Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.956.223

Романов Игорь Викторович

# О задачах управления колебаниями мембран и пластин с помощью граничных сил

Специальность
01.01.02 – дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. А. С. Шамаев

Москва 2010

# Оглавление

Глава 1

# Введение

Задачам, связанным с управлением системами с распределенными параметрами, посвящено большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов. Значительная часть этих работ рассматривает такие объекты, как струны, мембраны и пластины. Используемые при этом методы управления можно условно разделить на два класса.

Первый класс связан с управляющим воздействием, распределенным по всей поверхности рассматриваемой системы. Второй класс основан на граничном управлении. В данной диссертации будут рассматриваться только такие задачи, в которых управление распределено по границе.

В дополнение к результатам полученным в данной работе, приведем обзор методов и задач, рассмотренных другими авторами. При этом, некоторые из этих задач будут рассмотренны более подробно, поскольку они связаны с методами используемыми в данной диссертации.

В монографии [25] изложены результаты по управлению колебаниями тонких упругих пластин. Сформулирован принцип Л. С. Понтрягина для задач с начальными условиями и смешанными граничными условиями, когда часть пластины свободно оперта, а часть защемлена. Заметим, что управляющее воздействие здесь предполагается распределенным по всей поверхности пластины и ограничено по норме пространства $L_2$.

В работах [7, 31, 35-43, 45] рассматриваются проблемы управления различными системами, такими как осциляторы, мембраны, пластины, стержни, при различных ограничениях на управляющие воздействия. Излагается также метод декомпозиции, т. е. сведение задачи об управлении некоторой колебательной системой к решению счетной системы более простых задач. Более подробно остановимся на методах, изложенных в монографии [41].

В гл. 4 монографии [41] рассматриваются управляемые системы с распределенными параметрами, связанные с уравнениями распространения волн. Системы предполагаются линейными, а управление осуществляется посредством распределенных воздействий, описываемых соответствующими членами в правой части уравнения. Управление предполагается ограниченным по абсолютной величине. Ставится задача о приведении управляемой системы в нулевое состояние за конечное время. Предложен способ управления, основанный на декомпозиции исходной системы и применении оптимального по быстродействию управления для каждой моды движения, полученной в результате разложения решения по методу Фурье.

Данная задача по существу сводится к управлению счетной системой мод (маятников), что требует получения специальных оценок. Приведены также достаточные условия разрешимости поставленной задачи управления. Управляющее воздействие получено в явном виде. Выведены оценки сверху для времени процесса управления.

Для полноты картины сформулируем основные результаты, приведенные в данной монографии.

Будем рассматривать управляемые системы с распределенными параметрами, описываемые линейными уравнениями в частных производных. Рассмотрим уравнение

$$w_{tt} = Aw + v. \quad (1)$$

В уравнении (1) $w(x,t)$ – скалярная функция n-мерного вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ пространственных координат и времени $t$, характеризующая состояние системы, $v$ – искомое управление, $A$ – линейный дифференциальный оператор, содержащий частные производные по координатам $x_i$, $i = 1, ..., n$. Коэффициенты оператора $A$ не зависят от $t$, а его порядок считаем четным и равным $2m$. Наиболее распространенными примерами оператора $A$ являются оператор Лапласа $\Delta$ и оператор $-\Delta^2$.

Уравнение (1) рассматривается в некоторой открытой ограниченной области изменения пространственных переменных $x \in \Omega$ и при $t \geq 0$. На границе $\Gamma$ области $\Omega$ должно выполняться однородное граничное условие вида

$$Mw = 0, \quad M = (M_1, ..., M_m), \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $M_j$ – линейный дифференциальный оператор порядка меньшего $2m$ с коэффициентами, не зависящими от $t$. В частности при $m = 1$ оператор $M$ – скалярный и имеет вид

$$Mw = b_0(x)w + b_1(x)\frac{\partial w}{\partial x},$$

где $b_0(x)$, $b_1(x)$ – заданные на $\Gamma$ функции. Условие (2) может, в частности, превращаться в условие Дирихле (при $b_0 = 1$, $b_1 = 0$) или Неймана (при $b_0 = 0$, $b_1 = 1$).

Начальные условия имеют вид

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_{t0}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

а на управляющую функцию $v(x, t)$ в уравнении (1) наложено ограничение

$$|v(x, t)| \leq v^0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

где $v^0 > 0$ – заданная постоянная.

Задача состоит в построении управления $v(x, t)$, удовлетворяющее ограничению (4). При этом соответствующее данному управлению решение уравнения (1) с краевым условием (2) и с начальными условиями (3) должно обращаться в нуль в некоторый конечный (нефиксированный) момент $T > 0$. То есть, всюду в $\Omega$ должны быть выполнены условия

$$w(x,T) = w_t(x,T) = 0.$$

Очевидно, что если положить $v \equiv 0$ при $t \geq T$, то решение останется тождественно равным нулю при $t > T$.

Граница области $\Omega$ удовлетворяет условию Липшица.

Приведем теперь основную идею метода декомпозиции, т. е. сведение поставленной задачи к проблеме управления счетной системой маятников.

Метод декомпозиции будет опираться на метод Фурье. Для его применения рассмотрим сначала следующую задачу на собственные значения.

Задача состоит в определении функций $\varphi(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих при соответствующих постоянных $\lambda$ линейному однородному и граничному условию:

$$A\varphi = -\lambda\varphi, \quad x \in \Omega; \quad M\varphi = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Как известно, при определенных условиях (для самосопряженных эллиптических уравнений и, в частности, для уравнения Лапласа, т. е. при $A = \Delta$), задача на собственные значения (5) обладает следующими свойствами.

Имеется дискретный счетный спектр положительных собственных значений $\lambda_k$, которые могут быть пронумерованы в неубывающем порядке: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$, причем $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. В некоторых случаях, например для оператора Лапласа $A = \Delta$ при условии Неймана имеется также нулевое собственное значение $\lambda = 0$. Этот случай также рассматривается в данной монографии. Указанным собственным значениям отвечает ортогональная система собственных функций $\varphi_k(x)$, которая является полной в области $\Omega$. Нормировав эти функции, получим ортонормированную систему функций $\varphi_k(x)$, обладающих следующими свойствами:

$$A\varphi_k = -\lambda_k \varphi_k, \quad x \in \Omega; \quad M\varphi_k = 0, \quad \|\varphi_k\| = 1, \quad x \in \Gamma; \tag{6}$$

Индекс $k$ в (6) и далее пробегает значения от 0 до $\infty$ при наличии нулевого собственног значения $\lambda_0 = 0$ и от 1 до $\infty$ при его отсутствии. Суммирование в дальнейшем будет проводиться по $k$ также в указанных выше пределах.

Воспльзуемся теперь методом Фурье для разделения временной (от $t$) и пространственной (от $x$) зависимостей. Решения уравнения (1) будем искать в виде разложений по собственным функциям

$$w(x,t) = \sum q_k(t)\varphi_k(x), \tag{7}$$

где $q_k(t)$ – некоторые функции времени. Управление $v$ в (1) также представим в виде разложения

$$v(x,t) = \sum u_k(t)\varphi_k(x), \tag{8}$$

где $u_k(t)$ – неизвестные функции времени.

Подставляя разложения (7) и (8) в уравнение (1), получим

$$\sum \ddot{q}_k(t)\varphi_k(x) = \sum (q_k A\varphi_k + u_k\varphi_k).$$

Здесь и далее точки означают производные по времени.

Воспользуемся уравнением $A\varphi_k = -\lambda_k\varphi_k$, а также условием ортогональности функций $\varphi_k$. В результате получим систему уравнений

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = u_k. \tag{9}$$

Здесь и далее $\omega_k$ – частоты собственных колебаний, равные

$$\omega_k = \lambda_k^{\frac{1}{2}}, \quad 0 = \omega_0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le \ldots \quad . \tag{10}$$

Отметим, что решение в виде (7) по построению удовлетворяет однородному краевому условию (2), так как этому условию удовлетворяют все собственные функции.

Подставим решение (7) в начальные условия (3) и воспользуемся свойствами ортонормированности собственных функций (6). Получим начальные условия для задачи (9) в виде

$$q_k(0) = q_k^0 = \int\limits_{\Omega} w_0(x)\varphi_k(x)dx,$$

$$\dot{q_k}(0) = (\dot{q_k}^0) = \int\limits_{\Omega} w_{t0}(x)\varphi_k(x)dx. \tag{11}$$

Таким образом, исходная задача управления для уравнения в частных производных (1) свелась к задаче управления счетной системой маятников. Необходимо отметить, что для каждого маятника из счетной системы (9) существует собственное управление $u_k$, на модуль которого наложено ограничение. В работе [41] проводится доказательство возможности остановки каждого маятника в отдельности, а затем доказывается существование минимального времени остановки для всей счетной системы маятников. Получена также оценка сверху для данного времени управления.

$$T \leq \pi((2V(\sup_{x\in\Omega}\sum[\omega_k^2(q_k^0)^2 + (\dot{q}_k^0)^2]^{\frac{1}{2}}|\varphi_k(x)|)^{-1})^{-1}+$$
$$+\sqrt{2}(\omega_1 V(\sup_{x\in\Omega}\sum[\omega_k^2(q_k^0)^2 + (\dot{q}_k^0)^2]^{\frac{1}{2}}|\varphi_k(x)|)^{-1})^{-\frac{1}{2}}).$$

На управляющие функции $u_k$ для каждого маятника было наложено ограничение

$$|u_k| \leq U_k, \quad t \geq 0.$$

Также требуется выполнение неравенства

$$\sum U_k|\varphi_k(x)| \leq V, \quad x \in \Omega.$$

В данной диссертации для каждого случая управления также проводится декомпозиция, т. е. сведение исходной задачи к управлению счетной системой маятников. При этом доказательство возможности представить исходную задачу в виде счетного числа мод отличается от изложенного выше. В отличие от монографии [41] в данной диссертации каждым маятником системы нельзя управлять независимо, что существенно усложняет задачу. Вопрос о полной остановке всех маятников с помощью одного управляющего воздействия, при ограничении на его абсолютную величину, в общем случае ответа пока не имеет. Однако, в частном случае, нам удалось доказать управляемость некоторой системы (см. гл. 3). В остальных случаях мы будем рассматривать не точное, а приближенное управление. Точные определения будут даны ниже. Идея построении приближенного управления состоит в остановке первых $N$ маятников. При этом возмущение, создаваемое остальными осциляторами, оценивается.

Вопрос о полной остановке конечного числа маятников также рассматривается в монографии [41]. Рассмотрим здесь постановку задачи и основные подходы изложенные в гл. 5 данной монографии.

Предлагается способ построения управления в линейной системе при наличии ограничений на управление. Предложенный способ управления представляет собой обобщение известного способа Калмана, распространенного на случай наличия ограничений. Построен в явном виде закон управления системой осциляторов, управляемой одним ограниченным воздействием.

Рассмотрим систему гармонических осциляторов, управляемых посредством скалярного управления

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = u. \tag{12}$$

Здесь $\xi_i$ – обобщенные координаты, постоянные $\omega_i > 0$ – собственные частоты осциляторов, $i = 1, ..., n$, $u$ – скалярное управление, на которое наложено ограничение, т.е. $|u| \leq a$.

В качестве механической модели системы (12) может служить система математических маятников, подвешенных к несущему телу, перемещающемуся горизонтально с ускорением $u$. При этом $\xi_i$ – малые линейные отклонения маятников от точек подвеса, равные $l_i\varphi_i$, где $l_i$ – длина, а $\varphi_i$ – угол отклонения маятника от вертикали.

Другая механическая модель системы (12) представляет собой совокупность масс, присоединенных пружинами к несущему телу. Вся система перемещается поступательно и горизонтально, причем $\xi_i$ – удлинения пружин, $u$ – ускорение тела.

Ставится задача определения управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению по абсолютной величине и переводящего систему (12) из произвольного состояния при $t_0 = 0$

$$\xi_i(0) = \xi_i^0, \quad \dot{\xi}_i(0) = \eta_i^0 \tag{13}$$

в заданное конечное состояние

$$\xi_i(T) = \xi_i^1, \quad \dot{\xi}_i(T) = \eta_i^1 \tag{14}$$

Предполагается, что частоы $\omega_i$ пложительны и различны. Данные частоты пронумерованы в порядке возрастания, причем $\omega_0 = 0$. Введено обозначение

$$\Omega = \min_{0 \leq k \leq n-1} (\omega_{k+1} - \omega_k) > 0, \quad 0 = \omega_0 < \omega_1 < ... < \omega_n.$$

Отмечено также, что при $\Omega > 0$ система (12) вполне управляема. Если же некоторые частоты совпадает, то система становится неуправляемой. Если начальные состояния двух осциляторов с равными частотами различны, то никаким управлением нельзя добиться одновременного гашения колебаний этих двух осциляторов, так как разность фаз их колебаний будет оставаться постоянной.

Искомое управление имеет вид

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i \cos \omega_i t - d_i \sin \omega_i t), \tag{15}$$

где $c_i$ и $d_i$ некоторые числа, явный вид которых приводится в рассматриваемой монографиии.

Приводятся также оценки времени управления, а также приближенное время, необходимое для приведения системы (12) в заданное состояние.

Существенным отличием метода построения управляющего воздействия, приведенного в данной диссертации для системы состоящей из конечного числа маятников, является рассмотрение равных частот $\omega_i$ у разных осциляторов. Управляемость этой системы обусловлена тем, что управление в правой части имеет вид $\int\limits_{\partial\Omega} u(x,t)F_i(x)d\sigma$, где $\{F_i(x)\}$ некоторая система функций на границе области. То есть существует отдельное управление для каждого маятника, но все эти управляющие воздействия связаны между собой. Точные определения и формулы будут даны ниже.

В монографии [4] рассматривается вопрос об управлении колебаниями одномерной струны. Целью управления является приведение струны в состояние покоя за конечное время с помощью ограниченного по норме управляющего воздействия. Управление сосредоточено на концах струны. При этом методы используемые в данной монографии существенно отличаются от изложенных выше. Исходная задача сводится к нахождению решения счетного числа интегральных уравнений, называемых моментами.

Метод моментов является эффективным аппаратом решения проблем оптимального управления линейными системами с распределенными параметрами. Впервые этот метод был описан в монографии [3]. В монографии [4] рассматривается возможность применения метода моментов к решению различных задач оптимального управления.

Приведем теперь основные определения и подходы, используемые в данной теории. Пусть $E$ – некоторое линейное нормированное пространство и в нем задано $n$ линейно независимых элементов $g_1, ..., g_n$. Пусть также имеется линейный функционал $f$, определенный на $E$. Числа

$$\alpha_i = f(g_i), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{16}$$

будем называть моментами функционала $f$ относительно последовательности элементов $g_i$.

Проблема моментов заключается в том, чтобы указать условия, необходимые и достаточные для того, чтобы наперед заданная последовательность чисел $\alpha_i$ была последовательностью моментов функционала $f$ относительно последовательности элементов $g_i$ при условии

$$\|f\| \leq l, \tag{17}$$

где $l$ заранее заданное число.

Сформулированная выше задача называется $l$ – проблемой моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве.

Если число равенств (17) бесконечно, то $l$ – проблема называется бесконечномерной. В противном случае это конечномерная $l$ – проблема моментов.

