Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова
(Саратов, 29 января – 2 февраля 2018 г.)

ООО Издательство «Научная книга»
2018

УДК 517; 518; 519; 533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения:

С56 материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова. — Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. — 380 с. : ил.

ISBN 978-5-9758-1691-7

Представлены результаты исследований участников конференции по актуальным проблемам современной теории функций действительного и комлексного переменного, гармоническому анализу и преобразованиям Фурье, спектральной теории операторов, задачам оптимизации и негладкому анализу, а также их приложениям.

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(проект № 18-31-10008)

УДК 517; 518; 519; 533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-9758-1691-7

О р г к о м и т е т ш к о л ы :

Председатель организационного комитета:
Кашин Борис Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН

Заместители председателя организационного комитета:
Голубов Борис Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, президент СГУ
Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор, ректор СГУ
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор

Члены организационного комитета:
Абанин Александр Васильевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Баев Александр Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Бердышев Виталий Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН
Долженко Евгений Прокофьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Дудов Сергей Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Дьяченко Михаил Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Конягин Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Лосев Александр Георгиевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Насыров Семен Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Олевский Александр Моисеевич (Московский институт электронного машиностроения, Тель-Авивский университет)
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор
Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Седлецкий Анатолий Мечиславович, доктор физ.-мат. наук, профессор
Скопина Мария Александровна, доктор физ.-мат. наук
Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-корр. РАН
Сидоров Сергей Петрович, доктор физ.-мат. наук, доцент (секретарь)

УДК 517.5+517.9

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Россия)
avabanin@sfedu.ru

Считается, что как отдельное направление динамика линейных операторов сформировалась после работы Годфруа и Шапиро [1], которые подошли к классическим результатам Биркхоффа (1929) и Маклейна (1952) о гиперцикличности и хаотичности операторов сдвига и дифференцирования с точки зрения теории динамических систем и разработали некоторые общие подходы к исследованию вопросов подобного типа. Основные результаты и обзор развития теории динамических свойств линейных операторов практически до наших дней можно найти в недавних монографиях [2, 3]. В настоящей работе будет представлен обзор недавних результатов и новых подходов к описанию динамических свойств операторов интегрирования и дифференцирования в весовых банаховых пространствах аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ или комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Наиболее полно для них исследованы вопросы гиперцикличности, хаотичности и эргодичности в среднем (см. [4–6]). С другой стороны, важный для приложений вопрос об описании циклических элементов этих операторов удавалось исследовать лишь при достаточно обременительных ограничениях на веса. Именно на нем и будет сосредоточено наше дальнейшее изложение.

Напомним, что циклическим элементом оператора $T : X \to X$ в банаховом пространстве X называется такой элемент $x \in X$, орбита которого $(T^n x : n \geq 0)$ полна в X. В ряде случаев проблему описания циклических элементов T удается свести к проблеме описания его инвариантных подпространств, то есть таких замкнутых подпространств M

в X, что $T(M) \subset M$. В связи с этим напомним интерпретацию определения Н. К. Никольского одноклеточности оператора применительно к рассматриваемым нами операторам интегрирования I и дифференцирования D. Оператор I или D, непрерывный на пространстве X аналитических в круге или на плоскости функций, содержащем все полиномы в качестве плотного подмножества, называется одноклеточным, если все его нетривиальные инвариантные подпространства исчерпываются подпространствами вида $z^n X$ (соответственно, $\mathcal{P}_n$ – семействами полиномов степени не выше n), $n \in \mathbb{N}$. С точки зрения динамических свойств, например, оператора I это означает, что любая функция $f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots$ из X с $f_0 \neq 0$ является циклическим элементом I в X (обратное утверждение очевидно). Опираясь на отмеченную взаимосвязь проблем описания циклических элементов и одноклеточных операторов мы будем ниже говорить о второй из них.

В работе [7] были сформулированы достаточные условия общего характера на банахово пространство X аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, которые обеспечивают одноклеточность I в X. Эти условия применимы к пространствам функций не выше чем степенного роста и их проверка даже для классических пространств Бергмана $A^p_{v_\alpha}$ с $v_\alpha(z) = (1 - |z|)^{-\alpha}$ оказалась непростой задачей, которую авторам удалось решить при некоторых дополнительных ограничениях на α и p. В работе [8] были приведены достаточные условия одноклеточности I на пространствах Фока целых функций, задаваемых быстро растущими весами. И в данном случае проверку общих условий авторам удалось осуществить только для конкретных пространств Фока $\mathcal{F}^p_{v_\alpha}$, $v_\alpha(z) = e^{|z|^\alpha}$, при $\alpha \geq 2$ и всех $p > 0$. Инвариантные подпространства оператора дифференцирования изучались в работе [9], в которой было показано, что D одноклеточен на пространствах Фока $\mathcal{F}^2_{v_\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ и что проблема инвариантного подпространства для гильбертова пространства эквивалентна определенному свойству семейства инвариантных подпространств D на $\mathcal{F}^2_{v_1}$ (то есть, при $\alpha = 1$).

