vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x)||_{L_2(\Omega)} \to 0,\; \varepsilon \to 0, \;\; supp\, \vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x) \subset \Omega_\varepsilon^s,$$

и кроме того выполняется условие $\vec{v}(x,\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$.

Цель введения этих функций – "подправить" ненулевые значения функций $\vec{u}(x) + \varepsilon \vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})$ и $\vec{u}(x) + \vec{w}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \vec{z}(x,\frac{x}{\varepsilon})$ соответственно на границе области Ω, чтобы функция $v(x,\varepsilon)$ удовлетворяла условию $v(x,\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$.
По аналогии с методом, описанным в [8], в качестве $\vec{\delta}_\varepsilon^{(1)}(x)$ можно выбрать функцию

$$\delta_\varepsilon^{(1)\,i}(x) = -\varepsilon\, u_1^i(x,\frac{x}{\varepsilon}) \xi(\frac{r(x)}{\varepsilon}), \;\; i = 1,2,3, \tag{95}$$

а в качестве $\vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x)$ функцию

$$\delta_\varepsilon^{(2)\,i}(x) = -\hat{f}^i(x)\, Q^i(\frac{x}{\varepsilon}) \xi(\frac{r(x)}{\varepsilon}), \;\; i = 1,2,3, \tag{96}$$

где $r(x)$ – расстояние от точки x до границы области Ω, вектор-функция $\vec{Q}_0$ – определена выше, а $\xi(s) \geq 0$ - функция из класса

$C_0^\infty(R)$, равная 1 в точке 0.

Задавая указанным в (95), (96) образом функции $\vec{\delta}_\varepsilon^{(1),(2)}$, можно показать, что имеют место следующие оценка (см. [8]):

$$||\vec{\delta}_\varepsilon^{(1)}(x)||_{L^2(\Omega)} \sim \varepsilon\sqrt{\varepsilon}, \quad ||\vec{\nabla}\delta_\varepsilon^{(1)\,i}(x)||_{L^2(\Omega)} \sim \sqrt{\varepsilon}, \ \ i = 1,2,3,$$

для функции $\vec{\delta}^{(1)}$. А для функции $\vec{\delta}^{(1)}$ выполняется свойство

$$||\vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x)||_{L^2(\Omega)} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad ||\vec{\nabla}\delta_\varepsilon^{(2)\,i}(x)||_{L^2(\Omega)} \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \ \ i = 1,2,3.$$

Подставим теперь в интегральное тождество (88) в качестве пробной функцию $\vec{v}(x,\varepsilon)$, определенную выше. На основании приведенных оценок для функций $\vec{\delta}_\varepsilon^{(1),(2)}(x)$, можно заключить, что

$$\begin{cases} div\,\vec{v} = div_x\vec{u}(x) + \varepsilon div_x\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + div_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \\ \qquad\qquad + O(\sqrt{\varepsilon}), \ \varepsilon \to 0, \ x \in \Omega_\varepsilon^h, \\ div\,\vec{v} = div_x\vec{u}(x) + div_x\vec{w}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + div_y\vec{z}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \\ \qquad\qquad + \varepsilon div_x\vec{z}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + div\,\vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x), \ \varepsilon \to 0, \ x \in \Omega_\varepsilon^s. \end{cases}$$

и получить для градиентов функций $v^i(x,\varepsilon)$ следующее представление:

$$\begin{cases} \nabla\vec{v} = \nabla_x\vec{u}(x) + \varepsilon\nabla_x\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \\ \qquad\qquad + \nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x\vec{\delta}_\varepsilon^{(1)}(x) & \text{в } L^2(\Omega_\varepsilon^h), \\ \nabla\vec{v} = \nabla_x\vec{u}(x) + \nabla_x\vec{w}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^{-1}\nabla_y\vec{w}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \\ \qquad\qquad + \varepsilon\nabla_x\vec{z}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y\vec{z}(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x\vec{\delta}_\varepsilon^{(2)}(x) & \text{в } L^2(\Omega_\varepsilon^s). \end{cases}$$

Опуская малые добавки, выпишем получившееся тождество.

$$(97)\quad \lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \rho^h \hat{u}_\varepsilon^i \left(u^i(x) + \varepsilon u_1^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u^k(x)}{\partial x_l} + \varepsilon \frac{\partial u_1^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_1^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial y_l} \right) dx +$$

$$+ \lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \rho^s \hat{u}_\varepsilon^i \left(u^i(x) + w^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon z^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$

$$+ 2\lambda\mu\varepsilon^2 \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon^i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u^k(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial w^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial x_l} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial w^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial y_l} + \frac{\partial \left(\delta_\varepsilon^{(2)}(x) \right)^k}{\partial x_l} + \frac{\partial z^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial y_l} \right) dx +$$