Приведем теперь без доказательства теоремы, на которых основывается метод моментов.

**Теорема 1.** Для того, чтобы существовало решение бесконечномерной $l$ – проблемы моментов, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение любой конечномерной $l$ – проблемы моментов, которая получается из бесконечномерной проблемы выделением конечного числа моментных равенств.

**Теорема 2.** Для того, чтобы в пространстве $E^*$ (сопряженном с $E$) существовал линейный функционал $f$, норма которого не превосходила бы положительного числа $l$ и последовательность моментов которого относительно элементов $g_1, g_2, ..., g_n$ из нормированного пространства $E$ была $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\inf\limits_{\xi} \|\xi_1 g_1 + ... + \xi_n g_n\|} \leq l,$$

при дополнительном условии

$$\alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_n \xi_n = 1,$$

где $\xi_1, ..., \xi_n$ – некоторые вещественные числа.

Таким образом, чтобы решить произвольную бесконечномерную проблему моментов, нужно решить каждую конечномерную проблему моментов, а затем перейти к пределу.

Покажем теперь, как можно свести задачу оптимального управления колебаниями одномерной струны к соответствующей проблеме моментов.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \tag{18}$$

где $a$ постоянный параметр, а функция $Q = Q(x,t)$ изменение отклонения колеблющейся сосредоточенной в точке $x$ массы от положения ее равновесия в данный момент времени $t$. Колебания струны рассматриваются в пределах ограниченного отрезка $[0, S]$, $0 \leq x \leq S$.

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется некоторое состояние данной струны, описываемое начальными условиями следующего вида

$$Q(x,0) = Q_0(x), \tag{19}$$

$$\frac{\partial Q(x,0)}{\partial t}| = \dot{Q}_0(x). \tag{20}$$

Пусть управляющее воздействие является вектором

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)),$$

компонентами которого являются значения функции $Q$ в точках $x = 0$ и $x = S$, т.е.

$$u_1(t) = Q(0,t), \tag{21}$$

$$u_2(t) = Q(S,t). \tag{22}$$

Каждая компонента вектора $u(t)$ ограничена по норме пространства $L_2(0,T)$, т.е.

$$\|u_i(t)\|_{L_2(0,T)} \leq l, \quad l > 0,$$

где $T$ – время управления.

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: пользуясь управлением $u(t)$, удовлетворяющим условию (21), нужно «успокоить» систему за возможно более короткий промежуток времени $T$.

Далее требуется выполнение условий

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t), \quad \|u(t)\|_{L_2(0,T)} \leq l.$$

Решение волнового уравнения представляется в виде суперпозиции двух функций

$$Q(x,t) = Q_1(x,t) + Q_2(x,t)$$

где функция $Q_1(x,t)$ описывает свободные колебания струны при некоторых начальных условиях, а функция $Q_2(x,t)$ описывает вынужденные колебания, определяющиеся краевыми условиями (19), (20). Следовательно

$$Q_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{\pi k a}{S} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{S} t \right) \sin \frac{\pi k}{S} x, \qquad (23)$$

где

$$A_k = \frac{2}{S} \int\limits_0^S Q_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \qquad (24)$$

$$B_k = \frac{2}{\pi k a} \int\limits_0^S \dot{Q}_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \qquad (25)$$

и

$$Q_2(x,t) = \int\limits_0^t K(x, t-\tau) u(\tau) d\tau, \qquad (26)$$

где

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k}{S} x \sin \frac{\pi k a}{S} t \qquad (26)$$

и

$$C_k = \frac{2a}{S} [1 - (-1)^k]. \qquad (27)$$

Для простоты рассматривается частный случай, когда начальные условия имеют вид

$$Q_0(x) \equiv Q_0, \quad \dot{Q}_0 \equiv 0.$$

При этом из формул (24) и (25) следует

$$A_k = \frac{2Q_0}{\pi k} [1 - (-1)^k], \quad B_k = 0, \qquad (28)$$

а функция $Q_1(x,t)$ примет вид

$$Q_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Q_0}{\pi k} [1 - (-1)^k] \cos \frac{\pi k a}{S} t \sin \frac{\pi k}{S} x. \qquad (29)$$

Условие отсутствия колебаний в момент времени $T$ можно записать на основании формулы (22) в виде

$$Q(x,t) = Q_1(x,T) + Q_2(x,T) = 0, \quad 0 \leq x \leq S, \qquad (30)$$

$$\frac{\partial Q(x,T)}{\partial t} = \frac{\partial Q_1(x,T)}{\partial t} + \frac{\partial Q_2(x,T)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le S. \qquad (31)$$

С учетом формул (29), (25), (26), (27), (28) условие (30) примет вид

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Q_0}{\pi k}[1-(-1)^k]\cos\frac{\pi k a}{S}T\sin\frac{\pi k}{S}x =$$

$$= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{S}[1-(-1)^k]\sin\frac{\pi k}{S}x\sin\left[\frac{\pi k a}{S}(T-\tau)\right]u(\tau)d\tau. \qquad (32)$$

Меняя в (32) порядок интегрирования и суммирования и производя почленное сравнение коэффициентов при независимых функциях $\sin\frac{\pi k}{S}x$, получим систему равенств

$$\frac{Q_0 S}{a\pi k}\cos\frac{\pi k a}{S}T = \int_0^T \sin\frac{\pi k a}{S}(T-t)u(t)dt, \qquad (33)$$

где номер $k$ должен пробегать лишь нечетные целые положительные числа $k = 1, 3, 5, ...$, так как в обеих частях равенства (32) стоит множитель $[1-(-1)^k]$, который обращается в нуль при четных целых $k = 2, 4, 6, ...$ .

Для того, чтобы не только получить нулевое распределение амплитуды колебаний за некоторый минимальный интервал времени, но и обеспечить одновременно нулевое распределение скоростей точек колеблющейся струны, необходима дополнительная система условий. Если будет достигнуто нулевое распределение обоих параметров (отклонения и скорости его изменения) на всем отрезке $[0, S]$ в какой-то момент времени, то полученное состояние равновесия при нулевых граничных условиях будет сохраняться сколь угодно долго.

Второе условие получается из уравнения (31). Дифференцируя равенство (32) по $T$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Q_0 a}{S}[1-(-1)^k]\sin\frac{\pi k a}{S}T\sin\frac{\pi k}{S}x =$$

$$= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a^2\pi k}{S}[1-(-1)^k] \sin\frac{\pi k}{S}x \cos\frac{\pi k a}{S}(T-\tau)u(\tau)d\tau. \qquad (34)$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования и производя почленное сравнение обеих частей этого равенства, приходим к следующей системе уравнений для моментов функции $u(t)$:

$$\frac{Q_0 S}{a\pi k} \sin\frac{\pi k a}{S}T = \int_0^T \cos\frac{\pi k a}{S}(T-t)u(t)dt, \quad k = 1, 3, 5, ... \quad . \qquad (35)$$

Таким образом, поблема оптимального по быстродействию управления, сформулированная выше, сводится к нахождению такого управления $u(t)$, $0 \le t \le T$, удовлетворяющего условию (21), которое обеспечивает выполнение системы равенств (33) и (35) при наименьшем возможном значении параметра $T$.

Система интегральных уравнений (33), (35) решается с помощью метода моментов. В результате искомое управление принимает вид

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t - B_m \cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t.$$

При этом, минимальное время, необходимое для остановки струны равно $\frac{S}{a}$.

В монографии [4] также рассмотрены случаи когда начальные условия являются произвольными функциями, а также, когда на функцию управления наложено ограничение по абсолютной величине. Эта задача также сводится к бесконечномерной проблеме моментов. Доказано, что возможно приведение в состояние покоя за конечное время сколь угодно малым по абсолютной величине управлением.

В гл. 3 данной диссертации исходная задача также будет сведена к решению некоторой бесконечномерной проблемы моментов, но методы, используемые в этом случае, будут существенно отличаться от методов приведенных в монографии [4].

В монографии [28] ставится задача остановки колебаний мембраны и пластины за конечное время с помощью граничных сил, рассматриваются задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л. С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. При этом указанные условия далеко не всегда приводят к конструктивному способу построения оптимального управления.

В обзорной статье [47] приведены результаты полученные различными авторами для задач управления колебаниями мембран и пластин с помощью различных краевых условий, причем в отличие от [28] управляющее воздействие сосредоточено на части границы.

Вопросы управления колебаниями одномерной струны рассматриваются также в работах [14-24, 29,30]. В них для большого промежутка времени $T$ в терминах обобщенного решения волнового уравнения $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ проводится оптимизация семи задач граничного управления (граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором конце, граничного управления смещением на двух концах, граничного управления смещением на одном конце при свободном втором конце, граничного управления упругой силой на одном конце при закрепленном втором конце, граничного управления упругой силой на одном конце при свободном втором конце, граничного управления упругой силой на двух концах и комбинированного граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на втором конце).

Во всех случаях целью управления является построение граничных условий, доставляющих минимум соответствующему рассматриваемой задаче интегралу граничной энергии при наличии некоторых условий связи, получаемых из заданных начальных и краевых условий.

Таким образом существенное отличие результатов, полученных в работах [14-24, 29,30] от [4] состоит в том, что требуется не только привести струну в заданное состояние, но и выбрать среди всех допустимых управляющих воздействий оптимальные. Под оптимальными граничными управлениями подразумеваются такие, которые доставляют минимум некоторому интегральному функционалу.

Приведем здесь основные определения и постановки задач рассмотренные в обзорной работе [16].

**Определением 1.** Обобщенным решением смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{36}$$

в прямоугольнике $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ с заданными начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{37}$$

и с такими краевыми условиями, которые обеспечивают выполнение в финальный момент времени $t = T$ произвольно заданных финальных условий

$$u(x,T) = \hat{\varphi}(x), \quad u_t(x,T) = \hat{\psi}(x) \tag{38}$$

называется функция $u(x,t)$, удовлетворяющая интегральному тождеству, которое соответствует дифференциальной задаче. Рассматривается два типа граничных условий. Первый тип – это условия, задаваемые смещениями

$$u(0,t) = \mu(t) \in W_2^1[0,T], \quad u(l,t) = \nu(t) \in W_2^1[0,T]$$

и второй тип – условия, задаваемые упругими силами

$$u_x(0,t) = \mu(t) \in L_2[0,T], \quad u_x(l,t) = \nu(t) \in L_2[0,T].$$

Требуется найти такие граничные управления, доставляющие минимум интегралу граничной энергии, чтобы обобщенное решение уравнения (36) удолетворяло произвольно заданным начальным условиям (37) и финальным условиям (38).

При этом минимизируемый интеграл граничной энергии имеет вид

$$\int_0^T (\mu'(t))^2 dt \tag{39}$$

в случае граничного управления смещением $u(0,t) = \mu(t)$ на одном конце $x = 0$;

$$\int_0^T (\mu'(t))^2 + (\nu'(t))^2 dt \tag{40}$$

в случае граничных управлений смещениями $u(0,t) = \mu(t)$, $u(l,t) = \nu(t)$ на двух концах $x = 0$ и $x = l$;

$$\int_0^T \mu^2(t) dt \tag{41}$$

в случае граничного управления упругой силой $u_x(0,t) = \mu(t)$ на одном конце $x = 0$;

$$\int_0^T \mu^2(t) + \nu^2(t) dt \tag{42}$$

в случае граничных управлений упругими силами $u_x(0,t) = \mu(t)$, $u_x(l,t) = \nu(t)$ на двух концах $x = 0$ и $x = l$;

$$\int_0^T \mu^2(t) + (\nu'(t))^2 dt \tag{43}$$

в случае комбинированного граничного управления упругой силой $u_x(0,t) = \mu(t)$ на одном конце и смещением $u(l,t) = \nu(t)$ на втором конце $x = l$.

В работе [16] установленно также, что для некоторых задач оптимальные граничные управления зависят не от самих начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из начальных условий (37) и финальных функций $\hat{\varphi}(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ из финальных условий (38), а только от разностей

$$\tilde{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x) - \varphi(x),$$
$$\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) - \psi(x)$$

финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей.

Для некоторых рассмотренных выше интегральных функционалов приведем, согласно [16], искомые управляющие воздействия.

Для интеграла граничной энергии (39):

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t),$$

где $L(t)$ является линейной функцией вида

$$L(t) = \hat{\varphi}(0)\frac{t}{T} + \varphi(0)\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

а добавочный член $\alpha(t)$ является на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодической функцией периода $2l$ и для любого $k = 0, 1, ..., n$ и любого $x$ из сегмента $[0, 2l]$ имеет вид

$$\alpha(2lk + x) = \frac{1}{2(n+1)}\left\{\tilde{\varphi}(0)\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \tilde{\varphi}(x) - \int\limits_0^x \tilde{\psi}(\xi)d\xi\right\}.$$

Для интеграла граничной энергии (40):

$$\mu(t) = L_1(t) + \alpha_1(t), \quad \nu(t) = L_2(t) + \alpha_2(t),$$

где главные члены $L_1(t)$ и $L_2(t)$ являются линейными функциями вида

$$L_1(t) = \hat{\varphi}(0)\frac{t}{T} + \varphi(0)\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad L_2(t) = \hat{\varphi}(l)\frac{t}{T} + \varphi(l)\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

а добавочные члены $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодическими функциями периода $2l$ и для любого

$k = 0, 1, ..., n$ и любого $x$ из сегмента $0 \leq x \leq 2l$ имеют вид

$$\alpha_1(2lk + x) = \frac{\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)}{4l(n+1)}x +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{4(n+1)} \left[ \tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(x) - \int\limits_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right], & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{4(n+1)} \left[ \tilde{\varphi}(0) - 2\tilde{\varphi}(l) + \tilde{\varphi}(2l - x) - \int\limits_0^{2l-x} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right], & l \leq x \leq 2l, \end{cases}$$

$$\alpha_2(2lk + x) = \frac{\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(l)}{4l(n+1)}x +$$

$$+ \begin{cases} \frac{1}{4(n+1)} \left[ \tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(l - x) - \int\limits_{l-x}^{l} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right], & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{4(n+1)} \left[ \tilde{\varphi}(l) - 2\tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(x - l) - \int\limits_{l}^{x-l} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right], & l \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

В интеграле граничной энергии (41) оптимальное граничное управление $u_x(0, t) = \mu(t)$ является на сегменте $[0, T = [0, 4l(n+1)]$ периодической функцией периода $4l$ и для любого $k = 0, 1, ..., n$ и любого $x$ из полусегмента $0 \leq x < 4l$ определяется равенством

$$\mu(4lk + x) = \begin{cases} -\frac{1}{4(n+1)} \left[ \tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x) \right] & 0 \leq x \leq 2l, \\ \frac{1}{4(n+1)} \left[ \tilde{\varphi}'(x - 2l) + \tilde{\psi}(x - 2l) \right] & 2l \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

В работах [26], [27], [28], [44], [47], [48] рассматриваются вопросы точного управления колебаниями плоских мембран и пластин с помощью граничных сил. В отличии от других работ в них не предъявляется явный вид управляющего воздействия, а доказывается лишь его существование. Во всех задачах рассматриваемых в работах [28], [44], [47], [48] на функцию управления накладывается ограничение по норме пространства $L_2$, тогда как в данной диссертации рассматривается ограничение по абсолютной величине. Существенной особенностью данной серии работ является то, что управляющее воздействие сосредоточено не на всей, а лишь на части границы.