Новый подход, который позволяет получать завершенные результаты по данному направлению сразу для целых весовых шкал, основан на работах [10, 11], посвященных непрерывности и компактности I и D в пространствах Бергмана A^∞_v или Фока $\mathcal{F}^\infty_v$ голоморфных в $\mathbb{D}$ или $\mathbb{C}$ функций с равномерной оценкой, задаваемой радиальным весом v. Его подробное изложение представлено в статье [12] и заключается в следующем. Сначала задача исследуется в A^∞_v и $\mathcal{F}^\infty_v$. Решающим моментом, позволяющим в этом случае дать на нее полный ответ, является то обстоятельство, что для таких пространств можно использовать без ущерба для общности log-выпуклые веса v (по определению, это такие v, для которых $\ln v(e^x)$ — выпуклая функция). Затем используется следующее наблюдение. Предположим, что линейный оператор T непрерывен на двух пространствах E и H. Мы говорим, что пространства E и H подобны относительно T, если найдутся такие его степени T^n и T^m, что операторы $T^n : E \to H$ и $T^m : H \to E$ корректно определены и непрерывны. Оказалось, что если E и H подобны относительно T и удовлетворяют некоторым дополнительным естественным ограничениям, то T является или не является одноклеточным в E и H одновременно. Применив это соображение и воспользовавшись случаем пространств A_v^∞ и $\mathcal{F}_v^\infty$ как эталоном, удается получить полную характеризацию инвариантных подпространств (циклических элементов) для операторов I и D в пространствах Бергмана A_v^p и Фока $\mathcal{F}_v^p$ при всех $0 < p < \infty$. Полученные на этом пути результаты не только содержат все предшествующие, но и усиливают их. Например, в [7] одноклеточность оператора интегрирования была установлена фактически только для пространств Бергмана $A_{v_\alpha}^p$ при некоторых дополнительных ограничениях на α и p. По ряду существенных причин общие результаты из [7] не удается применить к весам другого конкретного вида. В то же время, метод из [12] позволяет установить простые для проверки достаточные условия одноклеточности I в пространствах A_v^p, которые формулируются в терминах роста веса v. Например, для всех весов v с умеренным ростом (то есть, $\ln v(z) = o(\ln(1-|z|)^{-1})$ при $|z| \uparrow 1$) все пространства A_v^p одноклеточны. В качестве частного случая мы получаем отсюда, что упомянутый только что результат из [7] для конкретного веса $v(z) = (1-|z|)^{-\alpha}$ верен без никаких ограничений для всех $\alpha, p > 0$. Примерно такое же положение дел имеет место и для пространств Фока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds // J. Func. Anal. 1991. Vol. 98. P. 229–269

2. *Bayart F., Matheron E.* Dynamics of linear operators. N. Y. : Cambridge Univ. Press, 2009. 337 p.

3. *Grosse-Erdman K.-G., Peris A.* Linear chaos. London : Springer, 2011. 386 p.

4. *Bonet J.* Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions // Math. Z. 2009. Vol. 261, № 3. P. 629–657.

5. *Beltran M. J., Bonet J., Fernández C.* Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 141, № 12. P. 4293–4303.

6. *Beltran M. J.* Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions // Studia Math. 2014. Vol. 221, № 1. P. 35–60.

7. *Aleman A., Korenblum B.* Volterra invariant subspaces of H^p // Bull. Sci. Math. 2008. Vol. 132, № 6. P. 510–528.

8. Constantin O., Peláez J. A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood – Paley formula on weighted Fock spaces // J. Geom. Anal. 2016. Vol. 26, № 2. P. 1109–1154.

9. *Atzmon A., Brive B.* Surjectivity and invariant subspaces of differential operators

on weighted Bergman spaces of entire functions // Contemp. Math. 2006. Vol. 404. P. 27–39.

10. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr. 2017. Vol. 290, № 8-9. P. 1144–1162.

11. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Collect. Math. 2018. doi: 1007/s13348-016-0185-z.

12. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // Integr. Equ. Oper. Theory. 2017. Vol. 89, № 3. P. 409–438.

УДК 517.9

О ФРЕЙМАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т. И. Абанина (Ростов-на-Дону, Россия)
abaninati@mail.ru

Фреймы в гильбертовых пространствах в качестве полезного объекта исследования были определены в работе [1] в связи с некоторыми задачами теории негармонических рядов Фурье и впоследствии нашли важные применения в теории вейвлетов и сплайнов. Понятие фреймов в банаховых пространствах было введено в 1991 г. в статье [2], и с этого момента оно привлекло внимание значительного числа исследователей (см. монографию [3] и список литературы в ней). Напомним это понятие. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, $(A, \|\cdot\|_A)$ — банахово пространство числовых последовательностей, в котором сходимость по норме влечет покоординатную сходимость в A. Последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ функционалов из сопряженного пространства X' называется A-*фреймом*, если выполняются условия:

(i) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \in A$ для любого $x \in X$;

(ii) $\exists\, c, C > 0: \quad c\|x\|_X \le |(f_n(x))_{n=1}^{\infty}|_A \le C\|x\|_X$ для всех $x \in X$;

(iii) Существует такой линейный непрерывный оператор $S_F : A \to X$, что $x = S_F\big((f_n(x))_{n=1}^{\infty}\big)$ для любого $x \in X$.

Недавно в работах [4, 5] было предложено распространение этого понятия на пространства Фреше. Однако некоторые предварительные ограничения на пространства, равно как и требования на фрейм оказались слишком обременительными. Во-первых, они исключали из рассмотрения важный класс пространств Фреше без непрерывной нормы (например, пространство $C^\infty(G)$ всех бесконечно дифференцируемых функций на открытом множестве в $\mathbb{R}^n$). Во-вторых, авторы фактически требовали от фрейма в пространстве Фреше, чтобы он был фреймом в каждом из банаховых пространств его образующих. Подробный анализ недостатков определения фрейма и сопутствующих ему понятий из [4, 5] был проведен автором в [6]. Там же была предложена следующая новая концепция подхода к определению фреймов в произвольных локально выпуклых пространствах, которая полностью согласуется со случаем банаховых пространств не только формально, но и по сути.

Определение 1. *Пусть X и A — полные отделимые локально выпуклые пространства, причем A — пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости. Последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ линейных непрерывных функционалов на X называется A-предфреймом для X, если оператор $R_F : x \in X \mapsto (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ является топологическим изоморфизмом из X в A. Если дополнительно известно, что R_F имеет линейный непрерывный левый обратный, то F называется A-фреймом для X.*

Следующая теорема содержит критерий того, что данная последовательность функционалов образует A-(пред)фрейм. Этот критерий показывает, в частности, что определение 1 является прямым обобщением на локально выпуклые пространства определения из [2]. В ней и далее через X' обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на X.