$$+ \gamma \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon \left(div_x \vec{u}(x) + div_x \vec{w}(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_y \vec{z}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$

$$+ 2\lambda\mu\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon \left(div_x \vec{u}(x) + div_x \vec{w}(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_y \vec{z}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \hat{f}^i(x) \left(u^i(x) + w^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon z^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \hat{f}^i(x) \left(u^i(x) + \varepsilon u_1^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Перейдем к двухмасштабному пределу в правой части тождества (97) при $i = 1, 2, 3$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \hat{f}^i(x) \left(u^i(x) + w^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon z^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \hat{f}^i(x) \left(u^i(x) + \varepsilon u_1^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx \xrightarrow{2} \int\limits_{\Omega \times Q} \hat{f}^i(x) \left(u^i(x) + w^i(x, y) \right) dx dy,$$

Далее, интегрируя по ячейке периодичности Q, можно преобразовать последнее равенство так

$$\int_\Omega \hat{f}^i(x) \int_Q \left(u^i(x) + w^i(x,y)\right) dy\, dx \;= \int_\Omega \hat{f}^i(x)\, \left(u^i(x) + \tilde{w}^i(x)\right)\, dx. \tag{98}$$

Вернемся к левой части тождества (97). Выделим слагаемые, отвечающие жидкой фазе:

$$\lambda^2 \int_{\Omega^s_\varepsilon} \rho^s \hat{u}^i_\varepsilon \left(u^i(x) + w^i(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon z^i(x, \frac{x}{\varepsilon})\right) dx + \tag{99}$$

$$+ 2\lambda\mu \times$$

$$\times \int_{\Omega^s_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial \hat{u}^i_\varepsilon}{\partial x_j} \left(\varepsilon \frac{\partial u^k(x)}{\partial x_l} + \varepsilon \frac{\partial w^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial x_l} + \frac{\partial w^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial y_l} + \varepsilon \frac{\partial \left(\delta^{(2)}_\varepsilon(x)\right)^k}{\partial x_l} + \varepsilon \frac{\partial z^k(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial y_l} \right) dx +$$

$$+ \gamma \int_{\Omega^s_\varepsilon} div\, \hat{u}_\varepsilon \left(div_x u(x) + div_x w(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_y \vec{z}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$

$$+ 2\lambda\mu\varepsilon^2 \int_{\Omega^s_\varepsilon} div\, \hat{u}_\varepsilon \left(div_x u(x) + div_x w(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_y \vec{z}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx.$$

Перейдем в выделенных слагаемых к слабому двухмасштабному пределу. Поскольку

$$\|div\, \vec{\hat{u}}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^s_\varepsilon)} \le c, \quad div_x(\vec{u}(x) + \vec{w}(x,y)) \in L^2(\Omega; L^2(Q \cap B)), \quad \vec{z}(x,y) \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Q))$$

последнее слагаемое будет сходиться к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Для дальнейшего исследования нам понадобится следующая лемма:

Лемма 8. Для любой функции $\vec{g}(x,y)$, удовлетворяющей условию (85) верно, что $\vec{g}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \xrightarrow{2} \vec{g}(x,y)$ сильно двухмасштабно.

Доказательство. Доказательство этого факта несложно, оно проведено, например, в **[8]** и напрямую следует из эквивалентности двух определений сильной двухмасштабной сходимости.

□

В (27) и (28) утверждалось, что при $\varepsilon \to 0$

$$\vec{\tilde{u}}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \vec{u}(x) + \vec{w}(x,y), \quad \varepsilon \nabla_x \vec{\tilde{u}}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \nabla_y \vec{w}(x,y), \quad -\chi(\Omega^s_\varepsilon)\, \gamma\, div \vec{\tilde{u}}_\varepsilon \xrightharpoonup{2} \Pi p(x),$$

а последовательность $div \vec{\tilde{u}}_\varepsilon$ ограничена в совокупности по ε в $L^2(\Omega)$ (здесь Π – пористость среды, $\Pi = |Q \cap B|$). К тому же, из определения функций $\vec{u}(x)$, $\vec{w}(x,y)$ и $\vec{z}(x,y)$ следует, что

$$\varepsilon \nabla_x \vec{w}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0; \quad \varepsilon \nabla_x \vec{z}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0; \quad \varepsilon \nabla_x \vec{u}(x) \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

В каждом из слагаемых в (99) один из множителей сходится к известной предельной функции сильно, а другой – слабо, что дает нам возможность применить свойство (87). Таким образом, при переходе к слабому двухмасштабному пределу слагаемые, отвечающие жидкой фазе в левой части (97), будут своим пределом иметь следующее выражение:

$$(100) \quad \lambda^2 \int\limits_{\Omega \times Q \cap B} \rho^s \left(\vec{u}(x) + \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy + \\ + 2\lambda\mu \int\limits_{\Omega \times Q \cap B} \left(\nabla_y \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy - \\ - \int\limits_{\Omega \times Q \cap B} p(x) \left(div_x \vec{u}(x) + div_y \vec{w}(x,y) + div_y \vec{z}(x,y)\right) dxdy \equiv I^s_1 + I^s_2 + I^s_3.$$