Для полноты картины, мы наметим здесь основную идею подхода, используемого в работе [47]. Рассмотрим задачу управления колебаниями плоской мембраны с помощью управления $U(x,t)$. Управление колебаниями такой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \\ \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, \\ \\ y|_{\Sigma_0} = U(x,t), \\ \\ y|_{\Sigma \setminus \Sigma_0} = 0, \end{cases}$$

где $Q_T$ - цилиндр, $\Sigma$ - его боковая поверхность, $\Sigma_0$ - некотороя часть боковой поверхности, $y^0$, $y^1$ - некоторые заданные функции. Свойства $\Sigma_0$, $y^0$, $y^1$ мы здесь не уточняем. Ставится задача о приведении мембраны в состояние покоя за конечное время с помощью граничного управления $U(x,t)$. В данном случае это перемещение мембраны, а не граничная сила, однако для демонстрации идеи метода это не существенно. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \Phi = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \\ \\ \Phi|_{t=0} = \Phi^0, \quad \Phi'_t|_{t=0} = \Phi^1 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \\ \Phi = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \end{cases}$$

Далее рассматривается задача:

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Psi = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \\
\\
\Psi(T,x) = \Psi'_t(T,x) = 0, \\
\\
\Psi = \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \\ \\ 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \backslash \Sigma_0, \end{cases}
\end{cases}
$$

определяется отображение $\Lambda$ пар функций $\Phi^0$ и $\Phi^1$

$$
\{\Phi^0, \Phi^1\} \stackrel{\Lambda}{\longmapsto} \{\Psi'|_{t=0}, -\Psi|_{t=0}\}.
$$

Проблема сводится к нахождению такого элемента $\{\Phi^0, \Phi^1\}$, чтобы $\Lambda\{\Phi^0, \Phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$, т. е. к доказательству обратимости оператора $\Lambda$.

В [46] доказано, что оператор $\Lambda$ обратим при некоторых условиях на часть $\Sigma$ границы области $\Omega$, где заданы управляющие воздействия. Эти условия состоят в следующем: должна существовать такая точка $x_0$ на плоскости, что $\Gamma_0$ есть множество точек границы $\partial\Omega$, которые видны из точки $x_0$ под острым углом, то есть $(\overline{m}_{x_0}, \overline{\nu}) > 0$, где $\overline{m}_{x_0}$ – радиус-вектор, направленный из точки $x_0$ в точку $x \in \Gamma_0$. Положим $R(x_0) = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} (\overline{m}_{x_0}, \overline{\nu})$.

В [46] показано, что время, необходимое для успокоения колебаний, оценивается величиной

$$
T(x_0) := 2R(x_0) + \frac{1}{\lambda_0},
$$

где $\lambda_0$ – первое собственное значение задачи Дирихле в области $\Omega$.

Работа [48] посвящена исследованию вопроса остановки двумерной пластины за конечное время. При этом управляющее воздействие сосредоточено на границе данной пластины. Рассматривается уравнение $y'' + \Delta^2 y = 0$ в области $Q = \Omega \times (0, T)$ и краевые условия $y = v_1, \frac{\partial y}{\partial n} = v_2$ на $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Далее доказывается существование пары функций $(v_1, v_2)$ таких, что для заданных начальных условий решение уравнения будет удовлетворять финальным условиям $y(T) = y'(T) = 0$. Существенной особенностью данной статьи является то, что рассматриваемую пластину можно остановить за сколь угодно малое время, тогда как в упомянутых ранее работах время управления должно быть достаточно большим.

В работах [9-12] решаются задачи гашения колебаний систем, состоящих из нескольких объектов с распределенными параметрами. Эти колебания описываются краевыми задачами с граничными условиями различных типов. В частности, рассматривается задача гашения колебаний системы, которая описывается совокупностью волнового уравнения и обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Функции состояний системы связаны через граничные условия для волнового уравнения.

В работе [32] доказаны теоремы существования гладких решений некоторых задач управления системами, описываемыми уравнениями Навье-Стокса и Эйлера. Доказано, что смешанная краевая задача для уравнений данных уравнений размерности $n \geqslant 3$ однозначно разрешима. Работы [33,34] посвящены доказательству точной локальной управляемости двумерных уравнений Навье-Стокса, определенных в ограниченной области $\Omega$ в случае, когда управление задано на всей границе $\partial\Omega$ либо на некоторой ее части, а также в случае локального распределенного управления.

В работе [13] исследуются линейные управляемые системы гиперболического типа. Рассматривается задача минимизации квадратичного функционала на траекториях системы. На основе метода Фурье задача сводится к изучению оптимальных решений для счетной управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Перейдем к обзору содержания диссертации. Основные результаты содержатся в главах 2, 3, 4.

В **главе 2** рассматривается задача граничного управления колебаниями плоской мембраны. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины. Управляющее воздействие представляет собой условие Неймана, т. е. производную по нормали к границе области. Доказывается, что отклонение положения мембраны от состояния покоя в процессе колебания может быть сведено в достаточно малую окрестность нуля за конечное время. Окрестность нуля в данном случае понимается в смысле нормы соболевского пространства $H^\sigma$. Главным отличием результатов приведенных в данной главе от рассмотренных ранее является то, что управляющее воздействие сосредоточено на границе мембраны и на него наложено ограничение по абсолютной величине. Доказательство теоремы 2 главы 2 содержится в работе [51].

В **главе 3** рассматривается задача граничного управления колебаниями двумерной пластины. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины. Управляющее воздействие представляет собой производную по нормали к границе области от $\Delta y(x,t)$, где $y(x,t)$ решение задачи. Доказывается, что отклонение положения пластины от состояния покоя в процессе колебания может быть сведено в достаточно малую окрестность нуля за конечное время. Окрестность нуля в данном случае понимается в смысле нормы соболевского пространства $H^\sigma$. Главным отличием результатов приведенных в данной главе от рассмотренных ранее является то, что управляющее воздействие сосредоточено на границе пластины и на него наложено ограничение по абсолютной величине. Доказательство теоремы 2 главы 3 содержится в работе [50].

В **главе 4** рассматривается задача точного управления колебаниями прямоугольной пластины. Доказывается возможность полной остановки колебаний пластины за конечное время с помощью сколь угодно малого по абсолютной величине управляющего воздействия. Рассматривается возможность управления двумя краевыми условиями. При этом доказано, что используя два краевых условия можно остановить пластину за меньшее время. Доказательство теоремы 1 главы 4 содержится в работе [49].

Таким образом существенными отличиями данной диссертации от перечисленных выше работ является во первых наличие ограничения на абсолютную величину управляющего воздействия, во вторых явный вид управления. При этом функция управления приложена ко всей границе, во всех рассматриваемых случаях не ставится вопрос об оптимальности процесса управления. Заметим также, что качество приведения в состояние покоя данным методом зависит от геометрии области.

Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Алексею Станиславовичу Шамаеву за постоянное внимание к данной работе и многочисленные обсуждения рассматриваемых в ней вопросов.

Глава 2

# О задаче управления колебаниями плоской мембраны в случае ограничения на абсолютную величину управляющего воздействия

В данной главе рассматривается задача граничного управления колебаниями плоской мембраны. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины.

Мы рассмотрим возможность приведения мембраны в состояние «$\varepsilon$-окрестности» покоя. Точные определения будут даны ниже.

Возможность полной остановки за конечное время в случае распределенного управления доказывается в монографии [41]. Там же дана оценка сверху для оптимального времени управления.

Ранее вопрос об управлении колебаниями плоской мембраны с помощью граничных сил рассматривался многими авторами (например, обзорная статья Ж. Л. Лионса и приведенная в ней литература). В монографии [4] рассматривается задача об остановке колебаний ограниченной струны с помощью граничного управления и доказывается, что возможно за конечное время полностью остановить колебания струны при ограничении на абсолютную величину управляющего воздействия и дается оценка времени, необходимого для полной остановки колебаний. В монографии [28] рассматриваются задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л. С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. При этом указанные условия далеко не всегда приводят к конструктивному способу построения оптимального управления. В обзорной работе

[47] рассматривается задача о полной остановке движения мембраны, доказывается существование такого граничного управления и оценивается время, необходимое для полной остановки колебаний. Здесь авторы во многих постановках задач отказываются от требований оптимальности управления и рассматривают только проблему управления, что существенно облегчает исследование, в работе не рассматриваются задачи с ограничением на абсолютную величину управляющих сил, а также не приводится явных выражений для управляющих воздействий, а только доказываются теоремы существования. В работе [16] проводится оптимизация граничных управлений для различных задач по приведению струны в заданное состояние. Для этих задач оптимальные граничные управления предъявляются в явном аналитическом виде.

Постановка задачи, рассматриваемая в данной диссертации, несколько отличается от рассматриваемой в [28]. Мы не требуем приведения состояния мембраны в полный покой за конечное время и полной остановки колебаний, а только приведения колебаний в «$\varepsilon$-окрестность» состояния покоя. Под «$\varepsilon$-окрестностью», мы понимаем окрестность нуля в соболевском пространстве $H^\sigma(\Omega)$, где $\sigma>0$ – некоторый параметр, а $\Omega$ – область на плоскости, занимаемая мембраной. Параметр $\sigma$, как мы увидим, определяется геометрическими свойствами области $\Omega$. Величина управляющего силового воздействия на границе области должна удовлетворять условию $|u(t,x)|\leq M$, управление должно быть найдено в явной форме. Заметим также, что мы ищем здесь не оптимальное, а некоторое допустимое (удовлетворяющее исходным ограничениям) управление.

Как будет показано ниже задача граничного управления колебаниями плоской мембраны эквивалентна задаче управления счетной системой маятников вида:

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int\limits_{\partial\Omega} P_n(x,t) U(x,t) d\sigma,$$

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \quad n = 1, 2, ...,$$

где $U(x,t)$ – управление, $\{P_n(x,t)\}$ – некоторая заданная система функций.

Пусть $T$ – заданное время управления счетной системой маятников. Требуется найти такое $U(x,t)$, чтобы $T_n(T) = 0$, $T_n'(T) = 0$ для всех $n = 1, 2, ...$ . В данной главе мы построим управление таким образом, чтобы в состояние покоя приходили первые $N$ маятников, а возмущение вызываемое остальными будет оцениваться.

Введем необходимые обозначения и дадим некоторые определения.

Определим, как обычно, пространство С.Л. Соболева $H^s(\Omega)$ (при целом s), как пространство, полученное замыканием множества бесконечно-гладких на $\overline{\Omega}$ функций по норме:

$$\|\varphi\|^2_{H^s(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left( \varphi^2(x) + \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \right) dx.$$

При нецелом $s$, пространство $H^s(R^n)$ определяется как замыкание $S$ (пространство Шварца) по норме:

$$\|\varphi\|^2_{H^s(R^n)} = \int\limits_{R^n_\xi} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Далее определим норму для бесконечно-гладкой функции $\varphi$ в произвольной области $\Omega$:

$$\|\varphi\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\psi=\varphi \text{ на } \partial\Omega} \|\psi\|_{H^s(R^n)}, \quad \psi \in S.$$

Замыкание $C^\infty(\Omega)$ по этой норме обозначим, как обычно, через $H^s(\Omega)$.

Определим пространство $H^s_{\mathfrak{N}}(\Omega)$, «похожее» на пространство $H^s(\Omega)$ . Именно, рассмотрим в области $\Omega$ оператор Лапласа с условием Неймана $\frac{\partial \bullet}{\partial n} = 0$ и систему собственных функций $\{X_i(x)\}$ и собственных значений $\{\lambda_i^2\}$, соответствующих этому оператору и этим краевым условиям. Положим теперь:

$$\|\varphi\|^2_{H^s_{\mathfrak{N}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2s} \varphi_i^2, \quad \text{где} \quad \varphi_i = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) X_i(x) dx.$$

**Определение 1.** Обозначим через $H^\gamma_{\mathfrak{N}}(\Omega)$ замыкание по норме $\|\bullet\|_{H^\gamma(\Omega)}$ множества бесконечно-гладких на $\overline{\Omega}$ функций, удовлетворяющих следующим краевым условиям: если $\gamma \in (0, 1.5)$, то условия отсутствуют, если $\gamma \in (1.5, 3.5)$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, если $\gamma \in (3.5, 5.5)$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} = 0$, и т. д.

Хорошо известен следующий результат, который нами будет существенно использован в дальнейшем:

**Теорема 1.** Множество всех таких функций $u(x)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\gamma} \varphi_i^2$ сходится, совпадает со множеством $H^\gamma_{\mathfrak{N}}(\Omega)$.

Значения $\gamma = 1.5$; $3.5$; $5.5$;... мы не рассматриваем.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – область с гладкой границей; $\{\lambda_i^2\}_0^\infty$, $\{X_i(x)\}_0^\infty$ – системы собственных значений и собственных функций задачи Неймана в области $\Omega$, т.е. $\Delta X_i(x) + \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в $\Omega$, $\frac{\partial X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Обозначим $\langle f, g \rangle := \int\limits_{\partial\Omega} f(x) g(x) dx$ и определим следующие числа:

$$b_{nm}(T) = \frac{1}{2\lambda_n \lambda_m} \langle X_n, X_m \rangle \left( \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_m)T}{\lambda_n + \lambda_m} \right),$$

$$c_{nm}(T) = \frac{1}{2} \langle X_n, X_m \rangle \left( \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_m)T}{\lambda_n + \lambda_m} \right),$$

$$d_{nm}(T) = \frac{1}{2\lambda_n} \langle X_n, X_m \rangle \left( \frac{1 - \cos(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{1 - \cos(\lambda_n + \lambda_m)T}{\lambda_n + \lambda_m} \right),$$

а также числа $\overline{C_i^N}(T)$, $\overline{\overline{C_i^N}}(T)$, как решения линейной системы:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{m=1}^{N}\left(b_{nm}\overline{C_m^N}+d_{nm}\overline{\overline{C_m^N}}\right)=A_n^{(1)}(T), \quad (n=1,...,N),\\
\\
\sum\limits_{m=1}^{N}\left(d_{nm}\overline{C_m^N}+c_{nm}\overline{\overline{C_m^N}}\right)=A_n^{(2)}(T), \quad (n=1,...,N),
\end{cases}
\tag{1}
$$

где

$$
A_n^{(1)}(T)=\varphi_n\cos(\lambda_n T)+\tfrac{\psi_n}{\lambda_n}\sin(\lambda_n T),
$$
$$
A_n^{(2)}(T)=-\lambda_n\varphi_n\sin(\lambda_n T)+\psi_n\cos(\lambda_n T).
$$

Заметим, что в случае $\lambda_n=\lambda_m$, выражения $\frac{\sin(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m}$, $\frac{1-\cos(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m}$ следует понимать в смысле предела $|\lambda_n-\lambda_m|\to 0$.

**Лемма 1.** Система (1) разрешима при достаточно большом $T$ и числа $\overline{C_i^N}(T)$, $\overline{\overline{C_i^N}}(T)$ стремятся к нулю при $T\longrightarrow\infty$.

