УДК 531.36+531.384 Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2012. Вып. 3

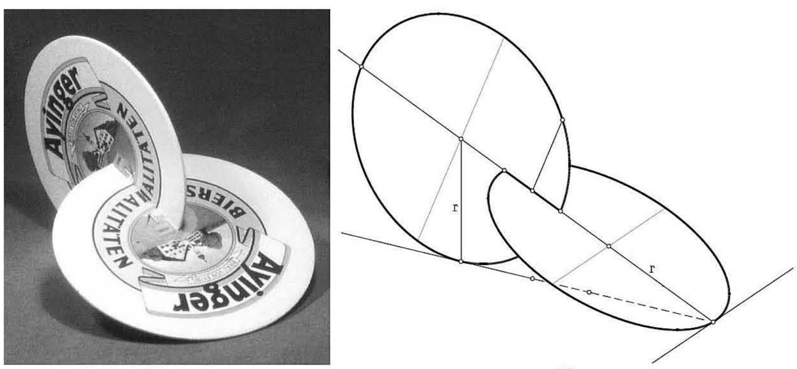
О ДВИЖЕНИИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ТЕЛА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПЛАСТИНОК*

А. С. Кулешов[1], *М. О. Ицкович*[2]

1. Московский государственный университет,
канд. физ.-мат. наук, доцент, kuleshov@mech.math.msu.su

2. Московский государственный университет,
студент, m1shok7@mail.ru

Введение. Пусть по неподвижной горизонтальной плоскости движется без проскальзывания твердое тело, состоящее из двух одинаковых симметричных пластинок, соединенных перпендикулярно друг другу так, что оси симметрии пластинок образуют единую ось, являющуюся осью симметрии тела. Данное тело при движении по горизонтальной плоскости в каждый момент времени касается ее двумя точками (рис. 1).



(а) (б)

Рис. 1. Олоид и Two-Circle-Roller.

Наиболее известными телами, построенными по этому принципу, являются олоид [1–3] и тело, описанное в работе [4] — так называемый Two-Circle-Roller. Олоид (рис. 1, а) состоит из двух одинаковых дисков радиуса R, соединенных перпендикулярно друг другу так, что окружность одного диска проходит через центр другого и наоборот. Тело, описанное в работе [4], имеет схожий с олоидом вид — оно состоит из двух одинаковых взаимно перпендикулярных дисков, но расстояние между их центрами равно не R, как в случае олоида, а $R\sqrt{2}$ (рис. 1, б). Движение обоих описанных тел по плоскости было исследовано в работах [1–4]. Однако представляет интерес исследование движения и других тел подобного типа, форма которых отличается от олоида или Two-Circle-Roller.

Теория, предложенная в работах [2, 3], позволяет исследовать движение по неподвижной горизонтальной плоскости тела, состоящего из двух одинаковых симметричных пластинок произвольной формы. В данной работе изучается движение тела,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00322).

состоящего из двух одинаковых эллиптических пластинок, соединенных перпендикулярно друг другу вдоль большей полуоси. В предположении,что тело движется без проскальзывания, построены траектории точек касания тела с опорной плоскостью. Найдены также положения равновесия тела на плоскости и получены условия их устойчивости.

Постановка задачи. Пусть по неподвижной горизонтальной плоскости движется твердое тело, состоящее из двух одинаковых эллиптических пластинок с полуосями a и b, $a > b$. Пластинки соединены перпендикулярно друг другу вдоль большей оси симметрии так, что расстояние между их центрами C_1 и C_2 равно 2Δ, $\Delta \leq a$ (рис. 2). Следуя теории, изложенной в работах [2, 3], введем подвижную систему координат $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с телом. Начало G этой системы координат является серединой отрезка C_1C_2 (т. е. точка G является центром масс системы). Ось Gx_3 перпендикулярна плоскости первой пластинки, а ось Gx_1 перпендикулярна плоскости второй пластинки. Ось Gx_2 является осью симметрии тела и проходит через большие полуоси эллиптических пластинок, составляющих тело (рис. 2). Обозначим через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичные векторы системы координат $Gx_1x_2x_3$.