Теорема 1. *Пусть X — полное отделимое локально выпуклое пространство с топологией, задаваемой направленным набором преднорм P, а A — полное отделимое локально выпуклое пространство числовых последовательностей, топология которого определяется направленным набором преднорм $(|\cdot|_q : q \in Q)$ и мажорирует топологию покоординатной сходимости. Для того чтобы последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ была A-предфреймом для X, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(F1) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \in A$ *для любого* $x \in X$*;*

(F2) $\forall\, q \in Q\ \exists\, p \in P, C > 0 : \quad |(f_n(x))_{n=1}^{\infty}|_q \le Cp(x)$ *для всех* $x \in X$*;*

(F3) $\forall\, p \in P\ \exists\, q \in Q, C > 0 : \quad p(x) \le C|(f_n(x))_{n=1}^{\infty}|_q$ *для всех* $x \in X$.

Условия (F1)–((F3) вместе с дополнительным условием:

(F4) Существует линейный непрерывный оператор восстановления $S_F : A \to X$, *т.е.* $x = S_F\big((f_n(x))_{n=1}^{\infty}\big)$ *для любого* $x \in X$,

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы F была A-фреймом для X.

Отметим некоторые важные для приложений свойства A-фреймов, предварительно напомнив, что последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ функционалов называется *тотальной* на X, если из того, что $f_n(x) = 0$ для всех n следует, что $x = 0$.

Предложение 1. *Пусть X — полное отделимое локально выпуклое пространство, A — полное отделимое локально выпуклое пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости. Если последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ является A-предфреймом для X, то она тотальна на X и подпространство $R_F(X)$ замкнуто в A.*

Предложение 2. *Пусть X — полное отделимое локально выпуклое пространство, A — полное отделимое локально выпуклое пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости и последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ является A-предфреймом для X. Для того чтобы эта последовательность образовывала A-фрейм для X, необходимо и достаточно, чтобы $R_F(X)$ было топологически дополнимым подпространством A.*

Для пространств Фреше или сильных сопряженных к рефлексивным пространствам Фреше получаем следующую более простую интерпретацию последнего результата.

Предложение 3. *Пусть X — пространство Фреше или сильное сопряженное к рефлексивному пространству Фреше и A — аналогичное X по топологической структуре пространство числовых последовательностей, топология которого мажорирует топологию покоординатной сходимости. Для того чтобы последовательность $F = (f_n)_{n=1}^{\infty} \in (X')^{\mathbb{N}}$ была A-фреймом Фреше для X, необходимо и достаточно, чтобы F была тотальна на X и оператор R_F отображал X на замкнутое алгебраически дополнимое подпространство в A.*

Отметим, что приведенные выше определение A-фрейма и критерии того, что заданная последовательность функционалов образует A-фрейм, недавно получили дальнейшее применение к ряду задач в статье [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duffin R. G., Schaeffer A. C.* A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 341–366.

2. *Gröchenig K. H.* Describing functions: frames versus atomic decompositions // Monatsh. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.

3. *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston : Birkhäuser, 2003. 464 p.

4. *Pilipović S., Stoeva D. T., Teofanov N.* Frames for Fréchet spaces // Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. 2007. Vol. 32. P. 69–84.

5. *Pilipović S., Stoeva D. T.* Series expansions in Fréchet spaces and their duals, construction of Fréchet frames // J. Approx. Theory. 2011. Vol. 163, № 11. P. 1729–1747.

6. *Абанина Т. И.* К вопросу о понятии фрейма // Научное обозрение. 2013. № 9. С. 101–104.

7. *Bonet J., Fernández C., Galbis A., Ribera J. M.* Frames and representing systems in Fréchet spaces and their duals // Banach J. Math. Anal. Vol. 11, № 1. P. 1–20.

УДК 517.853

О ФУНКЦИИ ПСЕВДОРАССТОЯНИЯ ДО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

В. В. Абрамова, С. И. Дудов (Саратов, Россия)
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru

1. Рассмотрим функцию вида

$$\varphi(x) \equiv \min_{y\in\Omega} f(y-x), \tag{1}$$

где Ω — выпуклое замкнутое множество из конечномерного действительного пространства R^p, $f(x)$ — выпуклая конечная на R^p функция, имеющая единственную точку минимума $x^* = 0_p \in R^p$. В частном случае, когда функция $f(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы, функция $\varphi(x)$ выражает расстояние от точки x до множества Ω и уже этим интересна для приложений.

Введем обозначения: $\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$ в точке x; $K(x,\Omega)$ — конус возможных направлений множества Ω в точке x; K^+ — конус, являющийся сопряженным к конусу K; $Q(x) = \{z \in \Omega : f(z-x) = \varphi(x)\}$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Функция $\varphi(x)$ является выпуклой и конечной на R^p, а формулу ее субдифференциала в любой точке $x \in R^p$ можно представить в виде*

$$\partial\varphi(x) = -\{\partial f(z-x) \cap K^+(z,\Omega)\}, \tag{2}$$

где z — любая точка из множества $Q(x)$.

Замечание. Формула (2) является обобщением формулы субдифференциала функции расстояния до выпуклого множества, полученной в [1]. Отметим так же другую форму представления субдифференциала функции расстояния в [2, гл. 2].

2. Для приложений так же интересен случай, когда множество Ω является многогранным, но невыпуклым множеством, заданным в виде

$$\Omega = \{y \in R^p : \max_{i\in[1:m]}\{\langle A_i, y\rangle + b_i\} \geq 0\}, \tag{3}$$

где $A_i \in R^p, b_i \in R$.