**Доказательство:** Из определения чисел $b_{nm}$, $c_{nm}$, $d_{nm}$ следует, что матрица $A_N(T)$ системы (1) имеет вид $A_N(T)=A_N^0(T)+B_N(T)$, где $A_N^0(T)$ – диагональная матрица вида:

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2\lambda_1^2}\langle X_1,X_1\rangle T & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0\\
0 & \frac{1}{2\lambda_2^2}\langle X_2,X_2\rangle T & \dots\dots\dots\dots & 0\\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ 0 & & \frac{1}{2}\langle X_{N-1},X_{N-1}\rangle T & 0\\
0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & \frac{1}{2}\langle X_N,X_N\rangle T
\end{pmatrix}
$$

а все компоненты матрицы $B_N(T)$ ограниченны. Следовательно имеет место неравенство $\|B_N(T)\|\le const$, где $const$ не зависит от $T$. Обозначим $\bar{x}=\{\overline{C_i^N}(T),\overline{\overline{C_i^N}}(T)\}$ и пусть $x_1,x_2,...,x_{2N}$ - компоненты вектора $\bar{x}$, а $a_1^0T,a_2^0T,...,a_{2N}^0T$ - диагональные компоненты матрицы $A_N^0(T)$. Пусть также $\|\bar{x}\|=\sum\limits_{i=1}^{2N}|x_i|$. Тогда получим $\|A_N^0(T)\bar{x}\|=\sum\limits_{i=1}^{2N}|a_i^0Tx_i|\ge\sum\limits_{i=1}^{2N}\min\limits_i(|a_i^0|T)|x_i|=CT\sum\limits_{i=1}^{2N}|x_i|=CT\|\bar{x}\|$, где $C=\min\limits_i(|a_i^0|)$. Пусть $b$ - правая часть системы (1). Следовательно:

$$
CT\|\bar{x}\|\le\|A_N^0(T)\bar{x}\|=\|b+B_N(T)\bar{x}\|\le\|b\|+\|B_N(T)\bar{x}\|\le
$$

$$\leq \|b\| + \|B_N(T)\|\|\bar{x}\| \leq \|b\| + const\|\bar{x}\|.$$

Далее

$$\|\bar{x}\| \leq \frac{\|b\|}{CT - const}, \quad const > 0 \quad \text{не зависит от } T.$$

Из последнего соотношения при $T \longrightarrow \infty$ получаем утверждение леммы.

**Определение 2.** Функция $y(x,t)$ из $L_2(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$ называется слабым решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = P(x,t), \end{cases}$$

если для любой пробной гладкой функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество:

$$\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_\Omega (\varphi\Theta'_t - \psi\Theta)_{t=0}^{t=T} dx + \int\limits_\Sigma P(x,t)\Theta(x,t)d\Sigma,$$

где $\Theta(x,t)$ – классическое решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T, \\ \Theta|_{t=T} = \Theta'_t|_{t=T} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial n}|_\Sigma = 0. \end{cases}$$

**Лемма 2.** Пусть $P(x,t)$ – некоторая функция из $L_2(\Sigma)$ и $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Определим функцию $T_n(t)$ как решение дифференциального уравнения $T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int\limits_{\partial\Omega} X_n(x)P(x,t)d\sigma$, с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n = (\varphi, X_n)$, $T_n'(0) = \psi_n = (\psi, X_n)$, а также положим $y_N(x,t) := \sum\limits_{n=0}^{N} X_n(x)T_n(t)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ \\ y_t'|_{t=0} = \psi(x), \\ \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = P(x,t). \end{cases}$$

Решение данной задачи понимается в смысле определения 2.

**Доказательство.** Возьмем функцию, определенную как решение задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T, \\ \\ \frac{\partial \Theta}{\partial n}|_\Sigma = 0. \end{cases}$$

С помощью интегрирования по частям получаем:

$$\iint\limits_{Q_T} y_N(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Theta(x,t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y_N(x,t)\Theta(x,t)dxdt =$$

$$= \int\limits_\Omega (y_N\Theta_t' - (y_N)_t'\Theta)_{t=0}^{t=T} dx + \iint\limits_\Sigma y_N \frac{\partial \Theta}{\partial n} - \frac{\partial y_N}{\partial n}\Theta d\Sigma.$$

Последний интеграл в правой части обращается в нуль, так как $\frac{\partial\Theta}{\partial n}|_\Sigma = 0$, а $y_N(x,t)$ – конечная комбинация собственных функций, нормальная производная которых, обращается в нуль на границе. Тогда получаем:

$$\iint\limits_{Q_T} y_N(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_\Omega (\varphi\Theta_t' - \psi\Theta)_{t=0}^{t=T} dx +$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt,$$

поскольку:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)y_N(x,t)=\sum_{n=0}^{N}\left(T_n''(t)+\lambda_n^2T_n(t)\right)X_n(x)=\sum_{n=0}^{N}f_n(t)X_n(x).$$

Рассмотрим теперь интеграл $\iint\limits_{Q_T}\sum\limits_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt$. Имеем:

$$\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_T}X_n(x)\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{\partial\Omega}X_n(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_i(t)X_i(x)dxdt=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\Theta_i(t)\int\limits_{\Omega}X_n(x)X_i(x)dx\int\limits_{\partial\Omega}X_n(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt.$$

Используя ортогональность собственных функций, получим:

$$\iint\limits_{Q_T}y_N(x,t)\xi(x,t)dxdt=\int\limits_{\Omega}\left(y_N\Theta_t'-(y_N)_t'\Theta\right)_{t=0}^{t=T}dx+\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt.$$

С другой стороны:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)\left(\int\limits_{\partial\Omega}X_i(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\right)dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\left(\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)X_i(\widetilde{x})\right)P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}dt=\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\Theta(\widetilde{x},t)P(\widetilde{x},t)d\Sigma.$$

Таким образом мы доказали, что $y_N(x,t)$ сходится при $N\to\infty$ в пространстве обобщенных функций к обобщенному решению задачи:

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0, T), \\
y|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \\
y'_t|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), \\
\frac{\partial y}{\partial n}|_{\Sigma} = P(x,t).
\end{cases} \tag{2}
$$

При этом обобщенное решение понимается следующим образом: $\forall \xi(x,t)$ выполнено интегральное тождество:

$$
\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_{\Omega} (\varphi\Theta'_t - \psi\Theta)_{t=0}^{t=T} dx + \iint\limits_{\Sigma} P(x,t)\Theta(x,t)d\Sigma,
$$

где $\Theta(x,t)$ – решение следующей задачи, которая называется транспонированной:

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T, \\
\Theta|_{t=T} = \Theta'_t|_{t=T} = 0, \\
\frac{\partial \Theta}{\partial n}|_{\Sigma} = 0.
\end{cases}
$$

Следующая теорема представляет собой главный результат настоящей главы. Утверждение теоремы 2 состоит в оценке решения задачи о колебании мембраны при некотором специальном граничном управлении.

**Теорема 2.** Пусть $\varphi \in H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$, $\psi \in H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$ и функция $y(x,t)$

является решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = U_N(x,t), \end{cases} \tag{3}$$

где $U_N(t,T,x) = \sum_{s=1}^N \left(\overline{C_s^N}(T)\frac{\sin\lambda_s(T-t)}{\lambda_s} + \overline{\overline{C_s^N}}(T)\cos\lambda_s(T-t)\right) X_s(x)$ при $t < T$ и $U_N \equiv 0$ при $t \geq T$, $T = const > 0$. Тогда имеет место оценка:

$$\|y(x,T)\|^2_{H^\sigma(\Omega)} \leq C \left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|, |\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2 A(N)B(N) +$$

$$+ \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^\alpha_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-\alpha+\sigma}, \tag{4}$$

где $\delta > 0$ – положительная постоянная, число $\sigma$ определяется из условия сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma}$, а величины $A(N)$, $B(N)$ определяются равенствами

$$A(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma},$$

$$B(N) = \left(\sum_{s=1}^N \|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)^2.$$

**Доказательство.** Применим для решения задачи (3) представление в виде ряда, полученного в лемме 2. Его можно интерпретировать как суперпозицию колебаний системы маятников:

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) =$$

$$= \sum_{s=1}^N \left(\overline{C_s^N}(T)\frac{\sin\lambda_s(T-t)}{\lambda_s} + \overline{\overline{C_s^N}}(T)\cos\lambda_s(T-t)\right) \langle X_s(x), X_n(x)\rangle .$$

Решение этого уравнения при $t = T$ будет иметь вид:

$$T_n(T) = \varphi_n \cos\lambda_n T + \frac{\psi_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n T +$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{2\lambda_n\lambda_s}\overline{C_s^N}(T)\left(\frac{\sin(\lambda_n-\lambda_s)T}{\lambda_n-\lambda_s}-\frac{\sin(\lambda_n+\lambda_s)T}{\lambda_n+\lambda_s}\right)\langle X_s(x),X_n(x)\rangle -$$

$$-\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{2\lambda_n}\overline{\overline{C_s^N}}(T)\left(\frac{\cos(\lambda_n-\lambda_s)T}{\lambda_n-\lambda_s}+\frac{\cos(\lambda_n+\lambda_s)T}{\lambda_n+\lambda_s}\right)\langle X_s(x),X_n(x)\rangle +$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{2\lambda_n}\overline{\overline{C_s^N}}(T)\left(\frac{1}{\lambda_n-\lambda_s}+\frac{1}{\lambda_n+\lambda_s}\right)\langle X_s(x),X_n(x)\rangle .$$

В силу определения чисел $\overline{C_i^N}$, $\overline{\overline{C_i^N}}$ получим, что $T_n(T) = 0$ при $n = 1, 2, ..., N$, следовательно имеем:

$$\sum_{n=1}^{N} X_n(x)T_n(T) = 0.$$

Оценим величину $|T_n(T)|$:

$$|T_n(T)| \le |\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{|\lambda_n|} +$$

$$+\frac{1}{|\lambda_n|}\frac{\max\limits_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|,|\overline{\overline{C_s^N}}|\}}{|\lambda_N-\lambda_n|}\left(\sum_{s=1}^{N}\|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)\|X_n\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Далее оценим величину $S_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} T_n(T)X_n(x)$:

$$\|S_N\|^2 := \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} T_n(T)X_n(x)\right\|^2_{H^\sigma(\Omega)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} T_n^2(T)\lambda_n^{2\sigma}.$$

Далее

$$\|S_N\|^2 \le \|S_N^1\|^2 + \|S_N^2\|^2,$$

$$\text{где}\quad S_N^1 = \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{|\lambda_n|}\right)$$

$$\text{и}\quad S_N^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\frac{\max\limits_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|,|\overline{\overline{C_s^N}}|\}}{|\lambda_N-\lambda_n|}\left(\sum_{s=1}^{N}\|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)\|X_n\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Тогда

$$\|S_N^2\|^2 \le \left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|, |\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2 \times$$

$$\times \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^{2\sigma}}{|\lambda_n|^2|\lambda_N - \lambda_n|^2} \left(\sum_{s=1}^{N} \|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)^2 \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \le$$

$$\le C\left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|, |\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2 A(N)B(N).$$

В последней оценке мы воспользовались хорошо известной теоремой об асимптотике собственных значений задачи Неймана для оператора Лапласа на плоской ограниченной области: $\lambda_n \approx n^{\frac{1}{2}}$. Напомним, что величина $\sigma$ определяется здесь сходимостью ряда $\sum\limits_n \frac{\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)}}{n^{2-\sigma}}$.

Теперь нужно оценить $\|S_N^1\|^2$. Имеем:

$$\|S_N^1\|^2 \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|\varphi_n|^2 + \frac{|\psi_n|^2}{|\lambda_n|^2}\right) \lambda_n^{2\sigma}.$$

Далее установим оценки для величин $|\varphi_n|$ и $|\psi_n|$. Для этого нам потребуется следующая простая лемма.

**Лемма 3.** Пусть $\varphi \in H_{\mathfrak{N}}^{1+\alpha}(\Omega)$, $\psi \in H_{\mathfrak{N}}^{\alpha}(\Omega)$. Тогда $|\varphi_k| \le \frac{\|\varphi\|_{H_{\mathfrak{N}}^{1+\alpha}(\Omega)}}{|\lambda_k|^{1+\alpha}}$, $\frac{|\psi_k|}{|\lambda_k|} \le \frac{\|\psi\|_{H_{\mathfrak{N}}^{\alpha}(\Omega)}}{|\lambda_k|^{1+\alpha}}$. При этом $H_{\mathfrak{N}}^{1+\alpha}(\Omega)$ понимается в смысле определения 1.

**Доказательство.** Имеем

$$\|\varphi\|^2_{H_{\mathfrak{N}}^{1+\alpha}(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2(1+\alpha)}\varphi_n^2 \ge \lambda_k^{2(1+\alpha)}\varphi_k^2,$$

$$\|\psi\|^2_{H_{\mathfrak{N}}^{\alpha}(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha}\psi_n^2 \ge \lambda_k^{2\alpha}\psi_k^2.$$

Откуда немедленно следует утверждение леммы.

На основании оценок для $|\varphi_n|$, $|\psi_n|$, получаем:

$$\|S_N^1\|^2 \le \left(\|\varphi\|^2_{H_{\mathfrak{N}}^{1+\alpha}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H_{\mathfrak{N}}^{\alpha}(\Omega)}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{2\sigma}||\lambda_n|^{-2-2\alpha} \le$$

$$\leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2-2\alpha+2\sigma} \leq$$

$$\leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-1-\alpha+\sigma} \leq$$

$$\leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-\alpha+\sigma}.$$

Следовательно:

$$\|S_N\|^2_{H^{\sigma}(\Omega)} \leq C \left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C^N_s}|, |\overline{\overline{C^N_s}}|\}\right)^2 A(N)B(N) +$$

$$+ \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-\alpha+\sigma}.$$

Теорема доказана.

Приведем теперь несколько примеров. Рассмотрим три типа мембраны: квадратную, круглую и произвольной формы. Оценим для них число $\sigma$ из теоремы 1, которое определяется из условия сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma}$.

**Пример 1 (квадратная мембрана).** Не ограничивая общности будем считать длину ребра квадрата равной единице. Тогда собственные функции оператора Лапласа в квадратной области будут иметь вид:

$$X^k_i = \cos(\pi i x)\cos(\pi k y) \quad i = 1, 2, ...; \quad k = 1, 2, ....$$

Очевидно, что $\|X^k_i\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq 1 \quad i = 1, 2, ...; \quad k = 1, 2, ...$ . Следовательно, нумеруя последовательность $X^k_i$ одним индексом $n$ в соответствии с ростом собственных значений получим

$$\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq 1 \quad n = 1, 2, ....$$

Таким образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+\sigma}.$$

Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы $2 - \sigma > 1$. Следовательно $\sigma < 1$.