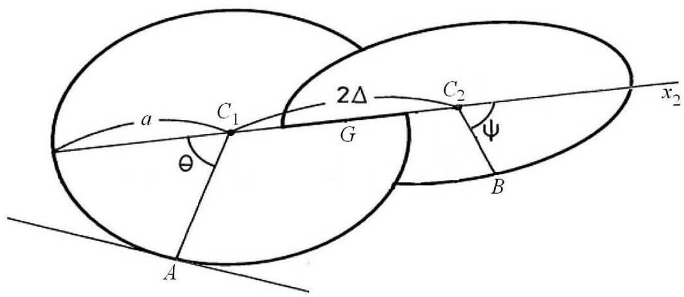


Рис. 2. Твердое тело, состоящее из двух эллиптических пластинок.

Пусть A и B — точки касания тела с горизонтальной плоскостью. Положение точки A будем определять углом θ между отрицательным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_1 первой пластинки в точку A. Заметим, что угол θ связан с натуральным параметром s — длиной дуги эллипса, ограничивающего первую пластинку, соотношением

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ab\sqrt{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{1}$$

Положение точки B будем определять углом ψ между положительным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_2 второй пластинки в точку B (рис. 2). Тогда радиус-векторы точки A и точки B записываются следующим образом:

$$\overrightarrow{GA} = \boldsymbol{r}_1 = \frac{ab\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\boldsymbol{e}_1 - \left(\Delta + \frac{ab\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\right)\boldsymbol{e}_2,$$

$$\overrightarrow{GB} = \boldsymbol{r}_2 = \left(\Delta + \frac{ab\cos\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}\right)\boldsymbol{e}_2 - \frac{ab\sin\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}\boldsymbol{e}_3.$$

При движении рассматриваемого твердого тела по плоскости три вектора $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $(\boldsymbol{r}_1)'_\theta$ и $(\boldsymbol{r}_2)'_\psi$ все время лежат в плоскости движения. Соответствующее условие имеет вид:

$$\langle \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\, (\boldsymbol{r}_1)'_\theta,\, (\boldsymbol{r}_2)'_\psi\rangle = 0,$$

где через $\langle\cdot,\,\cdot,\,\cdot\rangle$ обозначено смешанное произведение векторов. Из этого условия находится связь между переменными θ и ψ. Используя ее, мы можем записать, как компоненты радиус-вектора $\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{r}_2$ зависят от θ:

$$\boldsymbol{r}_2=\left(\Delta-\frac{a^2b\cos\theta}{a\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+2b\Delta\cos\theta}\right)\boldsymbol{e}_2- \\ -\frac{b\sqrt{a^4\sin^2\theta+4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+4b^2\Delta^2\cos^2\theta}}{a\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+2b\Delta\cos\theta}\boldsymbol{e}_3. \quad (2)$$

Выражение (2) для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_2$ должно иметь смысл, поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$a^4\sin^2\theta+4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+4b^2\Delta^2\cos^2\theta>0,$$

следовательно, $\cos\theta$ должен удовлетворять неравенству

$$\cos\theta>-\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4a\Delta b^2+4\Delta^2b^2}},$$

т. е. угол θ изменяется в следующих пределах:

$$-\arccos\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4a\Delta b^2+4\Delta^2b^2}}\right)<\theta<\arccos\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4a\Delta b^2+4\Delta^2b^2}}\right).$$

Для угла ψ должны выполняться аналогичные условия.