Считаем далее, что $M = \{y \in R^p : \langle A_i, y\rangle + b_i \le 0, i = \overline{1,m}\} \ne \emptyset$.
Обозначим через

$$\Omega_i = \{y \in R^p : \langle A_i, y\rangle + b_i \ge 0\},\ \varphi_i(x) = \min_{y\in\Omega_i} f(y-x),$$

$$Q_i(x) = \{z \in \Omega_i : \varphi_i(x) = f(z-x)\}, \quad I(x) = \{i \in [1:m] : \varphi(x) = \varphi_i(x)\},$$
$$K(A) = \{v = \alpha A : \alpha \ge 0\},\ \varphi'(x,g) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \alpha^{-1}(\varphi(x+\alpha g) - \varphi(x)).$$

Теорема 2. *Если множество* Ω *задано в форме* (3), *то функция* $\varphi(x)$ *непрерывна и дифференцируема по любому направлению* $g \in R^p$ *в любой точке* $x \in R^p$, *причем*

$$\varphi'(x,g) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin M, \\ \min\limits_{i\in I(x)} \max\limits_{v\in\partial\varphi_i(x)} \langle v, g\rangle, & \text{если } x \in M, \end{cases} \tag{4}$$

где $\partial\varphi_i(x) = -\{\partial f(z-x) \cap K(A_i)\}$, z *— любая точка из* $Q_i(x)$.

Замечание. Множество $\{\partial\varphi_i(x) : i \in I(x)\}$, как следует из формулы (4), является верхним экзостером функции $\varphi(x)$ в точке $x \in M$ (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.
2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука. 1980. 320 с.
3. *Демьянов В. Ф., Рощина В. А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказ. матем. журн. 2006. Т. 8, № 4. С. 19–31.

УДК 517.9

О ДВУМЕРНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ НЬЮТОНА – ПАДЕ

Дж. Акал (Стамбул, Турция),
А. Л. Лукашов (Москва, Россия)
alexey.lukashov@gmail.com

Основная цель данной работы — предложить подход к построению двумерных многоточечных аппроксимаций Ньютона – Паде, позволяющий использовать его в символьных вычислениях.

В одномерном случае этот подход (хотя и без явного указания его возможностей для символьных вычислений) был предложен в [1]. Одной из основ этого подхода является следующая несложно доказываемая лемма, позволяющая пересчитывать в явном виде по нулям многочлена коэффициенты его разложения по базису Ньютона (обычно это делается рекуррентно с помощью конечных разностей, что трудно реализуемо в символьных вычислениях из-за необходимости учитывать случаи совпадающих узлов).

Лемма 1. *Пусть* $\{\beta_k\}$ *— комплексные числа (не обязательно различные). Если*

$$B_k\left(z\right) = \prod_{j=0}^{k-1}\left(z-\beta_j\right), \quad k=1,2,3,\cdots; \quad B_0\left(z\right)=1$$

и

$$P_n\left(z\right) = \left(z-\beta_1'\right)\left(z-\beta_2'\right)\ldots\left(z-\beta_n'\right),$$

то

$$P_n\left(z\right) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} B_k\left(z\right),$$

где

$$\begin{aligned} c_{k,n} &= \sum_{i_1=1}^{k+1}\sum_{i_2=i_1}^{k+1}\cdots\sum_{i_{n-k}=i_{n-k-1}}^{k+1}\prod_{j=1}^{n-k}\left(\beta_{i_j}-\beta'_{i_j+j-1}\right), \\ k &= 1,2,\ldots,n-1, \quad c_{n,n}=1. \end{aligned}$$

Для функций двух переменных введем обозначение

$$B_{kl}\left(x,y\right) = \prod_{r=0}^{k-1}\left(x-x_r\right)\prod_{s=0}^{l-1}\left(y-y_s\right).$$

Тогда справедлива

Лемма 1.

$$B_{kl}\left(x,y\right)B_{ij}\left(x,y\right) = \sum_{r=\max(k,i)}^{k+i}\ \sum_{s=\max(l,j)}^{l+j}\ \Omega_{k,i}^{(1,r)}\Omega_{l,j}^{(2,s)}B_{rs}\left(x,y\right), \qquad (1)$$

где

$$\Omega_{k,i}^{(1,r)} = \sum_{j_1=\max(k,i)}^{r}\ \sum_{j_2=j_1}^{r}\cdots\sum_{j_{k+i-r}=j_{k+i-r-1}}^{r}\ \prod_{m=1}^{k+i-r}\left(x_{j_m}-x_{j_m+m-\max(k,i)-1}\right),$$

$$r<k+i,$$

$$\Omega_{k,i}^{(1,r)} = 1, \quad r = k + i$$

и

$$\Omega_{l,j}^{(2,s)} = \sum_{j_1=\max(l,j)}^{s} \sum_{j_2=j_1}^{s} \cdots \sum_{j_{l+j-s}=j_{l+j-s-1}}^{s} \prod_{m=1}^{l+j-s} \left(y_{j_m} - y_{j_m+m-\max(l,j)-1} \right),$$
$$s < l + j,$$

$$\Omega_{l,j}^{(2,s)} = 1, \quad s = l + j.$$

Далее мы будем использовать конструкцию из работы [2]. Предположим, что задан формальный двойной ряд Ньютона

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} c_{ij} B_{ij}(x,y)$$

и три множества N, D, E пар натуральных чисел. Тогда $[N/D]_E$ аппроксимация Ньютона – Паде ряда $f(x,y)$ определяется как пара многочленов

$$p(x,y) = \sum_{(i,j)\in N} a_{ij} B_{ij}(x,y), \tag{2}$$

$$q(x,y) = \sum_{(i,j)\in D} b_{ij} B_{ij}(x,y), \tag{3}$$

для которых соответствующие коэффициенты Ньютона у разности $(f \cdot q - p)$ равны нулю:

$$(f \cdot q - p)_{i,j} = 0 \;\text{ для }\; (i,j) \;\text{ из }\; E. \tag{4}$$

Основной результат — представление нетривиального решения (в случае, если оно существует):

$$q(x,y) = \begin{vmatrix} B_{i_0 j_0}(x,y) & \cdots & B_{i_m j_m}(x,y) \\ \beta_{k_1,i_0;l_1,j_0} & \cdots & \beta_{k_1,i_m;l_1,j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k_m,i_0;l_m,j_0} & \cdots & \beta_{k_m,i_m;l_m,j_m} \end{vmatrix},$$

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{(i,j)\in N} \beta_{i,i_0;j,j_0} B_{ij}(x,y) & \cdots & \sum\limits_{(i,j)\in N} \beta_{i,i_m;j,j_m} B_{ij}(x,y) \\ \beta_{k_1,i_0;l_1,j_0} & \cdots & \beta_{k_1,i_m;l_1,j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k_m,i_0;l_m,j_0} & \cdots & \beta_{k_m,i_m;l_m,j_m} \end{vmatrix},$$

где $\beta_{i,k;j,l} = \sum\limits_{r=i-k}^{i} \sum\limits_{s=j-l}^{j} c_{rs} \Omega_{k,r}^{(1,i)} \Omega_{l,s}^{(2,j)}$.