Преобразуем I^s_3:

$$(101) \\ I^s_3 \equiv - \int\limits_{\Omega \times Q \cap B} p(x) \left(div_x \vec{u}(x) + div_y \vec{w}(x,y) + div_y \vec{z}(x,y)\right) dxdy = \\ = - \int\limits_{\Omega \times Q \cap B} p(x) \left(div_x \vec{u}(x) + div_y \vec{w}(x,y)\right) dxdy - \\ - \int\limits_{\Omega \times Q \cap B} p(x) div_y \vec{z}(x,y) dxdy \equiv I^s_{3,1} + I^s_{3,2}.$$

Из тождества (36) следует, что

$$\int\limits_{Q\cap B} \left(div_x\vec{u}(x) + div_y\vec{w}(x,y)\right) dy = \int\limits_{Q\setminus B} div_y\vec{u}_1(x,y)\, dy - \frac{\Pi}{\gamma}\, p(x).$$

То есть:

$$-I^s_{3,1} \equiv -\int\limits_{\Omega\times Q\cap B} p(x)\left(div_x\vec{u}(x) + div_y\vec{w}(x,y)\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} p(x)\left(-\int\limits_{Q\setminus B} div_y\vec{u}_1(x,y)\, dy + \frac{\Pi}{\gamma}\, p(x)\right) dx$$

Также известно, что

$$\int\limits_{Q\cap B} div_y\vec{z}(x,y)dy + \int\limits_{Q\setminus B} div_y\vec{z}(x,y)dy = \int\limits_{Q} div_y\vec{z}(x,y)dy,$$

то есть, по определению функции $\vec{z}(x,y)$:

$$\int\limits_{Q\cap B} div_y\vec{z}(x,y)dy = \int\limits_{Q} div_y\vec{z}(x,y)dy - \int\limits_{Q\setminus B} div_y\vec{u}_1(x,y)dy.$$

Отметим, что функция $\vec{z}(x,y)$ – Q-периодична по y, поэтому, по формуле Грина,

$$\int\limits_{Q} div_y\vec{z}(x,y)dy = -\int\limits_{\partial Q} (\vec{z}(x,y),\vec{\nu})ds = 0.$$

Следовательно,

$$-I^s_{3,2} \equiv \int\limits_{\Omega\times Q\cap B} p(x)\left(div_y\vec{z}(x,y)\right) dxdy = \int\limits_{\Omega} p(x)\left(\int\limits_{Q\setminus B} div_y\vec{u}_1(x,y)\, dy\right) dx,$$

и значит

$$I_3^s \equiv I_{3,1}^s + I_{3,2}^s =$$

$$= \int\limits_{\Omega} p(x) \left(- \int\limits_{Q \setminus B} div_y \vec{u}_1(x,y)\, dy + \frac{\Pi}{\gamma} p(x) \right) + \int\limits_{\Omega} p(x) \left(\int\limits_{Q \setminus B} div_y \vec{u}_1(x,y)\, dy \right) dx =$$
$$= \frac{\Pi}{\gamma} \int\limits_{\Omega} p^2(x)\, dx.$$

Проведем аналогичные преобразования с первыми двумя слагаемыми в (97), отвечающими жесткой фазе задачи:

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \rho^h \vec{\hat{u}}_\varepsilon \left(\vec{u}(x) + \varepsilon \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl} \nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon \left(\nabla_x \vec{u}(x) + \varepsilon \nabla_x \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx =$$
$$= \lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \rho^h \vec{\hat{u}}_\varepsilon u(x) dx + \varepsilon \lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \rho^h \vec{\hat{u}}_\varepsilon \cdot \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl} \nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon \left(\nabla_x \vec{u}(x) + \nabla_y \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl} \nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon \nabla_x \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx.$$

При $\varepsilon \to 0$ двухмасштабный предел $\vec{\hat{u}}_\varepsilon$ на упругой фазе равен $\vec{u}(x)$ – см. (27). Следовательно

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \rho^h \vec{\hat{u}}_\varepsilon \cdot \vec{u}(x) dx \to \lambda^2 \int\limits_{\Omega \times Q \setminus B} \rho^h (\vec{u})^2(x) dx dy.$$

Слагаемое $\varepsilon \lambda^2 \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} \rho^h \vec{\hat{u}}_\varepsilon \cdot \vec{u}_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx$ стремится к нулю (вследствие ограниченности функций $\vec{\hat{u}}_\varepsilon$ и $\vec{u}_1(x,y)$). Последнее слагаемое стремится к нулю в силу ограниченности $\nabla \vec{\hat{u}}_\varepsilon$ и $\nabla_x \vec{u}_1(x,y)$ на упругой фазе.