Траектории точек касания. Запишем уравнение неподвижной плоскости, по которой движется тело, в системе координат $Gx_1x_2x_3$. Это уравнение можно получить из условия, что точки A и B, а также касательный вектор к границе первой пластинки, построенный в точке A, во все время движения принадлежат данной плоскости. Пусть X, Y, Z — координаты произвольной точки этой плоскости относительно системы координат $Gx_1x_2x_3$. Тогда уравнение плоскости записывается в виде

$$-a^2\sin\theta X+b^2\cos\theta Y+b\left(a\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+b\Delta\cos\theta\right)+ \\ +Z\sqrt{a^4\sin^2\theta+4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+4b^2\Delta^2\cos^2\theta}=0.$$

Единичный вектор

$$\boldsymbol{n}=\left(2a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta+4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+4b^2\Delta^2\cos^2\theta\right)^{-1/2}\times \\ \times\left(-a^2\sin\theta\,\boldsymbol{e}_1+b^2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_2+\sqrt{a^4\sin^2\theta+4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+4b^2\Delta^2\cos^2\theta}\,\boldsymbol{e}_3\right)$$

есть вектор нормали к данной плоскости. Следовательно, угол наклона первой пластинки к плоскости движения определяется по формуле

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3) = \frac{\sqrt{a^4\sin^2\theta + 4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} + 4b^2\Delta^2\cos^2\theta}}{\sqrt{2a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta + 4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} + 4b^2\Delta^2\cos^2\theta}}.$$

Кривизна эллипса, ограничивающего первую пластинку, в зависимости от угла θ имеет вид

$$k = \frac{ab\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}{\left(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta\right)^{3/2}}.$$

Эта кривизна связана с кривизной траектории точки A, точки касания тела с опорной плоскостью, формулой [2, 3]

$$K = k\cos\varphi.$$

Имея выражение для K, легко найти параметрические уравнения траектории точки A на опорной плоскости в зависимости от угла θ. Для этого введем неподвижную систему координат $OXYZ$. Начало O этой системы совпадает с точкой касания первой пластинки с неподвижной плоскостью при $\theta = 0$. Ось OX направлена по касательной к границе первой пластинки при $\theta = 0$, а ось OZ перпендикулярна плоскости движения. Ось OY образует правую тройку с осями OX и OZ. Пусть α — угол между касательным вектором к траектории точки A и осью OX. Тогда (см. [2, 3])

$$\frac{d\alpha}{ds} = K(s), \quad \text{т.е.} \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = K(\theta)\frac{ds}{d\theta}. \tag{3}$$

Для производных координат точки касания тела с плоскостью X_A и Y_A имеем следующие выражения:

$$\frac{dX_A}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dY_A}{ds} = \sin\alpha,$$

поэтому,

$$\frac{dX_A}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\cos\alpha, \quad \frac{dY_A}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\sin\alpha. \tag{4}$$

Учитывая, что производная натурального параметра s по θ определяется по формуле (1), можно переписать уравнения (3)–(4) в виде

$$\frac{dX_A}{d\theta} = \frac{ab\sqrt{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\cos\alpha, \quad \frac{dY_A}{d\theta} = \frac{ab\sqrt{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}}{\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\alpha, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\theta} &= \frac{a^2b^2}{\left(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta\right)}\times \\ &\times \frac{\sqrt{a^4\sin^2\theta + 4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} + 4b^2\Delta^2\cos^2\theta}}{\sqrt{2a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta + 4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} + 4b^2\Delta^2\cos^2\theta}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (5)–(6) имеют весьма сложный вид. В общем случае невозможно получить явные выражения для X_A, Y_A и α в зависимости от θ. Поэтому уравнения (5)–(6) интегрировались численно для различных значений параметров a, b и Δ. Аналогичные уравнения могут быть получены и для координат точки касания B на плоскости.

На рис. 3–4 показаны траектории точек касания A и B с опорной плоскостью. Нижняя кривая представляет собой траекторию точки A, а верхняя кривая — траекторию точки B.

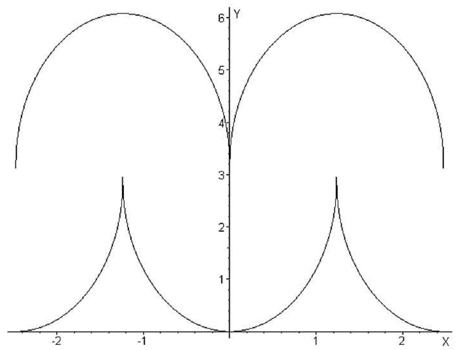


Рис. 3. Траектории точек касания A (нижняя кривая) и B (верхняя кривая): $a = 2$, $\Delta = 1$, $b = 1$.