Пример 1. Пусть

$$f(x,y) = \sum_{i,j} c_{i,j} B_{i,j}(x,y),$$

где $x_i = i\sqrt{\pi}$ для $i = 0, 1, ...$ и $y_j = (j-1)\sqrt{\pi}$ для $j = 0, 1, ...$

Далее положим

$D = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$,

$N = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$,

$E = \{(2,1), (1,2), (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$.

Тогда

$$q(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y+\sqrt{\pi} \\ c_{21} & c_{11}+2c_{21}\sqrt{\pi} & c_{20}+c_{21}\sqrt{\pi} \\ c_{12} & c_{02}+c_{12}\sqrt{\pi} & c_{11}+2c_{12}\sqrt{\pi} \end{vmatrix}$$

и

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} \begin{matrix} c_{10}x + c_{01}(y+\sqrt{\pi}) + \\ +c_{00} + c_{11}x(y+\sqrt{\pi}) \end{matrix} & \begin{matrix} (c_{00}+c_{10}\sqrt{\pi})x + (c_{01} + \\ +c_{11}\sqrt{\pi})x(y+\sqrt{\pi})) \end{matrix} & \begin{matrix} (c_{00}+c_{01}\sqrt{\pi})(y+\sqrt{\pi}) + \\ +(c_{10}+c_{11}\sqrt{\pi})x(y+\sqrt{\pi}) \end{matrix} \\ c_{21} & c_{11}+2c_{21}\sqrt{\pi} & c_{20}+c_{21}\sqrt{\pi} \\ c_{12} & c_{02}+c_{12}\sqrt{\pi} & c_{11}+2c_{12}\sqrt{\pi} \end{vmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukashov A., Akal C.* Determinant form and a test of convergence for Newton – Padé approximations // Journal of Computational Analysis and Applications. 2013. Vol. 15. P. 55–64.

2. *Cuyt A., Verdonk B.* General order Newton-Padé approximants for multivariate functions // Numerische Mathematik. 1984. Vol. 43. P. 293–307.

УДК 517.51

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА – КАРАМАТЫ[1]

Г. Акишев (Караганда, Казахстан)
akishev@ksu.kz

Рассмотрим множество $SV[1,\infty)$ слабо меняющихся функций на $[1,+\infty)$ (см. [1]). Множество всех положительных , измеримых по Лебегу

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

на $[1,\infty)$ функций $b(t)$, для которых $b(t)=(1+\log t)^{\alpha}$ или $(\log 2t)^{\varepsilon}b(t)\uparrow$ и $(\log 2t)^{-\varepsilon}b(t)\downarrow$ на $[1,\infty)$ для любого числа $\varepsilon>0$, обозначим $SVL[1,\infty]$. Нетрудно убедиться , что $SVL[1,\infty)\subset SV[1,\infty)$.

Приведем определение пространства Лоренца – Караматы.

Пусть $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_m)$, $[0,2\pi]^m=\mathbb{T}^m$, $m\in\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Пусть $p\in(1,+\infty)$, $\tau\in[1,+\infty)$ и $b\in SV[1,\infty)$. Пространством Лоренца – Караматы $L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ называется множество измеримых на $\mathbb{T}^m=[0,2\pi]^m$, имеющих период 2π по каждой переменной $x_j, j=1,\ldots,m$ функций $f(\overline{x})$, для которых

$$\|f\|_{p,\tau,b}=\left(\int_0^1 f^{*^{\tau}}(t)(t^{\frac{1}{p}}b(1/t))^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}<+\infty,$$

где $f^*(t)$ -невозрастающая на $(0,1]$ перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|,\overline{x}\in\mathbb{I}^m=[0,1]^m$, (см. [1], [2]).

В частности , если $b(t)=1$, то $L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ -пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Известно, что если $\tau=p$, то $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)=L_p(\mathbb{T}^m)$ – пространство Лебега.

$E_n(f)_{p,\tau,b}=\inf_{T\in\mathfrak{F}_{\square_n}}\|f-T\|_{p,\tau,b}$–наилучшее приближение функции $f\in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathfrak{F}_{\square_n}$, тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ по каждой переменной .

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_1}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1<p<q<\infty, 1<\tau_1,\tau_2<\infty$ и $L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)\subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$, если $1<\tau_1<\tau_2<\infty$.

В одномерном случае достаточное условие принадлежности функции $f\in L_p(\mathbb{T}^1)$ в пространство $L_q(\mathbb{T}^1)$ при $1\le p<q<\infty$ в терминах наилучшего приближения и модуля непрерывности установил П. Л. Ульянов [3]. В дальнейшем эту тематику продолжили В. А. Андриенко [4], Э. А. Стороженко [5], В. И. Коляда [6], Н. Темиргалиев [7, 8], М.К. Потапов, М. Ф. Тиман, П. Освальд, Л. Лейндлер, С. В. Лапин, Б. В. Симонов и др. (см. библиографию в [9]) .