Легко видеть, что

$$(102)\quad \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})\right)dx\ =$$

$$=\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon\nabla_x\vec{u}(x)dx+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon\nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})dx$$

В правой части (102) два слагаемых. Первое из них при переходе к двухмасштабному пределу при $\varepsilon\to 0$ дает

$$\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\nabla_x\vec{u}(x)\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)dxdy.$$

По определению, для любой двухмасштабно сходящейся $\vec{g}_\varepsilon(x)\in L^2(\Omega)$ выполняется при $\varepsilon\to 0$

$$(103)\quad \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})g_\varepsilon(x)dx\to\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\nabla_y\vec{u}_1(x,y)g(x,y)dxdy,$$

где $\vec{g}(x,y)$ - слабый двухмасштабный предел последовательности $\vec{g}_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to 0$.

Возьмем $g_k^i(x,\varepsilon)=\dfrac{\partial\hat{u}_\varepsilon^k}{\partial x_i}$, $1\le i,k\le 3$. В соответствии с (103), будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x)dx\to\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\left(\nabla\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)dxdy,$$

поскольку $\nabla\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)$ – слабый двухмасштабный предел последовательности $\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x)$.

Следовательно для всей суммы из (102) верно

$$(104)\quad \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})\right)dx \longrightarrow$$

$$\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\nabla_x\vec{u}(x)\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)dxdy+$$

$$+\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\left(\nabla\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)^2dxdy\equiv I_1^h.$$

Замечание 12. Под записью

$$\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)^2dxdy$$

мы здесь понимаем выражение

$$\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_1^i}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_1^k}{\partial y_l}\right)dxdy.$$

Окончательно, при $\varepsilon\to 0$

$$(105)\quad \lambda^2\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h}\rho^h\vec{\hat{u}}_\varepsilon\vec{u}(x)dx+\varepsilon\lambda^2\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h}\rho^h\vec{\hat{u}}_\varepsilon\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})\right)dx+$$

$$+\ \varepsilon\int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl}\nabla\vec{\hat{u}}_\varepsilon\nabla_x\vec{u}_1(x,\frac{x}{\varepsilon})dx\longrightarrow$$

$$\lambda^2\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B}\rho^h(\vec{u}(x))^2dxdy+\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)^2dxdy.$$

Предельную функцию из (105) можно преобразовать, (пользуясь определением функции $\vec{w}(x,y)$) следующим образом

$$\lambda^2\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B}\rho^h(\vec{u}(x))^2dxdy+\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)^2dxdy=$$

(106)

$$= \lambda^2 \int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} \rho^h \left(\vec{u}(x) + \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy + \int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl} \left(\nabla_x \vec{u}(x) + \nabla_y \vec{u}_1(x,y)\right)^2 dxdy.$$

Окончательно,

(107)

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} \rho^h \left(\vec{u}(x) + \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy + \lambda^2 \int\limits_{\Omega\times Q\cap B} \rho^s \left(\vec{u}(x) + \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_{\Omega\times Q} \tilde{\rho} \left(\vec{u}(x) + \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy \equiv I_1.$$

Объединяя полученные выше в (100), (101), (104) и (107), результаты, после перехода к двухмасштабному пределу в (97) будем иметь

$$I_1 + I_2^s + I_3^s + I_1^h = \int\limits_{\Omega} \vec{\tilde{f}}(x) \left(\vec{u}(x) + \vec{\tilde{w}}(x)\right) dx. \tag{108}$$

Сравним теперь (108) с (92) с использованием вспомогательных результатов (83) и (84).

По свойству (83) выполняются следующие неравенства:

$$I_1 \le \lambda^2 \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \rho^\varepsilon |\vec{\tilde{u}}_\varepsilon|^2 dx,$$

$$I_1^h \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^h} a_{ijkl} E_{ij}(\vec{\tilde{u}}_\varepsilon) E_{kl}(\vec{\tilde{u}}_\varepsilon)\, dx,$$

$$I_2^s \le 2\lambda\mu \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \varepsilon^2 |\nabla \vec{\tilde{u}}_\varepsilon|^2\, dx,$$

$$I_3^s \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon^s} \gamma\, |div\, \vec{\tilde{u}}_\varepsilon|^2\, dx.$$