**Пример 2 (круглая мембрана).** Не ограничивая общности будем рассматривать круглую мембрану с радиусом единица. Собственные функции нашей задачи будут иметь вид (см. [4]):

$$X_n^m = \frac{J_n(\mu_n^m r)e^{in\varphi}}{\sqrt{\int\limits_0^1 rJ_n(\mu_n^m r)dr}}, \quad m, n = 1, 2, ...,$$

где $J_n$ - функция Бесселя с индексом $n$, $\mu_n^m$ - $m$-й нуль $n$-й функции Бесселя, $r, \varphi$ - полярные координаты. Получим оценку на норму собственной функции. Согласно [6] имеет место тождество:

$$\int\limits_0^1 rJ_n(\mu_n^m r)dr = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n^2}{(\mu_n^m)^2}\right) J_n^2(\mu_n^m),$$

а также согласно [5] справедлива следующая асимптотика:

$$\mu_n^1 = n + 0,2574\pi n^{\frac{1}{3}} + o(n^{\frac{1}{3}}).$$

Тогда

$$\frac{J_n^2(\mu_n^m)}{\int\limits_0^1 rJ_n(\mu_n^m r)dr} = \frac{2}{\left(1 - \frac{n^2}{(\mu_n^m)^2}\right)} \leq \frac{2}{\left(1 - \frac{n^2}{(\mu_n^1)^2}\right)} \leq C\frac{2}{\left(1 - \frac{n^2}{n^2 + \alpha n^{\frac{1}{3}} n}\right)} \leq$$

$$\leq C_1 \frac{n^2 + \alpha n^{\frac{1}{3}} n}{\alpha n n^{\frac{1}{3}}} \leq C_2 n^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом получаем оценку $\|X_n^m\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq Cn^{\frac{2}{3}}$.

В нашей задаче (радиус мембраны равен единице) все собственные значения равны квадратам корней функций Бесселя. Упорядочим собственные функции в соответствии с ростом собственных значений.

Теперь найдем связь между идексом n и индексом глобальной нумерации (нумерации после упорядочения), который мы обозначим через $j$.

Возьмем произвольный индекс $j$. Пусть $n(j)$ максимальный номер бесселевой функции, содержащей нули среди первых $j$ нулей. Согласно [5] функция Бесселя $J_{n(j)}$ среди этих нулей будет содержать один нуль, функция $J_{n(j)-1}$ два нуля и т. д. Суммируя арифметическую прогрессию, получим, что индексы $j$ и $n(j)$ связаны соотношением $j = Cn^2(j)$. Поставим в соответствие индексу $j$ пару индексов $(m(j), n(j))$. Следовательно получим

$$\|X_j\|^2_{L_2(\partial\Omega)} = \|X^{m(j)}_{n(j)}\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq Cn^{\frac{2}{3}}(j) = C_1 j^{\frac{1}{3}},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|X_j\|^2_{L_2(\partial\Omega)} j^{-2+\sigma} \leq C_1 \sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{1}{3}} j^{-2+\sigma}.$$

Этот ряд сходится, если $-\frac{1}{3} + 2 - \sigma > 1$. Следовательно $\sigma < \frac{2}{3}$.

**Пример 3 (произвольная мембрана).** Возьмем собственную функцию $X_i$. Оценим квадрат ее нормы в $L_2(\partial\Omega)$. По теореме о следах

$$\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq \|X_n\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)}, \quad \text{причем} \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим подпространство $L = span\{X_i\}_1^{\infty}$ – линейная оболочка всех собственных функций, за исключением $X_0$. Известно, что сумма ряда $\sum \lambda_k^{2s} \varphi_k^2$ задает норму на $L$, эквивалентную норме исходного соболевского пространства $H^s(\Omega)$. Таким образом:

$$\|X_n\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)} = \lambda_n^{1+2\varepsilon}.$$

Воспользуемся теперь теоремой об асимптотике собственных значений задачи Неймана для оператора Лапласа: $\lambda_n \approx n^{\frac{1}{2}}$:

$$\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq Cn^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot n^{-2+\sigma}.$$

Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы $-\frac{1}{2}-\varepsilon+2-\sigma > 1$. Следовательно $\sigma < \frac{1}{2}$.

Покажем теперь, как с помощью теоремы 2 можно построить управление, удовлетворяющее ограничениям и приводящее систему в $\varepsilon$ – окрестность состояния покоя по норме пространства $H^\sigma(\Omega)$. Выберем $\sigma > 0$ так, чтобы сходились соответствующие ряды, затем $\alpha > 0$ так, чтобы $-\alpha + \sigma < 0$, затем $N$ так, чтобы второе слагаемое в оценке (4) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ – наперед заданное малое число. Теперь, на основании леммы 1, выберем $T > 0$, так, чтобы первое слагаемое в (4) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и чтобы было выполнено исходное ограничение на абсолютную величину функции $U_N(x,t)$: $|U_N(x,t)| \leq M$. Тогда функция $U_N(x,t)$ и будет искомым управлением, приводящим систему в $\varepsilon$ – окрестность нуля по норме пространства $H^\sigma(\Omega)$.

Глава 3

# Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил

В данной главе рассматривается задача управления колебаниями пластины с ограничением на абсолютную величину управляющего воздействия. Целью управления является приведение пластины в состояние т. н. «$\varepsilon$ – окрестности» покоя за конечное время. Точные определения будут даны ниже. Аналогичные задачи рассматривались ранее в работах многих российских и зарубежных авторов. В работе [47] приведен обзор результатов по проблемам граничной управляемости систем с распределенными параметрами, монография [28] посвящена проблемам оптимального управления такими системами. В работе [48] рассматривается задача на приведение пластины в состояние покоя за сколь угодно малое время без ограничения на управляющее воздействие. В [4] доказано существование ограниченного на абсолютную величину граничного управления, приводящего струну в состояние покоя. В работе [16] проводится оптимизация граничных управлений для различных задач по приведению струны в заданное состояние. Для этих задач оптимальные граничные управления предъявляются в явном аналитическом виде. В монографии [7] изучена задача приведения в состояние покоя систем с распределенными параметрами с помощью ограниченных по абсолютной величине и распределенных по объему управляющих воздействий.

Как и в предыдущей главе мы не требуем приведения состояния пластины в полный покой за конечное время и полной остановки колебаний, а только приведения колебаний в «$\varepsilon$-окрестность» состояния покоя. Под «$\varepsilon$-окрестностью», мы понимаем окрестность нуля в соболевском пространстве $H^\sigma(\Omega)$, где $\sigma>0$ – некоторый параметр, а $\Omega$ – область на плоскости, занимаемая мембраной. Параметр $\sigma$, как мы увидим, определяется геометрическими свойствами области $\Omega$. Величина управляющего силового воздействия на границе области должна удовлетворять условию $|u(t,x)|\leq M$, управление должно быть найдено в явной форме. Заметим также, что мы ищем здесь как и ранее не оптимальное, а некоторое допустимое (удовлетворяющее исходным ограничениям) управление.

Аналогично главе 1 задача граничного управления колебаниями пластины эквивалентна задаче управления счетной системой маятников вида:

$$T_n''(t)+\lambda_n^2T_n(t)=\int\limits_{\partial\Omega}P_n(x,t)U(x,t)d\sigma,$$

$$T_n(0)=\varphi_n,\quad T_n'(0)=\psi_n\quad n=1,2,...,$$

где $U(x,t)$ – управление, $\{P_n(x,t)\}$ – некоторая заданная система функций.

Пусть $T$ – заданное время управления счетной системой маятников. Требуется найти такое $U(x,t)$, чтобы $T_n(T)=0$, $T_n'(T)=0$ для всех $n=1,2,...$ . В данной главе мы построим управление таким образом, чтобы в состояние покоя приходили первые $N$ маятников, а возмущение вызываемое остальными будет оцениваться.

Определим, как обычно, пространство С.Л. Соболева $H^s(\Omega)$ (при целом s), как пространство, полученное замыканием множества бесконечно-гладких на $\overline{\Omega}$ функций по норме:

$$\|\varphi\|^2_{H^s(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\left(\varphi^2(x)+\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha\varphi(x)|^2\right)dx.$$

При нецелом $s$, пространство $H^s(R^n)$ определяется как замыкание $S$ (пространство Шварца) по норме:

$$\|\varphi\|^2_{H^s(R^n)} = \int\limits_{R^n_\xi} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Далее определим норму для функции $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$:

$$\|\varphi\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\psi=\varphi \text{ на } \partial\Omega} \|\psi\|_{H^s(R^n)}, \quad \psi \in S.$$

Здесь и далее $\Omega$ – ограниченная область с гладкой границей. Взяв замыкание $C^\infty(\overline{\Omega})$ по этой норме, получим пространство $H^s(\Omega)$.

Определим также пространство $H^s_{\mathfrak{N}}(\Omega)$, «похожее» на пространство $H^s(\Omega)$ . Именно, рассмотрим в области $\Omega$ бигармонический оператор $\Delta^2$ с краевыми условиями на $\partial\Omega$: $\frac{\partial(\bullet)}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial\Delta(\bullet)}{\partial n} = 0$. Введем также систему собственных функций $\{X_i(x)\}$ и собственных значений $\{\lambda_i^2\}$, соответствующих этому оператору и этим краевым условиям. Заметим, что к рассмотрению принимаются все собственные значения, начиная с ненулевого. Положим теперь:

$$\|\varphi\|^2_{H^s_{\mathfrak{N}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2s}\varphi_i^2, \quad \text{где} \quad \varphi_i = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)X_i(x)dx.$$

**Определение 1.** Обозначим через $H^\gamma_{\mathfrak{N}}(\Omega)$ замыкание по норме $\|\bullet\|_{H^\gamma(\Omega)}$ множества бесконечно-гладких на $\overline{\Omega}$ функций, удовлетворяющих следующим краевым условиям: если $\gamma \in (0, 1.5)$, то условия отсутствуют, если $\gamma \in (1.5, 3.5)$, то $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, если $\gamma \in (3.5, 5.5)$, то $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} = 0$, если $\gamma \in (5.5, 7.5)$, то $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial\Delta^2\varphi}{\partial n} = 0$ и т. д.

Для дальнейшего, нам потребуется следующая известная теорема (см. [46]).

**Теорема 1.** Множество всех таких функций $u(x)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{2\gamma}\varphi_i^2$ сходится, совпадает со множеством $H^\gamma_{\mathfrak{N}}(\Omega)$.

Значения параметра $\gamma = 1.5$; $3.5$; $5.5$;... мы не рассматриваем. Мы приводим здесь эту известную теорему без доказательства.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей; $\{\lambda_i^2\}_0^\infty$, $\{X_i(x)\}_0^\infty$ – системы собственных значений и собственных функций задачи Неймана в области $\Omega$, т.е. $\Delta^2 X_i(x) - \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в $\Omega$, $\frac{\partial X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \Delta X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Заметим, что в данном случае рассматриваются все собственные значения, включая нулевое ($\lambda_0 = 0$). Система собственных функций, определенная выше является полной в $L_2(\Omega)$, так как она совпадает с системой собственных функций в задаче Неймана для оператора Лапласа.

**Определение 2.** Функция $y(x,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ называется слабым решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = R(x,t), \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial n}|_\Sigma = P(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

если для любой гладкой пробной функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество:

$$\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_\Omega (\varphi\Theta'_t - \psi\Theta)|_{t=0}dx -$$

$$- \int\limits_\Sigma P(x,t)\Theta(x,t)d\Sigma - \int\limits_\Sigma R(x,t)\Delta\Theta(x,t)d\Sigma,$$

где $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ и $\Theta(x,t)$ – классическое решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)\Theta(x,t)=\xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T, \\
\\
\Theta|_{t=T}=\Theta'_t|_{t=T}=0, \\
\\
\frac{\partial\Theta}{\partial n}|_\Sigma=\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial n}|_\Sigma=0.
\end{cases} \tag{2}
$$

**Лемма 1.** Пусть $P(x,t)$ – некоторая функция из $L_2(\Sigma)$ и $R(x,t)\in H^2(\Sigma)$, $\varphi\in H^1(\Omega)$, $\psi\in L_2(\Omega)$. Определим функцию $T_n(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$
T''_n(t)+\lambda_n^2T_n(t)=\int\limits_{\partial\Omega}X_n(x)P(x,t)d\sigma+\int\limits_{\partial\Omega}\Delta X_n(x)R(x,t)d\sigma,
$$

с начальными условиями: $T_n(0)=\varphi_n=(\varphi,X_n)$, $T'_n(0)=\psi_n=(\psi,X_n)$, а также положим $y_N(x,t):=\sum\limits_{n=0}^{N}X_n(x)T_n(t)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи (1).

**Доказательство.** Возьмем функцию, определенную как решение задачи (2). С помощью интегрирования по частям получаем:

$$
\iint\limits_{Q_T}y_N(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)\Theta(x,t)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)y_N(x,t)\Theta(x,t)dxdt=
$$

$$
=\int\limits_{\Omega}(y_N\Theta'_t-(y_N)'_t\Theta)|_{t=0}dx-\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial y_N}{\partial n}\Delta\Theta+y_N\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial n}d\Sigma-
$$

$$
-\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\Delta y_N}{\partial n}\Theta+\Delta y_N\frac{\partial\Theta}{\partial n}d\Sigma.
$$

Два интеграла в правой части обращаются в нуль, так как $\frac{\partial\Theta}{\partial n}|_\Sigma=\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial n}|_\Sigma=0$, а $y_N(x,t)$ – конечная комбинация собственных функций, таких что: $\frac{\partial X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega}=\frac{\partial\Delta X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0$ . Тогда

$$
\iint\limits_{Q_T}y_N(x,t)\xi(x,t)dxdt=\int\limits_{\Omega}(y_N\Theta'_t-(y_N)'_t\Theta)|_{t=0}dx+
$$

$$
+\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=0}^{N}(g_n(t)-f_n(t))X_n(x)\Theta(x,t)dxdt,
$$

в силу равенства:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)y_N(x,t)=\sum_{n=0}^{N}\left(T_n''+\lambda_n^2T_n\right)X_n(x)=\sum_{n=0}^{N}(g_n(t){-}f_n(t))X_n(x),$$

где $\quad f_n(t)=\int\limits_{\partial\Omega}X_n(x)P(x,t)d\sigma,\quad g_n(t)=\int\limits_{\partial\Omega}\Delta X_n(x)R(x,t)d\sigma.$

Рассмотрим интеграл $\iint\limits_{Q_T}\sum\limits_{n=0}^{N}f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt$. Пусть $\Theta_i(t)=\int\limits_{\Omega}\Theta(x,t)X_i(x)dx$. Тогда:

$$\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=0}^{N}f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_T}X_n(x)\sum_{n=0}^{N}\int\limits_{\partial\Omega}X_n(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\sum_{i=0}^{\infty}\Theta_i(t)X_i(x)dxdt=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\Theta_i(t)\int\limits_{\Omega}X_n(x)X_i(x)dx\int\limits_{\partial\Omega}X_n(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt.$$

С другой стороны:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)\left(\int\limits_{\partial\Omega}X_i(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\right)dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\left(\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)X_i(\widetilde{x})\right)P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}dt=\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\Theta(\widetilde{x},t)P(\widetilde{x},t)d\Sigma.$$

Рассмотрим теперь другой интеграл $\iint\limits_{Q_T}\sum\limits_{n=0}^{N}g_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt$. Имеем:

$$\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=0}^{N}g_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt=$$

$$= \iint\limits_{Q_T} X_n(x) \sum_{n=0}^{N} \int\limits_{\partial\Omega} \Delta X_n(\widetilde{x}) R(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i(t) X_i(x) dx dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \Theta_i(t) \int\limits_{\Omega} X_n(x) X_i(x) dx \int\limits_{\partial\Omega} \Delta X_n(\widetilde{x}) R(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) g_i(t) dt.$$

С другой стороны:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) g_i(t) dt = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) \left( \int\limits_{\partial\Omega} \Delta X_i(\widetilde{x}) R(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \right) dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \left( \sum_{i=0}^{N} \Theta_i(t) \Delta X_i(\widetilde{x}) \right) R(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \Delta\Theta(\widetilde{x}, t) R(\widetilde{x}, t) d\Sigma.$$

Осталось рассмотреть интеграл $\int\limits_{\Omega} (y_N \Theta'_t - (y_N)'_t \Theta)|_{t=0} dx$. В силу выбора начальных условий для функции $T_n(t)$ получим:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Omega} (y_N \Theta'_t - (y_N)'_t \Theta)|_{t=0} dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Omega} \sum_{n=0}^{N} X_n(x) \varphi_n \Theta'_t(x, 0) - \sum_{n=0}^{N} X_n(x) \psi_n \Theta(x, 0) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (\varphi \Theta'_t - \psi \Theta)|_{t=0} dx.$$

Таким образом мы доказали, что $y_N(x, t)$ сходится при $N \to \infty$ в пространстве обобщенных функций к обобщенному решению задачи (1). Лемма доказана.