Н. Темиргалиевым [8] для функции одной переменной установлено достаточное условие принадлежности функции $f\in L_p[0,1]$ в пространство Лоренца $L_{p,\tau}[0,1]$ в терминах модуля непрерывности при $1\le\tau<p<\infty$ и доказана неулучшаемость этого условия. В терминах наилучшего приближения функции эта задача исследована Л. А. Шерстневой [10]. Эти вопросы для функции многих переменных в пространстве Лоренца исследованы в [11, 12].

В докладе будут представлены некоторые результаты по этой теме в пространстве Лоренца - Караматы. Для этого пространства известна

Теорема ([2, теорема 3.2]). *Пусть* $0 < p < \infty, 0 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ *и* $b_1, b_2 \in SV[1, \infty)$. *Если* $0 < \tau_1 \le \tau_2 < +\infty$, *и*

$$\sup_{0<t<1} \frac{b_2(\frac{1}{t})}{b_1(\frac{1}{t})} < +\infty, \tag{1}$$

то $L_{p,\tau_1,b_1}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_2,b_2}(\mathbb{T}^m)$.

Рассмотрим m-кратный тригонометрический полином

$$T_{\overline{n}}(\overline{x}) = T_{n_1,\dots,n_m}(\overline{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{k}, \bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^m k_j x_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$. Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 < +\infty$, $b_1, b_2 \in SV[1, +\infty)$ *и выполняется условие* (1). *Тогда для полинома* $T_{\overline{n}}$ *верно неравенство*

$$\|T_{\overline{n}}\|_{p,\tau_1,b_1} \le C\Big[\int_{2^{-m}\prod\limits_{j=1}^m n_j^{-1}}^1 \left(\frac{b_1(1/t)}{b_2(1/t)}\right)^{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}} \frac{dt}{t}\Big]^{\frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_1\tau_2}} \|T_{\overline{n}}\|_{p,\tau_2,b_2}.$$

Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 < +\infty$, *функции* b_1, b_2 *удовлетворяют условиям теоремы 1 и* $\frac{b_1}{b_2}$ *-логарифм со степенью или* $\frac{b_1}{b_2} \in SVL[1, \infty)$. *Тогда для полинома* $T_{\overline{n}}$ *имеет место неравенство*

$$\Big\|T_{\overline{n}}\Big\|_{p,\tau_1,b_1} \le C \frac{b_1(\prod\limits_{j=1}^m n_j)}{b_2(\prod\limits_{j=1}^m n_j)} \left(\log \prod_{j=1}^m (n_j+1)\right)^{\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}} \Big\|T_{\overline{n}}\Big\|_{p,\tau_2,b_2}.$$

В случае $n_1 = \dots = n_m$ *эта оценка точна по порядку.*

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \tau_1 < \tau_2 < \infty$, *функции* b_1, b_2 *удовлетворяют условиям следствия. Если* $f \in L_{p,\tau_2,b_2}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{b_1(n^m)}{b_2(n^m)}\right)^{\tau_1} \frac{1}{n\left(\log(n+1)\right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}} E_n^{\tau_1}(f)_{p,\tau_2,b_2} < +\infty, \tag{2}$$

то $f \in L_{p,\tau_1,b_1}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$E_n(f)_{p,\tau_1,b_1} \le C\Big\{\frac{b_1(n^m)}{b_2(n^m)}\big(\log(n+1)\big)^{\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}}$$

$$+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{b_1(k^m)}{b_2(k^m)}\right)^{\tau_1}\frac{1}{k\big(\log{(k+1)}\big)^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}E_k^{\tau_1}(f)_{p,\tau_2,b_2}\right]^{\frac{1}{\tau_1}}\Bigg\}.$$

Доказана неулучшаемость условия (2) на классе

$$E^{\lambda}_{p,\tau,b}=\{f\in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m):\ E_n(f)_{p,\tau,b}\le\lambda_n, n=1,2,...\},$$

где $\lambda=\{\lambda_n\}$ — последовательность чисел $\lambda_n\downarrow 0$, при $n\to+\infty$.

Отметим, что в случае $b_1(t)=b_2(t)=1, t\in[1,\infty)$, теорема 2 доказана в [13] и следствие совпадает с леммой 10 в [10] (при $\mu=0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edmunds D. E., Kerman P., Pick L.* Optimal Sobolev imbeddings involing rearrangement-invariant quasinorms // J. Func. Anal. 2000. Vol. 170. P. 307–355.

2. *Neves J. S.* Lorentz – Karamata spaces, Bessel and Riesz potential and embeddings // Disser. Math. 2002. Vol. 405. P. 1–46.

3. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^{ω} // Изв. АН СССР, серия матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

4. *Андриенко В. А.* Вложения некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.

5. *Стороженко Э. А.* Теоремы вложения и наилучшие приближения // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 2(6). С. 230–241.

6. *Коляда В. И.* Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Матем. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 195–215.

7. *Темиргалиев Н.* О вложении в некоторые пространства Лоренца // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 83–85.

8. *Темиргалиев Н.* О вложении классов H_p^{ω} в пространства Лоренца // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 160–172.

9. *Коляда В. И.* Перестановки функций и теоремы вложения // УМН. 1989. Т. 44. С. 61–95.

10. *Шерстнева Л. А.* О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 48–58.

11. *Акишев Г.* О вложении некоторых классов функций многих переменных в пространство Лоренца // Изв. АН Каз.ССР. Сер. физ.-матем. 1982. № 3. С. 47–51.

12. *Смаилов Е. С., Акишев Г.* Теоремы вложения в пространство Лоренца и их приложения // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-матем. 1984. № 1. С. 66–70.

13. *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21.