5.4. Результаты

Теорема 14. Имеют место следующие сходимости:

$$\chi\left(\Omega_\varepsilon^s\right)\hat{p}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \Pi p(x), \tag{109}$$

$$\vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \vec{u}(x) + \vec{w}(x,y), \tag{110}$$

$$\varepsilon\,\nabla_x \vec{\hat{u}}_\varepsilon(x) \xrightarrow{2} \nabla_y \vec{w}(x,y), \tag{111}$$

$$\chi\left(\Omega_\varepsilon^h\right)\left(\nabla_x \vec{\hat{u}}_\varepsilon(x)\right) \xrightarrow{2} \chi\left(\Omega \cap Q\backslash B\right)\left(\nabla_x \vec{u}(x) + \nabla_y \vec{u}_1(x,y)\right). \tag{112}$$

Замечание 13. В силу утверждения (84) результаты теоремы 14 могут быть сформулированы в терминах сильной сходимости следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|p_\varepsilon(x,t) - p(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \vec{u}(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \dot{\vec{u}}(x,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla_x\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\vec{u}(x,t) - \nabla_y\vec{u}_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla_x\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\dot{\vec{u}}(x,t) - \nabla_y\vec{u}_1(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^h)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \vec{u}(x,t) - \vec{w}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\nabla_x\vec{u}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\vec{u}(x,t) - \nabla_x\vec{w}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\|\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \dot{\vec{u}}(x,t) - \dot{\vec{w}}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\|\nabla_x\dot{\vec{u}}_\varepsilon(x,t) - \nabla_x\dot{\vec{u}}(x,t) - \nabla_x\dot{\vec{w}}(x,\tfrac{x}{\varepsilon},t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^s)} = 0,
\end{aligned}$$

Доказательство. Правые части (108) и (92) равны, а каждое в отдельности слагаемое в (108) меньше либо равно соответственного слагаемого в (92). Следовательно, в каждом слагаемом имеет место равенство:

$$\frac{\Pi}{\gamma}\int\limits_{\Omega}(p(x))^2\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s}\gamma\,|div\,\vec{\hat{u}}_\varepsilon|^2\,dx = \frac{1}{\gamma}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon^s}(p_\varepsilon(x))^2\,dx,$$

$$\lambda^2 \int\limits_{\Omega\times Q} \tilde{\rho}\left(\vec{u}(x)+\vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy = \lambda^2 \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \rho^{\varepsilon} \vec{\hat{u}}_{\varepsilon}^2 dx$$

$$2\lambda\mu \int\limits_{\Omega\times Q\cap B} \left(\nabla_y \vec{w}(x,y)\right)^2 dxdy = 2\lambda\mu \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon\nabla\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}\right)^2 dx,$$

$$\int\limits_{\Omega\times Q\setminus B} a_{ijkl}\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right)^2 dxdy \;=\; \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_{\varepsilon}^h} a_{ijkl}E_{ij}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon})E_{kl}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon})\,dx,$$

что с помощью (84) влечет позволит нам получить утверждение теоремы 14, касающиеся давления, смещений и градиентов смещений на мягкой фазе, а также для на смещений на жесткой фазе. □

Для доказательства сходимости градиентов смещений на жесткой фазе потребуются некоторые дополнительные рассуждения.

Обозначим

$$E_{ij}^u = E_{ij}(\vec{u}(x)) + e_{ij}(\vec{u}_1(x,y)).$$

Лемма 9. Пусть тензор a_{ijkl} обладает свойствами положительной определенности и симметричности (см. (20)) и известно, что

$$\chi(\Omega_{\varepsilon}^h)\nabla_x\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x) \xrightharpoonup{2} \chi(\Omega\times(Q\setminus B))\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right), \tag{113}$$

(114)

$$||\,\chi(\Omega_{\varepsilon}^h)a_{ijkl}E_{ij}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon})E_{kl}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon})||^2_{L^2(\Omega_{\varepsilon}^h)} \to ||\chi(\Omega\times(Q\setminus B))a_{ijkl}E_{ij}^uE_{kl}^u||^2_{L^2(\Omega\times Q\setminus B)},$$

где $\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}$, $\vec{u}(x)$, $\vec{u}_1(x,y)$ определены выше.
Тогда

$$\chi(\Omega_{\varepsilon}^h)\nabla_x\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x) \xrightarrow{2} \chi(\Omega\times(Q\setminus B))\left(\nabla_x\vec{u}(x)+\nabla_y\vec{u}_1(x,y)\right). \tag{115}$$

Доказательство. С учетом симметрии $E_{ij} = E_{ji}\,(e_{ij} = e_{ji})$ тензор деформаций в $\mathbb{R}^3$ содержит шесть различных компонент. Запишем их в виде векторов:

$$\vec{e}_u = \Big(e_{11}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x)), e_{22}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x)), e_{33}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x)), e_{12}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x)), e_{13}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x)), e_{23}(\vec{\hat{u}}_{\varepsilon}(x))\Big)^T,$$

$$\vec{e}_z = \left(E_{11}^u, E_{22}^u, E_{33}^u, E_{12}^u, E_{13}^u, E_{23}^u\right)^T.$$