Обозначим $< f, g > := \int\limits_{\partial\Omega} f(x) g(x) d\sigma$ и определим следующие числа:

$$b_{nm}(T) = \frac{1}{2\lambda_n \lambda_m} < X_n, X_m > \left( \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_m)T}{\lambda_n + \lambda_m} \right),$$

$$c_{nm}(T) = \frac{1}{2} < X_n, X_m > \left( \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_m)T}{\lambda_n + \lambda_m} \right),$$

$$d_{nm}(T) = \frac{1}{2\lambda_n} < X_n, X_m > \left( \frac{1-\cos(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{1-\cos(\lambda_n + \lambda_m)T}{\lambda_n + \lambda_m} \right),$$

а также числа $\overline{C_i^N}(T)$, $\overline{\overline{C_i^N}}(T)$, как решения линейной системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{N} \left( b_{nm}\overline{C_m^N} + d_{nm}\overline{\overline{C_m^N}} \right) = A_n^{(1)}(T), \quad (n = 1, ..., N), \\ \\ \sum\limits_{m=1}^{N} \left( d_{nm}\overline{C_m^N} + c_{nm}\overline{\overline{C_m^N}} \right) = A_n^{(2)}(T), \quad (n = 1, ..., N), \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$A_n^{(1)}(T) = \varphi_n \cos(\lambda_n T) + \tfrac{\psi_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n T),$$
$$A_n^{(2)}(T) = -\lambda_n \varphi_n \sin(\lambda_n T) + \psi_n \cos(\lambda_n T).$$

Заметим, что в случае $\lambda_n = \lambda_m$, выражения $\frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m}$, $\frac{1-\cos(\lambda_n - \lambda_m)T}{\lambda_n - \lambda_m}$ следует понимать в смысле предела $|\lambda_n - \lambda_m| \to 0$.

**Лемма 2.** Числа $\overline{C_i^N}(T)$, $\overline{\overline{C_i^N}}(T)$ стремятся к нулю при $T \longrightarrow \infty$. **Доказательство:** Из определения чисел $b_{nm}$, $c_{nm}$, $d_{nm}$ следует, что матрица $A_N(T)$ системы (1) имеет вид $A_N(T) = A_N^0(T) + B_N(T)$, где $A_N^0(T)$ – диагональная матрица вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda_1^2}\langle X_1, X_1\rangle T & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\lambda_2^2}\langle X_2, X_2\rangle T & \dots\dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\ 0 & & \frac{1}{2}\langle X_{N-1}, X_{N-1}\rangle T & 0 \\ 0 & \dots\dots & 0 & \frac{1}{2}\langle X_N, X_N\rangle T \end{pmatrix}$$

а все компоненты матрицы $B_N(T)$ ограниченны. Следовательно имеет место неравенство $\|B_N(T)\| \le const$, где $const$ не зависит от $T$. Обозначим $\bar{x} = \{\overline{C_i^N}(T), \overline{\overline{C_i^N}}(T)\}$ и пусть $x_1, x_2, ..., x_{2N}$ - компоненты вектора $\bar{x}$, а $a_1^0T, a_2^0T, ..., a_{2N}^0T$ - диагональные компоненты матрицы $A_N^0(T)$. Пусть также $\|\bar{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{2N} |x_i|$. Тогда получим $\|A_N^0(T)\bar{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{2N} |a_i^0 T x_i| \ge \sum\limits_{i=1}^{2N} \min\limits_i(|a_i^0|T)|x_i| = CT\sum\limits_{i=1}^{2N} |x_i| = CT\|\bar{x}\|$, где $C = \min\limits_i(|a_i^0|)$. Пусть $b$ - правая часть системы (1). Следовательно:

$$CT\|\bar{x}\| \leq \|A_N^0(T)\bar{x}\| = \|b + B_N(T)\bar{x}\| \leq \|b\| + \|B_N(T)\bar{x}\| \leq$$

$$\leq \|b\| + \|B_N(T)\|\|\bar{x}\| \leq \|b\| + const\|\bar{x}\|.$$

Далее

$$\|\bar{x}\| \leq \frac{\|b\|}{CT - const}, \quad const > 0 \quad \text{не зависит от } T.$$

Отсюда, очевидно, следует утверждение леммы.

Следующая теорема представляет главный результат данной главы.

**Теорема 2.** Пусть $\varphi \in H_{\mathfrak{N}}^{1+\alpha}(\Omega)$, $\psi \in H_{\mathfrak{N}}^{\alpha}(\Omega)$ и функция $y(x,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = 0, \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial n}|_\Sigma = U_N(x,t), \end{cases} \tag{4}$$

где $U_N(t,T,x) = \sum_{s=1}^N \left(\overline{C_s^N}(T)\frac{\sin\lambda_s(T-t)}{\lambda_s} + \overline{\overline{C_s^N}}(T)\cos\lambda_s(T-t)\right) X_s(x)$ при $t < T$ и $U_N \equiv 0$ при $t \geq T$, $T = const > 0$. Тогда имеет место оценка:

$$\|y(x,T)\|^2_{H^\sigma_{\mathfrak{N}}(\Omega)} \leq C\left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|, |\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2 A(N)B(N) +$$

$$+ \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^\alpha_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-2\alpha+2\sigma}, \tag{5}$$

где $\delta > 0$ – положительная постоянная, число $\sigma \in (0, 1.5)$ определяется из условия сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+2\sigma}$, а величины $A(N)$, $B(N)$ определяются равенствами

$$A(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+2\sigma},$$

$$B(N) = \left( \sum_{s=1}^{N} \|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)} \right)^2 .$$

**Доказательство.** Применим для решения задачи (3) представление в виде ряда, полученного в лемме 2. Его можно интерпретировать как суперпозицию колебаний системы маятников:

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) =$$
$$= \sum_{s=1}^{N} \left( \overline{C_s^N}(T) \frac{\sin \lambda_s (T-t)}{\lambda_s} + \overline{\overline{C_s^N}}(T) \cos \lambda_s (T-t) \right) \langle X_s(x), X_n(x) \rangle .$$

Решение этого уравнения при $t = T$ будет иметь вид:

$$T_n(T) = \varphi_n \cos \lambda_n T + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n T +$$
$$+ \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2\lambda_n \lambda_s} \overline{C_s^N}(T) \left( \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_s)T}{\lambda_n - \lambda_s} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_s)T}{\lambda_n + \lambda_s} \right) \langle X_s(x), X_n(x) \rangle -$$
$$- \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2\lambda_n} \overline{\overline{C_s^N}}(T) \left( \frac{\cos(\lambda_n - \lambda_s)T}{\lambda_n - \lambda_s} + \frac{\cos(\lambda_n + \lambda_s)T}{\lambda_n + \lambda_s} \right) \langle X_s(x), X_n(x) \rangle +$$
$$+ \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2\lambda_n} \overline{\overline{C_s^N}}(T) \left( \frac{1}{\lambda_n - \lambda_s} + \frac{1}{\lambda_n + \lambda_s} \right) \langle X_s(x), X_n(x) \rangle .$$

За счет приведенного выше определения чисел $\overline{C_i^N}$, $\overline{\overline{C_i^N}}$ получим, что $T_n(T) = 0$ при $n = 1, 2, ..., N$, следовательно имеем:

$$\sum_{n=1}^{N} X_n(x) T_n(T) = 0.$$

Оценим величину $|T_n(T)|$:

$$|T_n(T)| \le |\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{|\lambda_n|} +$$

$$+\frac{1}{|\lambda_n|}\frac{\max\limits_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|,|\overline{\overline{C_s^N}}|\}}{|\lambda_N-\lambda_n|}\left(\sum_{s=1}^{N}\|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)\|X_n\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Оценим также величину $S_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}T_n(T)X_n(x)$:

$$\|S_N\|^2:=\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}T_n(T)X_n(x)\right\|^2_{H^\sigma_{\mathfrak{N}}(\Omega)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}T_n^2(T)\lambda_n^{2\sigma}.$$

Далее

$$\|S_N\|^2\le\|S_N^1\|^2+\|S_N^2\|^2,$$

$$\text{где}\quad S_N^1=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|\varphi_n|+\frac{|\psi_n|}{|\lambda_n|}\right),$$

$$S_N^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\frac{\max\limits_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|,|\overline{\overline{C_s^N}}|\}}{|\lambda_N-\lambda_n|}\left(\sum_{s=1}^{N}\|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)\|X_n\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Тогда:

$$\|S_N^2\|^2\le\left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|,|\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\lambda_n|^{2\sigma}}{|\lambda_n|^2|\lambda_N-\lambda_n|^2}\times$$

$$\times\left(\sum_{s=1}^{N}\|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)^2\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\le$$

$$\le C\left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|,|\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2A(N)B(N).$$

В последней оценке мы воспользовались асимптотикой собственных значений для оператора $\Delta^2$ на плоской ограниченной области: $\lambda_n\asymp n$. Величина $\sigma$ определяется здесь сходимостью ряда $\sum\limits_{n}\frac{\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)}}{n^{4-2\sigma}}$.

Теперь нужно оценить $\|S_N^1\|^2$. Имеем:

$$\|S_N^1\|^2\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(|\varphi_n|^2+\frac{|\psi_n|^2}{|\lambda_n|^2}\right)\lambda_n^{2\sigma}.$$

Далее установим оценки для $|\varphi_n|$ и $|\psi_n|$. Для этого нам потребуется следующая очевидная лемма.

**Лемма 3.** Пусть $\varphi \in H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$, $\psi \in H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$. Тогда $|\varphi_k| \leq \frac{\|\varphi\|_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}}{|\lambda_k|^{1+\alpha}}$, $\frac{|\psi_k|}{|\lambda_k|} \leq \frac{\|\psi\|_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}}{|\lambda_k|^{1+\alpha}}$. При этом $H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$ понимается в смысле определения 1.

**Доказательство.**

$$\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2(1+\alpha)} \varphi_n^2 \geq \lambda_k^{2(1+\alpha)} \varphi_k^2,$$

$$\|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} \psi_n^2 \geq \lambda_k^{2\alpha} \psi_k^2.$$

Дальнейшее очевидно.

На основании оценок для $|\varphi_n|$, $|\psi_n|$, получаем:

$$\|S^1_N\|^2 \leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{2\sigma}||\lambda_n|^{-2-2\alpha} \leq$$

$$\leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2-2\alpha+2\sigma} \leq$$

$$\leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2-2\alpha+2\sigma} \leq$$

$$\leq \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-2\alpha+2\sigma}.$$

Следовательно:

$$\|S_N\|^2_{H^{\sigma}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} \leq C \left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C^N_s}|, |\overline{\overline{C^N_s}}|\}\right)^2 A(N)B(N)+$$

$$+ \left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-2\alpha+2\sigma}.$$

Теорема доказана.

Используем полученный результат для доказательства возможности приведения в «$\varepsilon$ – окрестность» покоя пластины произвольной формы с помощью ограниченных по абсолютной величине граничных управляющих воздействий. Посчитаем число $\sigma$ из теоремы 1, которое определяется из условия сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+2\sigma}$.

Возьмем собственную функцию $X_i$. Оценим квадрат ее нормы в $L_2(\partial\Omega)$. По теореме о следах имеем:

$$\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \le C(\delta)\|X_n\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega)}, \quad \delta > 0 - \text{произвольная постоянная.}$$

Рассмотрим подпространство $L = span\{X_i\}_1^\infty$ – линейная оболочка всех собственных функций, за исключением $X_0$. Известно, что сумма ряда $\sum \lambda_k^{2s}\varphi_k^2$ задает норму на $L$, эквивалентную норме исходного соболевского пространства $H^s(\Omega)$. Таким образом:

$$\|X_n\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega)} \le C\lambda_n^{1+2\delta}.$$

Поскольку $\lambda_n \asymp n$, при $n \to \infty$, имеем:

$$\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \le C_1 n^{1+2\delta},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+2\sigma} \le C_1(\delta) \sum_{n=1}^{\infty} n^{1+2\delta} \cdot n^{-4+2\sigma}.$$

Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы $-1-2\delta+4-2\sigma > 1$. Следовательно $\sigma < 1-\delta < 1$.

Выберем теперь $\alpha > \sigma$ и $N$ так, чтобы второе слагаемое в правой части (5) было меньше $\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ заданное наперед малое число. Далее, выберем величину $T > 0$ так, чтобы первое слагаемое в правой части (5) было также меньше $\varepsilon/2$ (это возможно сделать в силу леммы 2). Теперь, увеличивая снова величину $T$ (если это действительно нужно), удовлетворим условию $|U_N(t,T,x)| < M$, где $M$ – величина ограничения на граничное управляющее воздействие.

Таким образом, путем явно заданного граничного управления можно привести начальные колебания пластины в состояние $\varepsilon$ – окрестности покоя по норме пространства $H^\sigma$, где $\sigma$ – число, меньшее единицы.

Посчитаем теперь параметр $\sigma$ для прямоугольной и круглой пластин.

**Пример 1 (квадратная пластина).** Не ограничивая общности будем считать длину ребра квадрата равной единице. Тогда собственные функции оператора Лапласа возведенного в квадрат в квадратной области будут иметь вид:

$$X_i^k = \cos(\pi i x)\cos(\pi k y) \quad i = 1, 2, ...; \quad k = 1, 2, ....$$

Очевидно, что $\|X_i^k\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq 1 \quad i = 1, 2, ...; \quad k = 1, 2, ...$ . Следовательно, нумеруя последовательность $X_i^k$ одним индексом $n$ в соответствии с ростом собственных значений получим

$$\|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq 1 \quad n = 1, 2, ....$$

Таким образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+2\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4+2\sigma}.$$

Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы $4 - 2\sigma > 1$. Следовательно $\sigma < 1.5$.