УДК 517.521.2

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЛОМАНЫХ

Г. Г. Акниев (Махачкала, Россия)
hasan.akniyev@gmail.com

Пусть $m \geq 2$ — некоторое натуральное число. Обозначим через $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ систему узлов на $[0,\pi]$, таких что $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = \pi$, и обозначим $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$. Также выберем m вещественных чисел $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m = y_0$. Через $l(x)$ обозначим непрерывную функцию, которая на каждом отрезке Δ_i представляется в виде $l(x) = l_i(x) = \alpha_i \cos x + \beta_i$, причем $l(x_i) = y_i$, $(0 \leq i \leq m)$. Мы будем называть такие функции $l(x)$ тригонометрическими ломаными. Пусть $f_r(x) = \varphi_r(\cos x)$, где $\varphi_r(t)$ — некоторая r-раз дифференцируемую функцию на $[-1,1]$. Рассмотрим частный случай $l(x)$, когда $x_i = \frac{\pi i}{m}$ и $y_i = f_r(x_i)$ $(0 \leq i \leq m)$, другими словами, когда тригонометрическая ломаная $l(x)$ «вписана» в функцию $f_r(x)$. Мы будем обозначать такую функцию $l_{f_r}(x)$. Целью данной работы является оценка величин $|R_n(l,x)| = |l(x) - S_n(l,x)|$ когда $n \to \infty$ и $|f_r(x) - S_n(l_{f_r}, x)|$, когда $n, m \to \infty$, где $S_n(f,x)$ — это частичная сумма ряда Фурье порядка n функции f. Нами были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если $l(x)$ — тригонометрическая ломаная и $S_n(l,x)$ — частичная сумма ряда Фурье данной ломаной, тогда мы можем оценить $|l(x) - S_n(l,x)|$ следующим образом:*

$$|l(x) - S_n(l,x)| \leq \frac{c(l)}{n}, \quad x \in [0,\pi],$$

$$|l(x) - S_n(l,x)| \leq \frac{c(l,\varepsilon)}{n^2}, \quad |x - x_i| \geq \varepsilon.$$

Теорема 2. *Для тригонометрической ломаной $l_{f_r}(x)$, совпадающей с функцией $f_r(x)$ в точках $x_i = \frac{\pi i}{m}$ справедлива следующая оценка:*

$$|l(x) - S_n(l,x)| \leq \frac{1}{\pi n} \int_{-1}^{1} \left|\varphi''(t)\right| dt, \quad m \geq 2,\ x \in [0,\pi].$$

Теорема 3. *Если $l_{f_r}(x)$ — это тригонометрическая ломаная, вписанная в функцию $f_r(x)$ и $S_n(l_{f_r}, x)$ — ее сумма Фурье порядка n, тогда при $r \geq 1$ справедлива оценка*

$$|f(x) - S_n(l_{f_r}, x)| \leq c(\varphi) \ln n \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^{r+1}}\right), \quad n, m \to \infty,$$

в частности

$$|f(x) - S_n(l_{f_r}, x)| \le \frac{c(\varphi)\ln n}{n^{r+1}}, \quad m = n^{\frac{r+1}{2}}, \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1968. Т. 3. 662 с.

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННЫМ С ПОГРЕШНОСТЬЮ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ[1]

Р. Р. Акопян (Екатеринбург, Озерск, Россия)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G односвязная область комплексной плоскости с границей Γ – замкнутой спрямляемой жордановой кривой; γ_1 – произвольное измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 — дополнение γ_1 до Γ, т.е., $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$. Обозначим через $H(G) = H^\infty(G)$ пространство Харди аналитических и ограниченных функций в G. Рассмотрим класс Q функций f из $H(G)$ таких, что справедливо неравенство $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \le 1$.

Производная функции Грина области G по внешней нормали к кривой Γ называется плотностью гармонической меры относительно G и точки z, которую обозначим $P(z, \zeta)$. Соответственно, гармоническая мера $w(z, \gamma, G)$ измеримого подмножества γ границы Γ относительно области G и точки z выражается формулой $w(z, \gamma, G) = \int\limits_\gamma P(z, \zeta)\,|d\zeta|$.

Рассматривается следующая задача оптимального восстановления. Пусть для неизвестной функции f из класса Q на γ_1 задана функция $q \in L^\infty(\gamma_1)$ такая, что $\|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим восстановить значение производной $f'(z_0)$, $z_0 \in G$, по q наилучшим (оптимальным) методом. В качестве множества $\mathcal{R}$ методов восстановления, из которых выбирается оптимальный, рассматриваются множество $\mathcal{O}$ всех функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, или $\mathcal{B}$ ограниченных функционалов, или $\mathcal{L}$ линейных функционалов. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$, величина

$$\mathcal{U}(T, \delta) := \sup\left\{|f'(z_0) - Tq| \colon f \in Q,\ q \in L^\infty(\gamma_1),\ \|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

[1]Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

есть погрешность восстановления значения производной в точке z_0 на классе Q по граничным значениям функции на γ_1, заданным с погрешностью δ относительно нормы $L^\infty(\gamma_1)$. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) := \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T\in\mathcal{R}\right\} \tag{1}$$

есть *величина оптимального восстановления* производной в точке z_0 с помощью методов $\mathcal{R}$ на классе Q по граничным значениям на γ_1, заданным с погрешностью δ.

Пусть w — функция, гармоническая в области G, значение которой в точке z определяется равенством $w(z) := w(z,\gamma_1,G)$. Введем обозначения $\alpha = \omega(z_0)$ и $\beta = 1-\omega(z_0)$; кроме того, $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$ для длины, направления и аргумента градиента w; т.е.

$$\kappa = \left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = \overline{\nabla} w(z_0)/\left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g является функцией, однолистно отображающей область G на единичный круг и удовлетворяющая условиям $g(z_0)=0$, $g'(z_0)>0$. Рассмотрим положительную величину, определяемую равенством $\eta(z_0) = 2g'(z_0)/\kappa(z_0)$, при $\kappa(z_0)\neq 0$, и равную $+\infty$ иначе.