Тогда

$$a_{ijkl}E_{ij}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon)E_{kl}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon) = (\mathcal{A}\vec{e_u}, \vec{e_u}) , \;\; a_{ijkl}E^u_{ij}E^u_{kl} = (\mathcal{A}\vec{e_z}, \vec{e_z}) .$$

Где матрица $\mathcal{A}$ составлена из коэффициентов a_{ijkl}, а потому, на основании известных свойств тензора теории упругости, симметрична и положительно определена. Следовательно, существует такая матрица $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X}^2 = \mathcal{A}$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}^T$. Значит

$$(\mathcal{A}\vec{e_u}, \vec{e_u}) = (\mathcal{X}\vec{e_u}, \mathcal{X}\vec{e_u}) , \quad (\mathcal{A}\vec{e_z}, \vec{e_z}) = (\mathcal{X}\vec{e_z}, \mathcal{X}\vec{e_z}) .$$

Выражение $(\mathcal{X}\vec{e_u}, \mathcal{X}\vec{e_u})$ есть квадрат нормы вектора $\mathcal{X}\vec{e_u}$ и поэтому состоит из квадратов линейных комбинаций величин $e_{ij}(\hat{u}_\varepsilon)$ с некоторыми коэффициентами θ^{ij}_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$, так что $(\mathcal{X}\vec{e_u}, \mathcal{X}\vec{e_u}) = \sum\limits_{k=1}^{6} \left(\theta^{ij}_k E^2_{ij}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon)\right)^2$, аналогично $(\mathcal{X}\vec{e_z}, \mathcal{X}\vec{e_z}) = \sum\limits_{k=1}^{6} \left(\theta^{ij}_k E^u_{ij}\right)^2$.
По условию (114) имеем,

$$||(\mathcal{X}\vec{e_u})||^2_{L^2(\Omega^h_\varepsilon)} \to ||(\mathcal{X}\vec{e_z})||^2_{L^2(\Omega\times Q\setminus B)},$$

следовательно

$$||\theta^{ij}_k E_{ij}(\vec{\hat{u}}_\varepsilon)||_{L^2(\Omega^h_\varepsilon)} \to ||\theta^{ij}_k E^u_{ij}||^2_{L^2(\Omega\times Q\setminus B)}, \;\; k = 1, \ldots, 6$$

что в свою очередь немедленно влечет утверждение (115).

$\square$

Заключение.

В данной работе рассматривается задача анализа спектра только одномерных движений для описанных выше моделей усредненных сред. Вопрос о построении спектров плоских и пространственных движений для моделей, рассмотренных в настоящей работе, не исследовался. Очевидно, это – интересная задача, требующая своего решения. Возможно, качественная картина спектров будет аналогична рассмотренным в этой работе случаям спектров одномерных движений. Вероятно также, что может быть построена адекватная данным задачам абстрактная операторная схема.

Интересно провести также анализ задачи о декременте затухания акустической волны, проходящей через "стенку" из материалов, эффективные модели которых приведены в данной работе.

Как уже отмечено во Введении, в настоящей работе не рассматривается вопрос о сходимости как множеств спектров для допредельных моделей к спектрам, отвечающим "эффективным" или "усредненным" моделям. В работе [**2**] этот вопрос рассмотрен для случая модели "двойной пористости". Обычно довольно просто доказывается утверждение, состоящее в том, что к каждой точке предельного спектра сходится некоторая последовательность из точек спектра допредельных задач. Доказательство обратного утверждения, состоящего в том, что каждая предельная точка подпоследовательности точек допредельных задач является точкой спектра предельной ("усредненной") модели, вызывает бóльшие затруднения и требует дополнительных предположений. Это также интересная задача, требующая решения.

В рамках данной работы рассматриваются модели с периодической структурой. В последнее время рядом авторов были предприняты усилия по "стохастизации" задач усреднения для пористых сред (см [**15**]). Несомненный интерес представлял бы перенос различных результатов о спектрах на модели случайных сред, аналогичные рассмотренным выше.

В данной работе рассмотрен случай полного заполнения отверстия (или каналов) жидкостью. При моделировании реальных механических систем таких, как грунты, насыщенные жидкостью, необходимо учитывать, что заполнение отверстий или каналов здесь, как правило, не будет полным. Это обстоятельство должно привести к качественным отличиям в распространении волн. Математическое моделирование сред с неполным заполнением отверстий – еще одна интересная задача. Так, значительно бо́льшими здесь должны быть тепловые потери, поскольку при движении "каркаса" жидкость в порах будет вовлечена в движение не целиком а только в частях, примыкающих к каркасу, что приведет к бо́льшим градиентам скорости.