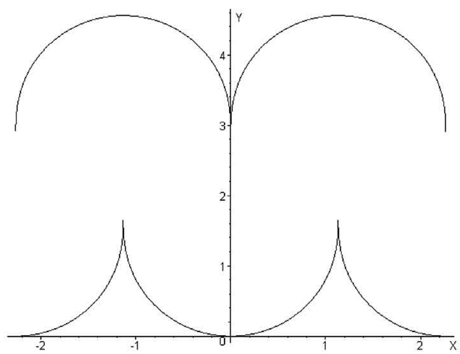


Рис. 4. Траектории точек касания A (нижняя кривая) и B (верхняя кривая): $a = \sqrt{3}/\sqrt{2}$, $\Delta = 1$, $b = 1$.

Равновесия тела на плоскости и их устойчивость. Имея выражения для радиуса-вектора $\overrightarrow{GA} = \boldsymbol{r}_1$ и вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к плоскости движения, легко найти выражение для потенциальной энергии тела, состоящего из двух эллиптических пластинок:

$$V = -Mg\left(\overrightarrow{GA}\cdot\boldsymbol{n}\right) = \frac{Mgb\left(\Delta b\cos\theta + a\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\right)}{\sqrt{2a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta + 4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} + 4b^2\Delta^2\cos^2\theta}}.$$

Критические точки потенциальной энергии соответствуют положениям равновесия тела на плоскости, причем точки минимума — устойчивым положениям равновесия.

Производная потенциальной энергии имеет вид

$$V'_\theta = \frac{Mga^3b^3\sin\theta\cos\theta\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)^{-1/2}\left(b^2-2a^2+2\Delta^2\right)}{\left(2a^4\sin^2\theta+b^4\cos^2\theta+4ab\Delta\cos\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}+4b^2\Delta^2\cos^2\theta\right)^{3/2}},$$

следовательно, система имеет два положения равновесия: $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$. Устойчивость каждого из этих положений определяется знаком второй производной функции V, вычисленной в соответствующем положении равновесия. Таким образом, в случае $\theta=0$ имеем

$$V''\Big|_{\theta=0} = \frac{Mga^3\left(b^2-2a^2+2\Delta^2\right)}{b\left(b^2+4a\Delta+4\Delta^2\right)^{3/2}},$$

т. е., положение равновесия $\theta=0$ устойчиво при $b^2-2a^2+2\Delta^2>0$ и неустойчиво при $b^2-2a^2+2\Delta^2<0$. Аналогично, для положения равновесия $\theta=\pi/2$ имеем

$$V''\Big|_{\theta=\pi/2} = -\frac{\sqrt{2}Mgb^3\left(b^2-2a^2+2\Delta^2\right)}{4a^4} > 0;$$

положение $\theta=\pi/2$ устойчиво при $b^2–2a^2+2\Delta^2<0$ и неустойчиво при $b^2–2a^2+2\Delta^2>0$.

В случае, когда $b^2-2a^2+2\Delta^2=0$, система находится в безразличном равновесии. Потенциальная энергия тела будет в этом случае постоянной во все время движения.

Литература

1. *Dirnbök H., Stachel H.* The Development of the Oloid // J. Geometry Graphics. 1997. Vol. 1. P. 105–118.

2. *Кулешов А. С., Хаббард М., Петерсон Д. Л., Джеде Дж.* О движении олоида по горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. №4. С. 825–835.

3. *Ицкович М. О., Кулешов А. С.* О движении твердого тела, состоящего из двух дисков, по горизонтальной плоскости // Современные проблемы математики и механики. К 190-летию П. Л. Чебышева: Сб. статей / под ред. А. Н. Ширяева, А. В. Лебедева, В. М. Федорова, А. С. Кулешова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. С. 140–150.

4. *Stewart A. T.* Two circle roller // American Journal of Physics. 1966. Vol. 34. N 2. P. 166–167.

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2012 г.