**Пример 2 (круглая пластина).** Не ограничивая общности будем рассматривать круглую пластину с радиусом единица. Собственные функции нашей задачи будут иметь точно такой же вид как и в главе 1:

$$X_n^m = \frac{J_n(\mu_n^m r)e^{in\varphi}}{\sqrt{\int\limits_0^1 r J_n(\mu_n^m r)dr}}, \quad m, n = 1, 2, ...,$$

где $J_n$ - функция Бесселя с индексом $n$, $\mu_n^m$ - $m$-й нуль $n$-й функции Бесселя, $r, \varphi$ - полярные координаты.

Проводя рассуждения аналогичные рассуждениям в предыдущей главе получим:

$$\|X_j\|^2_{L_2(\partial\Omega)} = Cj^{\frac{1}{3}},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|X_j\|^2_{L_2(\partial\Omega)} j^{-4+2\sigma} \leq C \sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{1}{3}} j^{-4+2\sigma}.$$

Этот ряд сходится, если $-\frac{1}{3} + 4 - 2\sigma > 1$. Следовательно $\sigma < \frac{7}{6}$.

Глава 4

# Точное управление колебаниями прямоугольной пластины с помощью граничных сил

В данной главе рассматривается задача управления колебаниями прямоугольной пластины с ограничением на абсолютную величину управляющего воздействия. В отличие от рассмотренных выше задач, целью управления является приведение пластины в состояние покоя за конечное время с помощью граничного управления. Доказывается также, что колебания пластины можно остановить с помощью сколь угодно малой по абсолютной величине силы. При этом указывается явный вид управляющего воздействия.

Как и в предыдущих главах задача сводится к проблеме управления счетной системой маятников вида:

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int\limits_{\partial\Omega} P_n(x,t)U(x,t)d\sigma,$$

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n \quad n = 1, 2, ...,$$

где $U(x,t)$ – управление, $\{P_n(x,t)\}$ – некоторая заданная система функций.

Пусть $T$ – заданное время управления счетной системой маятников. Требуется найти такое $U(x,t)$, чтобы $T_n(T) = 0$, $T_n'(T) = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$ . В предыдущих главах мы строили управление таким образом, чтобы в состояние покоя приходили первые $N$ маятников, а возмущение вызываемое остальными оценивалось. Здесь же будет построено управление останавливающее всю счетную систему маятников.

Заметим, что мы будем рассматривать задачу на управление не в общем случае, когда пластина представляет собой произвольную ограниченную область. Объектом управления будет прямоугольная пластина, длины сторон которой являются рациональными числами.

Как уже упоминалось ранее, задачи об управлении пластинами и мембранами в случаях граничного и распределенного во всей поверхности управления тесно связаны с управлением счетными системами маятников. При этом, в случае распределенного управления, для каждого маятника существует собственное управляющее воздействие, что существенно упрощает задачу. В нашем случае вся система маятников управляется с помощью только одной функции $U(x,t)$.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей; $\{\lambda_i^2\}_1^\infty$, $\{X_i(x)\}_1^\infty$ – системы собственных значений и собственных функций задачи Дирихле в области $\Omega$, т.е. $\Delta^2 X_i(x) - \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в $\Omega$, $X_i|_{\partial\Omega} = \Delta X_i|_{\partial\Omega} = 0$. Система собственных функций, определенная выше является полной в $L_2(\Omega)$, так как она совпадает с системой собственных функций в задаче Дирихле для оператора Лапласа.

**Определение 1.** Функция $y(x,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ называется слабым решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ y|_\Sigma = R(x,t), \\ \Delta y|_\Sigma = P(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

если для любой гладкой пробной функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество:

$$\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_{\Omega} (\varphi\Theta_t' - \psi\Theta)|_{t=0}dx +$$

$$+\int\limits_{\Sigma} P(x,t)\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial n}d\Sigma + \int\limits_{\Sigma} R(x,t)\frac{\partial\Delta\Theta(x,t)}{\partial n}d\Sigma,$$

где $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ и $\Theta(x,t)$ – классическое решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right)\Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T, \\ \Theta|_{t=T} = 0, \\ \Theta_t'|_{t=T} = 0, \\ \Theta|_{\Sigma} = 0, \\ \Delta\Theta|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

**Лемма 1.** Пусть $P(x,t)$ – некоторая функция из $H_1(\Sigma)$ и $R(x,t) \in H^3(\Sigma)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Определим функцию $T_n(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_n(x)}{\partial n}P(x,t)d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta X_n(x)}{\partial n}R(x,t)d\sigma,$$

с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n = (\varphi, X_n)$, $T_n'(0) = \psi_n = (\psi, X_n)$, а также положим $y_N(x,t) := \sum\limits_{n=1}^{N} X_n(x)T_n(t)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи (1).

**Доказательство.** Возьмем функцию, определенную как решение задачи (2). С помощью интегрирования по частям получаем:

$$\iint\limits_{Q_T} y_N(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)\Theta(x,t)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)y_N(x,t)\Theta(x,t)dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}(y_N\Theta'_t-(y_N)'_t\Theta)|_{t=0}dx-\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial y_N}{\partial n}\Delta\Theta+y_N\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial n}d\Sigma-$$

$$-\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\Delta y_N}{\partial n}\Theta+\Delta y_N\frac{\partial\Theta}{\partial n}d\Sigma.$$

Два интеграла в правой части обращаются в нуль, так как $\Theta|_\Sigma=\Delta\Theta|_\Sigma=0$, а $y_N(x,t)$ – конечная комбинация собственных функций, таких что: $X_i|_{\partial\Omega}=\Delta X_i|_{\partial\Omega}=0$ . Тогда

$$\iint\limits_{Q_T} y_N(x,t)\xi(x,t)dxdt=\int\limits_{\Omega}(y_N\Theta'_t-(y_N)'_t\Theta)|_{t=0}dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=1}^{N}(-g_n(t)-f_n(t))X_n(x)\Theta(x,t)dxdt,$$

в силу равенства:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta^2\right)y_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}\left(T''_n+\lambda_n^2T_n\right)X_n(x)=\sum_{n=1}^{N}(-g_n(t)-f_n(t))X_n(x),$$

где

$$f_n(t)=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}P(x,t)d\sigma,$$

$$g_n(t)=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta X_n(x)}{\partial n}R(x,t)d\sigma.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\iint\limits_{Q_T}\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt$. Имеем:

$$\iint\limits_{Q_T}\sum_{n=1}^{N}f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_T}X_n(x)\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial X_n(\widetilde{x})}{\partial n}P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\sum_{i=1}^{\infty}\Theta_i(t)X_i(x)dxdt=$$

$$= \int\limits_0^T \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \Theta_i(t) \int\limits_{\Omega} X_n(x) X_i(x) dx \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_n(\widetilde{x})}{\partial n} P(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(t) f_i(t) dt.$$

С другой стороны:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(t) f_i(t) dt = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(t) \left( \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_i(\widetilde{x})}{\partial n} P(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \right) dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \left( \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(t) \frac{\partial X_i(\widetilde{x})}{\partial n} \right) P(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Theta(\widetilde{x}, t)}{\partial n} P(\widetilde{x}, t) d\Sigma.$$

Последнее равенство верно, так как нормаль $n = (n_t, n_x)$ к $\Sigma$ в нашей задаче очевидно имеет вид: $n = (0, n_x)$, следовательно, используя гладкость функции $\Theta$ получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(t) X_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial (\Theta_i(t) X_i(x))}{\partial n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \Theta_i(t)}{\partial t} X_i(x) \cdot n_t +$$

$$+ \Theta_i(t) \frac{\partial X_i(x)}{\partial x} \cdot n_x = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(t) \frac{\partial X_i(x)}{\partial x} \cdot n_x = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(t) \frac{\partial X_i(x)}{\partial n}.$$

Далее рассмотрим другой интеграл $\iint\limits_{Q_T} \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(t) X_n(x) \Theta(x, t) dx dt$. Имеем:

$$\iint\limits_{Q_T} \sum_{n=1}^{N} g_n(t) X_n(x) \Theta(x, t) dx dt =$$

$$= \iint\limits_{Q_T} X_n(x) \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta X_n(\widetilde{x})}{\partial n} R(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(t) X_i(x) dx dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \Theta_i(t) \int\limits_{\Omega} X_n(x) X_i(x) dx \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta X_n(\widetilde{x})}{\partial n} R(\widetilde{x}, t) d\sigma_{\widetilde{x}} \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(t) g_i(t) dt.$$

С другой стороны:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T \sum_{i=1}^N \Theta_i(t) g_i(t)dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T \sum_{i=1}^N \Theta_i(t) \left( \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta X_i(\widetilde{x})}{\partial n} R(\widetilde{x},t) d\sigma_{\widetilde{x}} \right) dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \left( \sum_{i=1}^N \Theta_i(t) \frac{\partial \Delta X_i(\widetilde{x})}{\partial n} \right) R(\widetilde{x},t) d\sigma_{\widetilde{x}} dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta \Theta(\widetilde{x},t)}{\partial n} R(\widetilde{x},t) d\Sigma.$$

Последнее равенство верно, так как:

$$\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial n} = \frac{\partial \Delta}{\partial n} \sum_{i=1}^\infty \Theta_i(t) X_i(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \frac{\partial \Delta(\Theta_i(t)X_i(x))}{\partial n} = \sum_{i=1}^\infty \frac{\partial \Theta_i(t)}{\partial t} \Delta X_i(x) \cdot n_t + \Theta_i(t) \frac{\partial \Delta X_i(x)}{\partial x} \cdot n_x =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \Theta_i(t) \frac{\partial \Delta X_i(x)}{\partial x} \cdot n_x = \sum_{i=1}^\infty \Theta_i(t) \frac{\partial \Delta X_i(x)}{\partial n}.$$

Осталось рассмотреть интеграл $\int\limits_\Omega (y_N \Theta_t' - (y_N)_t' \Theta)|_{t=0} dx$. В силу выбора начальных условий для функции $T_n(t)$ получим:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega (y_N \Theta_t' - (y_N)_t' \Theta)|_{t=0} dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega \sum_{n=1}^N X_n(x) \varphi_n \Theta_t'(x,0) - \sum_{n=1}^N X_n(x) \psi_n \Theta(x,0) dx =$$

$$= \int\limits_\Omega (\varphi \Theta_t' - \psi \Theta)|_{t=0} dx.$$

Таким образом мы доказали, что $y_N(x,t)$ сходится при $N \to \infty$ в пространстве обобщенных функций к обобщенному решению задачи (1).

Пусть $T_k$ – время управления. Определим числа:

$$b'_n(T_k) = -(\lambda_n \varphi_n \cos(\lambda_n T_k) + \psi_n \sin(\lambda_n T_k)), \quad n = 1, 2, \dots \quad .$$

$$b''_n(T_k) = \lambda_n \varphi_n \sin(\lambda_n T_k) - \psi_n \cos(\lambda_n T_k), \quad n = 1, 2, \dots \quad .$$

**Теорема 1.** Пусть $\Omega = (0;\pi) \times (0;\pi)$, $T_k = 2\pi k$, где $k = 1, 2...$, $\varphi \in C^4(\Omega)$ и $\varphi = \Delta\varphi = 0$ на $\partial\Omega$, $\psi \in C^3(\Omega)$, $\psi = 0$ на $\partial\Omega$ и функция $y(x,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0, T_k), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ y|_{\Sigma} = 0, \\ \Delta y|_{\Sigma} = U(x,t), \end{cases} \tag{3}$$

$$U(x, T_k, t) = -\frac{2}{T_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\| \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}} (b'_n(T_k) \sin \lambda_n t + b''_n(T_k) \cos \lambda_n t) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n}$$

при $t < T_k$ и $U \equiv 0$ при $t \geq T_k$, $T_k = const > 0$. Тогда $y(x, T_k) = y'_t(x, T_k) = 0$.

**Доказательство.** Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений:

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} U(x,t) d\sigma,$$

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T'_n(0) = \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad .$$

Запишем решения этих уравнений при $n = 1, 2, \dots$ :

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t - \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} U(x,s) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \sin \lambda_n (t-s) d\sigma ds.$$

Используя условия $T_n(T) = 0$, $T_n'(T) = 0$ при всех $n = 1, 2, ...$ получим:

$$\begin{cases} b_n'(T_k) = -\int\limits_0^{T_k}\int\limits_{\partial\Omega} U(x, T_k, s)\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}\sin\lambda_n s d\sigma ds, \quad n = 1, 2, ... \quad , \\ \\ b_n''(T_k) = -\int\limits_0^{T_k}\int\limits_{\partial\Omega} U(x, T_k, s)\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}\cos\lambda_n s d\sigma ds, \quad n = 1, 2, ... \quad . \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) представляет собой упоминаемую ранее систему моментов. Общая теория решения проблемы моментов рассматривается в монографии [4]. Там же данная теория применяется к решению задачи управления колебаниями одномерной струны. Для решения проблемы моментов (4) мы будем использовать метод отличный от изложенных в монографии [4].

Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа возведенного в квадрат в нашей задаче имеют вид:

$$X_{mn} = \sin(mx)\sin(ny), \quad \lambda_{mn}^2 = (m^2 + n^2)^2, \quad m, n = 1, 2, ... \quad .$$

Систему (4) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} b_{mn}'(T_k) = -\int\limits_0^{T_k}\int\limits_{\partial\Omega} U(x, y, T_k, s)\frac{\partial X_{mn}(x)}{\partial n}\sin(\lambda_{mn}s) d\sigma ds, \\ m, n = 1, 2, ... \quad , \\ \\ b_{mn}''(T_k) = -\int\limits_0^{T_k}\int\limits_{\partial\Omega} U(x, y, T_k, s)\frac{\partial X_{mn}(x)}{\partial n}\cos(\lambda_{mn}s) d\sigma ds, \\ m, n = 1, 2, ... \quad . \end{cases} \tag{5}$$

По лемме (1) доказательство данной теоремы эквивалентно нахождению функции $U(x, y, T_k, s)$, которая доставляла бы равенство всей счетной системе интегральных уравнений (5).

Рассмотрим счетую систему функций:

$$\left\{\frac{\partial X_{mn}(x, y)}{\partial n}\sin\lambda_{mn}t, \frac{\partial X_{mn}(x, y)}{\partial n}\cos\lambda_{mn}t\right\}, \quad n, m = 1, 2, ... \quad . \tag{6}$$

Данную систему будем рассматривать на множестве $\partial\Omega \times (0, T_k)$. На этом множестве рассмотрим также еще одну счетную систему функций:

$$\frac{2}{T_k \left\| \frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n} \right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}} \left\{ \frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n} \sin \lambda_{mn} t, \frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n} \cos \lambda_{mn} t \right\},$$

$$n, m = 1, 2, \dots \quad . \tag{7}$$

**Лемма 2.** Система функций (7) является биортогональной к системе функций (6).

**Доказательство.** Рассмотрим число $\lambda_{mn}$ при любых индексах $m$ и $n$. Очевидно, данное число является натуральным. В системах (6) и (7) возьмем по одной функции соответствующей этому числу. Вычисляя скалярное произведение между двумя этими функциями и учитывая нормирующий множитель $\frac{2}{T_k \left\| \frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n} \right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}}$, получим единицу.