Интересную задачу представляет собой проблема построения эффективных характеристик среды, аналогичной рассмотренной в настоящей работе, с дополнительным условием малости объема упругой фазы (т.н. тонкие структуры). В таких задачах возникает еще один новый малый параметр – толщина упругих стенок или армирующих жидкость упругих прутьев. При такой постановке задачи возможно построение упругих характеристик в явном виде, без использования вспомогательных задач на ячейке. Поскольку само решение вспомогательной задачи на ячейке может быть с высокой степенью точности представлено в виде явной формулы.

Вполне возможно построить асимптотические разложения для серий вещественных и комплексных составляющих спектра рассматриваемых задач при стремлении номера собственного значения в данной серии к бесконечности. Для одномерного случая эта задача сводится к исследованию асимптотики нулей некоторых явно задаваемых аналитических функций. В общем случае, это – более сложный вопрос, но он представляет интерес и, с точки зрения автора, вполне доступен для дальнейшего исследования.

В связи с прикладными задачами акустики морского дна представляет интерес задача об отражении и преломлении акустической волны на границе раздела жидкости и среды, составленной из жидкости и упругих частиц, причем упругие частицы могут составлять как связный каркас, так и множество из отдельных, не связных между собой компонент. Предлагаемые в настоящей работе методы исследования могут быть применены к решению и этой задачи. Ранее аналогичные вопросы рассматривались для других дифференциальных уравнений и систем уравнений. Отличительной особенностью таких задач является наличие в рассматриваемой области двух частей: пористой или перфорированной части и однородной компоненты. Иногда такие области называют частично перфорированными. Большой интерес представляет построение в усредненных моделях граничных условий на границе контакта перфорированной и однородной частей. К построению такого усредненного граничного условия сведется, скорее всего, и упомянутая выше задача об акустике морского дна.

Литература

[1] Gabriel Nguetseng, Asymtotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics,//SIAM J. Math. Anal. – Vol. 21, – No. 6,– pp. 1396-1414, – 1990

[2] В. В. Жиков, Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Математический сборник, – Т. 191, –№ 7,– с. 31-72, – 2000

[3] Э. Санчес-Паленсия, Неоднородные среды и теория колебаний, – М.:, Мир, 1984

[4] В. С. Нестеров Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации,// Акустический журнал РАН – т. 5, – вып. 3, – с. 337-344, – Москва, 1956

[5] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров, Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Изв. РАН МТТ, – №1, – с. 109-120, – Москва, 2005

[6] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров, Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом // Изв. РАН МТТ, – №5, – с. 145-156, – Москва, 2002

[7] J. Frenkel, On the Theory of Seismic and Seismoelectric Phenomena in Moist Soils // J. Phys. U.S.S.R. – V. 8, – 230 – 1944.

[8] А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, Усреднение. Методы и некоторые приложения. – Новосибирск, 2005 (в печати).

[9] Д. Б. Волков, Об осреднении некоторых краевых задач в областях с периодической структурой // ЖВМ и МФ,– т.22,– є1, – с.112-122,– 1982.

[10] В. В. Жиков, Об усреднении системы уравнений Стокса в перфорированной области //ДАН СССР,– т. 334,– є2,– с. 144-147,– 1994.

[11] Г. В. Сандраков, Осреднение нестационарного потока Стокса в периодической перфорированной среде // ДАН,– т. 347,– є3,– с. 312-315,– 1996.

[12] M.A. Biot, Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, // J. Appl. Phys., – 33, – pp. 1482-1498, – 1962

[13] R.P. Gilbert, A. Mikelić, Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I". // – Nonlinear Analysis, – 40, – pp. 185-212, – 2000

[14] А. С. Шамаев, В. А. Самарин, О распространении акустических волн в среде, состоящей из вязкой жидкости и упругого материала,// Москва, 2005 (в печати)

[15] A. Bourgeat, A. Piatnitski, Approximations of effective coefficients in stochastic homogenization, //Ann. Inst. H. Poincare, Prob. Statistics – 40, – № 2, – pp. 153-165, – 2004.

[16] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, Математические задачи сильно неоднородных упругих сред, – М.,: МГУ, 1990

[17] Н. С. Бахвалов, Г. Н. Панасенко, Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984

[18] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Усреднение дифференциальных операторов, – Наука, М. 1993.

[19] Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, - М.: Мир, 1972

[20] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – V. 20. – pp.608-623. – 1989.

[21] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. – V. 23. – pp. 1482-1518. – 1992

[22] G. Allaire, A. Damlamian, U. Hornung, Two-scale convergence on periodic surfaces and applications // Mathematical Modelling of Flow through Porous Media. Editors: A. Bourgeat, C. Carasso, S. Luckhaus, A. Mikelić – pp. 15-25. – Singapore. – 1995.

[23] M. Neuss-Radu, Some extension of two-scale convergence // C. R. Acad. Sciences Paris. – V. 322, Seria I. – pp. 899-904. – 1996.

[24] T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung, Derivation of the double porousity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. – V. 21., №4 – pp. 823-836. – 1990.

[25] В. В. Жиков, О двухмасштабной сходимости // Труды семинара им. Петровского. Вып. 23. – М.: Изд-во Моск. Ун-та. – стр. 149-187. – 2003.

[26] D. Lukassen, G. Nguetseng, P. Wall, Two-scale convergence// Intern. J. Pure and Appl. Math. – V.20,№1 – pp. 35-86. – 2002

[27] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики – М.: ОГИЗ, 1947

[28] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике – Ленинград: Изд-во Ленинградского Ун-та, 1950

[29] Г. С. Горелик, Колебания и волны – М.: ОГИЗ, 1950

[30] Л. Ландау, Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, том третий – М.: ОГИЗ, 1944

[31] С. Б. Шульга, Об усреднении нелинейных эллиптических задач в средах с двойной пористостью // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук – Владимир: Изд-во Владимирского Гос. Пед. Ун-та, 2004

[32] В. В. Жиков, Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сборник. – Т. 187, №8. – с. 3-40. – 1996

[33] A. Mikelić, Mathematical derivation of the Darcy-type law with memory effects, governing transient flow through porous media // Glasnik Mat. – V. 29. – pp. 57-78. – 1994

[34] В. В. Жиков, Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Серия мат. 2002 – т. 66,№2 – с. 81-148. – 2002

[35] G. Allaire, C. Conca, Bloch-wave homogenization and spectral asymptotic analysis //J. Math. Pures Appl. – V. 77. – pp. 153-208. – 1998

[36] G. Allaire, C. Conca, Bloch wave homogenization for a spectral problem influid-solid structures// Arch. Rational Mech. Anal. – 135(3). – pp. 197-257. – 1996

[37] C. Conca, On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics// Publ. Lab. Anal. Numer. – 83006. – pp. 1-63. – 1983

[38] Th. Levy, Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid // Internat. J. Engin. Sci. – V. 17. – pp. 1005-1014. – 1979

[39] U. Hornung, W. Jäger, Diffusion, convection, adsorption and reaction of chemicals in porous media // J. Diff. Equat. – V. 2 (92) – pp. 199-225 – 1991

[40] К. Иосида, Функциональный Анализ – М: Мир, 1967

[41] A. Yu. Beliaev, S. M. Kozlov, Darcy equation for random porous media// Comm. Pure Appl. Math. – V. 49. – pp. 1Ц34 – 1996

[42] A. Yu. Beliaev, Nonlinear Darcy Law in a Random Porous Medium// Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, HOMOGENIZATION In Memory of Serguei Kozlov – Vol. 50. – 440pp. – 1999

[43] А. Ю. Беляев, О сингулярных возмущениях краевых задач// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук – М: Изд-во Моск. Ун-та, 1990

[44] H. I. Ene, E. Sanchez-Palencia, Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans une modèle de milieu poreux // Jour. Mécan. – V. 14. – pp.73-108. – 1975

[45] Th. Levy, E. Sanchez-Palencia, On boundary conditions for fluid flow in porous media// Internat. J. Engin. Sci. – V. 13. – pp. 923-940. – 1975

[46] F. Fleury, Sédimentation de particules solid dans un fluide visquex incompressible// Jour. Mécan. – V. 18. – pp.345-354. – 1979

[47] J. Sanchez-Hubert, Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture// Math. Methods Appl. Sci. – V. 2. – pp. 1-18. – 1980

[48] Th. Levy, Acoustic phenomena in elastic porous media// Mech. Res. Comm. – V. 4 (4) – pp. 253-257. – 1977

[49] В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, 3-е издание, – М: Наука, 1977

[50] D. Cioranescu, F. Murat, Un terme éntrange venu d'ailleurs // Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. – Collège de France Seminar – Vols. II, III. – Pitman, Boston. – 1980

Работы автора по теме диссертации.

[51] Kosmodemiyanskiy D. "Acoustics in porous media"// "Intl conf NPDE, Book of abstracts" – с. 117-118 – Донецк, 2005

[52] Космодемьянский Д. А."Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред"// "Nonlinear boundary-value problems" – Т. 16 – Донецк – с. 132-155 – 2006

[53] Космодемьянский Д. А. "Спектральные свойства некоторых задач механики сильно неоднородных сред"// принята в журнал "Вестник МГУ" – срок выхода октябрь 2006 – 6с

[54] Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев, "О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью", "Abstracts of DFDE-2005", Москва, 2005

[55] Д. А. Космодемьянский, А. С. Шамаев, "О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью"// "Современная математика. Фундаментальные направления" – Т. 17 – Москва – с.1-23 – 2006

[56] Космодемьянский Д. А., Шамаев А. С. "О некоторых задачах сходимости и спектральных вопросах пористых неоднородных сред"// РАН Механика Твердого Тела – Сдана в печать – 52с