Рассмотрим теперь два числа $\lambda_{m_1n_1}$ и $\lambda_{m_2n_2}$, причем $m_1 \neq m_2$ и $n_1 \neq n_2$. В системе (6) возьмем функцию соответствующую $\lambda_{m_1n_1}$, а в системе (7) соответствующую $\lambda_{m_2n_2}$. Скалярно перемножим эти функции. Если $\lambda_{m_1n_1}$ и $\lambda_{m_2n_2}$ различны, то учитывая, что по переменной $t$ интегрирование ведется по интервалу $(0, T_k)$, где $T_k = 2\pi k$, в скалярном произведении получим нуль.

Пусть теперь числа $\lambda_{m_1n_1}$ и $\lambda_{m_2n_2}$ совпадают. Это возможно, так как собственные значения содержат кратные точки. Снова возьмем соответствующие функции из систем (6) и (7). Скалярное произведение между ними будет равно нулю, так как $X_{mn} = \sin(mx)\sin(ny)$ и нетрудно проверить, что:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_{m_1n_1}}{\partial n} \frac{\partial X_{m_2n_2}}{\partial n} d\sigma = 0 \quad m_1 \neq m_2, \quad n_1 \neq n_2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим функцию:

$$U(x,T_k,t)=-\frac{2}{T_k}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}}(b'_{mn}(T_k)\sin(\lambda_{mn}t)+$$

$$+b''_{mn}(T_k)\cos(\lambda_{mn}t))\frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}. \qquad (8)$$

Подставляя функцию (8) в (5) и используя лемму 2 видим, что $U(x,T_k,t)$ является решением данной системы интегральных уравнений.

После упорядочивания собственных значений по возрастанию, функция (8) примет вид:

$$U(x,T_k,t)=-\frac{2}{T_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}}(b'_n(T_k)\sin\lambda_n t+$$

$$+b''_n(T_k)\cos\lambda_n t)\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}. \qquad (9)$$

Покажем, что ряд (9) сходится абсолютно.
$\left\|\frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)} = 2\pi-2+(-1)^m+(-1)^n, \quad m,n=1,2,\ldots$ .
Следовательно:

$$\frac{1}{\left\|\frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}}\le\frac{1}{2\pi-4}, \quad m,n=1,2,\ldots \quad .$$

Таким образом:

$$|U(x,T_k,t)|\le\frac{2}{T_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi-4}(|b'_n(T_k)|+|b''_n(T_k)|)\le$$

$$\le\frac{4}{(2\pi-4)T_k}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n|\varphi_n|+|\psi_n|). \qquad (10)$$

Согласно [41], выбор начальных данных в теореме 1 обеспечивает сходимость ряда (10). Теорема доказана.

Из оценки (10) следует, что увеличивая время $T_k$ колебания пластины можно остановить с помощью сколь угодно малой по абсолютной величине силы.

Получим теперь оценку снизу для времени управления. Пусть изначально функция управляющего воздействия была ограничена по модулю:

$$|U(x,t)| \leq M.$$

Выберем $T_k$ таким, чтобы было выполнено неравенство:

$$\frac{4}{(2\pi - 4)T_k} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n |\varphi_n| + |\psi_n|) \leq M. \tag{11}$$

Используя оценку (11) получим:

$$T_k \geq \frac{4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda_n |\varphi_n| + |\psi_n|)}{M(2\pi - 4)}. \tag{12}$$

Результат полученный в теореме 1 остается верным в случае когда длины сторон пластины являются произвольными рациональными числами. Пусть $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $c_2 = \frac{a_2}{b_2}$ длины сторон пластины, где $a_1, a_2, b_1, b_2$ натуральные числа, тогда собственные значения в нашей задаче будут иметь вид:

$$\lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{c_1^2} + \frac{n^2}{c_2^2} \right)^2, \quad m, n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Время управления выберем равным

$$T_k = 2 a_1^2 a_2^2 k, \quad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Проводя доказательство аналогичное изложенному выше, получим требуемое.

В теореме 1 управление колебаниями проводилось с помощью только одного краевого условия. Покажем теперь, что управляя двумя условиями, также можно остановить пластину за конечное время. При этом начальные возмущения $\varphi$ и $\psi$ следует выбирать из более широких классов функций.

**Теорема 2.** Пусть $\Omega = (0; \pi) \times (0; \pi)$, $T_k = 2\pi k$, где $k = 1, 2 \ldots,$, $\varphi \in C^3(\Omega)$ и $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$, $\psi \in C^2(\Omega)$, $\psi = 0$ на $\partial\Omega$ и функция

$y(x,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0, T_k), \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \\ y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ y|_\Sigma = U(x,t), \\ \Delta y|_\Sigma = U(x,t), \end{cases} \tag{13}$$

$$U(x, T_k, t) = -\frac{2}{T_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\| \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}} (b'_n(T_k) \sin \lambda_n t + b''_n(T_k) \cos \lambda_n t) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n}$$

при $t < T_k$ и $U \equiv 0$ при $t \geq T_k$, $T_k = const > 0$. Тогда $y(x, T_k) = y'_t(x, T_k) = 0$.

**Доказательство.** Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений:

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} U(x,t) d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta X_n(x)}{\partial n} U(x,t) d\sigma,$$

$$T_n(0) = \varphi_n, \quad T'_n(0) = \psi_n, \quad n = 1, 2, ... \quad .$$

Так как $\Delta X_n = \lambda_n X_n$ получим:

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = -(1 + \lambda_n) \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} U(x,t) d\sigma.$$

Запишем решения этих уравнений при $n = 1, 2, ...$ :

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t -$$

$$-\frac{1 + \lambda_n}{\lambda_n} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} U(x,s) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \sin \lambda_n (t - s) d\sigma ds.$$

Используя условия $T_n(T) = 0$, $T'_n(T) = 0$ при всех $n = 1, 2, ...$ получим:

$$\begin{cases} b_n'(T_k) = -(1+\lambda_n) \int\limits_0^{T_k} \int\limits_{\partial\Omega} U(x, T_k, s) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \sin \lambda_n s d\sigma ds, \\ n = 1, 2, \dots \quad , \\ \\ b_n''(T_k) = -(1+\lambda_n) \int\limits_0^{T_k} \int\limits_{\partial\Omega} U(x, T_k, s) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \cos \lambda_n s d\sigma ds, \\ n = 1, 2, \dots \quad . \end{cases} \tag{14}$$

Для решения системы интегральных уравнений (14) будем применять метод изложенный в теореме 1.

Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа возведенного в квадрат в нашей задаче имеют вид:

$$X_{mn} = \sin(mx)\sin(ny), \quad \lambda_{mn}^2 = (m^2+n^2)^2, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad .$$

Систему (14) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} b_{mn}'(T_k) = -(1+\lambda_{mn}) \int\limits_0^{T_k} \int\limits_{\partial\Omega} U(x, y, T_k, s) \frac{\partial X_{mn}(x)}{\partial n} \sin(\lambda_{mn} s) d\sigma ds, \\ m, n = 1, 2, \dots \quad , \\ \\ b_{mn}''(T_k) = -(1+\lambda_{mn}) \int\limits_0^{T_k} \int\limits_{\partial\Omega} U(x, y, T_k, s) \frac{\partial X_{mn}(x)}{\partial n} \cos(\lambda_{mn} s) d\sigma ds, \\ m, n = 1, 2, \dots \quad . \end{cases} \tag{15}$$

По лемме 1 доказательство данной теоремы эквивалентно нахождению функции $U(x, y, T_k, s)$, которая доставляла бы равенство всей счетной системе интегральных уравнений (15).

Рассмотрим функцию:

$$U(x, T_k, t) = -\frac{2}{T_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\| \frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n} \right\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 (1+\lambda_{mn})} (b_{mn}'(T_k) \sin(\lambda_{mn} t) +$$

$$+ b_{mn}''(T_k) \cos(\lambda_{mn} t)) \frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}). \tag{16}$$

Подставляя функцию (16) в (15) и применяя лемму 2 видим, что $U(x,T_k,t)$ является решением данной системы интегральных уравнений.

После упорядочивания собственных значений по возрастанию, функция (6) примет вид:

$$U(x,T_k,t) = -\frac{2}{T_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left\|\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}(1+\lambda_n)}(b_n'(T_k)\sin\lambda_n t+$$

$$+b_n''(T_k)\cos\lambda_n t)\frac{\partial X_n(x)}{\partial n}). \qquad (17)$$

Покажем, что ряд (17) сходится абсолютно.
$\left\|\frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)} = 2\pi - 2 + (-1)^m + (-1)^n, \quad m,n = 1,2,\ldots \quad .$
Следовательно:

$$\frac{1}{\left\|\frac{\partial X_{mn}(x,y)}{\partial n}\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}} \le \frac{1}{2\pi-4}, \quad m,n = 1,2,\ldots \quad .$$

Таким образом:

$$|U(x,T_k,t)| \le \frac{2}{T_k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi-4)(1+\lambda_n)}(|b_n'(T_k)|+|b_n''(T_k)|) \le$$

$$\le \frac{4}{(2\pi-4)T_k}\sum_{n=1}^{\infty}(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\lambda_n}). \qquad (18)$$

Согласно [41], выбор начальных данных в теореме 1 обеспечивает сходимость ряда (18). Теорема доказана.

Таким образом, управляя двумя краевыми условиями, пластину можно остановить для более широкого класса начальных возмущений.

## Список литературы

1. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н., Кукмашев С. А., Чернов А. А. Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс. – Изв. РАН. Теор. и сист. упр. 2000, №1, С. 135-145.

2. Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. – ПММ. 1981, Т. 45, №6, С. 1095-1103.

3. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов – ГОНТИ, Харьков, 1938.

4. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Физматлит, 1965.

5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949.

6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

7. Добрынина И. С., Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка. – Изв. РАН. Техн. кибернет. 1992, №6, С. 94-100.

8. Егоров А. И. Управление упругими колебаниями. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1986, №5, С. 60-63.

9. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами. – Журнал вычисл. матем. и матем. физика, 2009, 49:5, 815-825.

10. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости колебаний системы связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами. – Журнал вычисл. матем. и матем. физика, 2006, 46:6, 1062-1018.

11. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Управление колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами. – Журнал вычисл. матем. и матем. физика, 2005, 45:10, 1766-1784.

12. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам. – Журнал вычисл. матем. и матем. физика, 2006, 46:11, 2032-2044.

13. Зеликин М. И., Манита Л. А. Накопление переключений управления в задачах с распределенными параметрами. – СМФН. 2006, Т. 19, С. 78-113.

14. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией. – Дифференц. уравнения, 2000, Т. 36, №11, С. 1513-1528.

15. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией. – Дифференц. уравнения, 2000, Т. 36, №12, С. 1670-1686.

16. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. – УМН, 2005, 60: 6(366), 89-114.

17. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце. – Дифференц. уравнения, 2005, Т. 41, №1, С. 105-115.

18. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закрепленном втором ее конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны. – Докл. РАН. 2004, Т. 399, №6, С. 727-731.

19. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах и отвечающее ему распределение

полной энергии струны. – Докл. РАН. 2005, Т. 400, №1, С. 16-20.

20. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при свободном втором ее конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны. – Докл. РАН. 2005, Т. 400, №5, С. 587-591.

21. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце при закрепленном втором ее конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны. – Докл. РАН. 2005, Т. 400, №6, С. 731-735.

22. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничного управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце. – Докл. РАН. 2005, Т. 402, №1, С. 20-24.

23. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничного управление упругой силой на двух концах струны. – Докл. РАН. 2005, Т. 402, №2, С. 163-169.

24. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация комбинированного граничного управление колебаниями струны. – упругой силой на одном конце и смещением на другом конце. – Докл. РАН. 2005, Т. 402, №5, С. 590-596.

25. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. – Мир, Москва 1975.

26. Лионс Ж.–Л. Некоторые вопросы оптимального управления распределенными системами. – УМН. 1985, 40: 4(244), С. 55-68.

27. Лионс Ж.–Л. Об оптимальном управлении распределенными системами. – УМН. 1985, 28: 4(172), С. 15-46.

28. Лионс Ж.–Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972.

29. Никитин А. А. Граничное управление упругой силой на одном конце струны. – Докл. РАН. 2006, Т. 406, №4, С. 458-461.

30. Никитин А. А. Оптимальное граничное управление колеба-

ниями струны, производимое силой при упругом закреплении. – Дифференц. уравнения. 2010, Т. 46, С. 12.

31. Решмин С. А. Ограниченное управление линейной системой третьего порядка. – Изв. РАН. Теор. и сист. упр. 1996, №1, С. 22-26.

32. Фурсиков А. В. Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье-Стокса и Эйлера. – Матем. сб., 1981, 115(157): 2(6), 281-306.

33. Фурсиков А. В., Эмануилов Ю. С. Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье-Стокса. – Матем. сб., 1996, 187: 9, 103-138.

34. Фурсиков А. В., Эмануилов Ю. С. Точная управляемость уравнений Навье-Стокса и Буссинеска. – УМН, 1999, 54: 3(327), 93-146.

35. Черноусько Ф. Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах. – Прикл. матем. и мех. 1988, Т. 52, вып. 4, С. 549-558.

36. Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами. – Прикл. матем. и мех. 1992, Т. 56, вып. 5, С. 810-826.

37. Черноусько Ф. Л. Задача оптимального быстродействия при смешанных ограничениях. – Изв. РАН. Теор. и сист. упр. 1995, №4, С. 103-113.

38. Черноусько Ф. Л. Управление системой с одной степенью свободы при ограничениях на управляющую силу и скорость ее изменения. – Докл. РАН, 1999, Т. 368, №4, С. 464-466.

39. Черноусько Ф. Л. Управление системой с одной степенью свободы при сложных ограничениях. – Прикл. матем. и мех. 1999, Т. 63, вып. 5, С. 707-715.

40. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управле-

ние колебаниями. – М.: Наука, 1980.

41. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006.

42. Черноусько Ф. Л., Шматков А. М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка. – Прикл. матем. и мех. 1997, Т. 61, вып. 5, С. 723-731.

43. Черноусько Ф. Л., Шматков А. М. Синтез оптимального быстродействия в одной системе третьего порядка. – ДАН СССР. 1997, Т.354, №2, С. 174-177.

44. Bardos C., Lebeau G., Rauch J., Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of wave from the boundary. – SIAM. Journal on Optimization and Control, 1992, 30(5), 1024-1065.

45. Chernousko F. L. Control of elastic systems by bounded distributed forces. – Appl. Math. and Comp. 1996, V. 78, P. 103-110.

46. Grisvard P. Caracterisation de quelques espaces d'interpolation. – Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), pp. 40-63.

47. Lions J. L. Exact controllability. Stabilization and perturbations for distributed systems. – SIAM Review. – 1988. – V. 30, № 1. – P. 1-68.

48. Zuazua E. Exact controllability of a vibrating plate model for an arbitrarily small time. – C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 304 (1987), no. 7, 173-176.

49. Романов И. В. Точное управление колебаниями прямоугольной пластины с помощью граничных сил. – Автоматика и Телемеханика. Сдано в печать, 5 с.

50. Романов И. В. Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил. – Вестник МГУ. Сдано в печать, 7 с.

51. Романов И. В., Шамаев А. С. О задаче управления колебаниями плоской мембраны в случае ограничения на абсолютную

величину управляющего воздействия. – ПММ. Сдано в печать, 10 с.