Для $\delta \geq 0$ определим f_δ функцию Сегё (функцию максимального модуля) равенством

$$f_\delta(z) := \exp\left(u_\delta(z) + i v_\delta(z)\right),\ z\in G,$$

в котором функция $u_\delta(z) = \ln\delta\, w(z)$, а $v_\delta(z) = \ln\delta\, v(z)$, где v является гармонически сопряженной w. Для $\delta\geq 0$ и $z_0\in G$, удовлетворяющим условию $|\ln\delta| < \eta(z_0)$, определим в области G функцию

$$F_\delta(z) := \frac{g(z)-g_0}{1-g(z)\,\overline{g_0}}\, f_\delta(z), \quad g_0 := -e^{it}\frac{\kappa(z_0)\,\ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it}\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

При $\delta\geq 0$ и $z_0\in G$, удовлетворяющим неравенству $|\ln\delta|\geq\eta(z_0)$, определим на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ функционал

$$(T^1_\delta f)(z) := e^{-it}\int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\,\frac{f_\delta(z_0)}{f_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\,|d\zeta|,$$

где

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta) + \ln\delta\,\kappa(z_0)\,P(z_0,\zeta).$$

Отдельно выделим случай $\delta = 1$, когда $\ln\delta = 0$ и справедливо равенство $F_1 = g$. В этом случае определим функционал T^1_1 равенством

$$T^1_1 f := \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{g'(z_0)}{g(\zeta)}\, f(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема 1. *Для величин оптимального восстановления* (1) *справедливы следующие утверждения.*

(I) *В случае* $|\ln\delta| \geq \eta(z_0)$ *справедливы равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|.$$

Экстремальными являются функции вида cf_δ, $|c| = 1$, *и оптимальным методом восстановления в задаче* (1) *является функционал* T^1_δ.

(II) *В случае* $|\ln\delta| < \eta(z_0)$ *справедливы следующие равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\ \frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right).$$

Экстремальными являются функции вида cF_δ, $|c| = 1$.

(III) *При* $\delta = 1$ *справедливы следующие равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(1) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(1) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(1) = g'(z_0).$$

Экстремальными являются функции вида cg, $|c| = 1$, *и оптимальным методом восстановления в задаче* (1) *является функционал* T^1_1.

Задачам оптимального восстановления на классах аналитических функций посвящена монография [1]. Близкие задачи оптимального восстановления оператора дифференцирования в пространствах Харди H^p, $1 \leq p \leq \infty$, функций, аналитических в полосе и кольце, рассматривались в работах [2], [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of analytic functions. Huntington, N.Y. : Nova Science, 2000.

2. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе функций аналитических в полосе // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 60, № 1. С. 9–16.

3. *Akopyan R. R.* Approximation of the Differentiation Operator on the Class of Functions Analytic in a Ring // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, № 2. P. 6–13.

УДК 511.14

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (*АКЧ*). 2. ВЫРАЖЕНИЕ АКЧ ЧЕРЕЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В. Д. Александров, О. В. Александрова

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

avd-crystal@mail.ru

Альтернативные комплексные числа ($AKЧ$) $R = u + vi$, имеющие модуль $[R] = u + v$, и аргумент $\psi = \mathrm{Arg}\ \mathrm{tg}\sqrt{\dfrac{v}{u}}$, выражены через гиперболические функции. Установлена связь параметров $AKЧ$ с параметрами гиперболы, эллипса и окружности.

Альтернативные комплексные числа, модуль, аргумент, свойства, геометрическая интерпретация, гипербола, эллипс, окружность, гиперболические функции.

В работе [1] было введено понятие альтернативных комплексных чисел (***АКЧ***). Альтернативное комплексное число $R = u+vi$ изображается в плоскости отрезком прямой OM с проекциями на соответствующие оси x и yi, либо вектором $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$ под углом ψ к оси x (рис. 1).

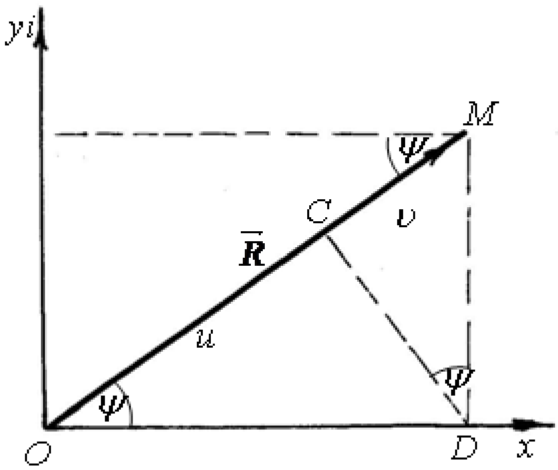


Рис. 1

Отрезок $|OC| = u$ связан с действительной осью x

$$u = x\cos\psi.$$

Отрезок $|CM| = v$ связан с мнимой осью yi

$$v = y\sin\psi.$$

Таким образом, в тригонометрической форме

$$R = x\cos\psi + yi\sin\psi, \qquad [R] = x\cos\psi + y\sin\psi.$$

Угол ψ называется *аргументом* ***АКЧ*** и обозначается

$$\psi = \mathrm{Arg}\ [R].$$

Угол ψ связан с числами u и v следующим образом:

$$\frac{y \sin\psi}{x\cos\psi} = \frac{v}{u}.$$

Так как $\dfrac{y}{x} = \mathrm{tg}\psi$, то получаем $\mathrm{tg}\psi = \sqrt{\dfrac{v}{u}}$, $\quad \psi = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{v}{u}}$,

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{u}{[R]}} = \sqrt{\frac{u}{u+v}}, \qquad \psi = \arccos\sqrt{\frac{u}{u+v}},$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{v}{[R]}} = \sqrt{\frac{v}{u+v}}, \qquad \psi = \arcsin\sqrt{\frac{v}{u+v}}.$$

Кроме того, для альтернативных комплексных чисел $(u+vi)$ имеется связь между числами u и v и аргументом ψ. Поскольку $R = u+v$, $\mathrm{tg}\psi = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$, то отсюда следует $v = u\mathrm{tg}^2\psi \quad R = u(1+\mathrm{tg}^2\psi) \Rightarrow u = \dfrac{R}{1+\mathrm{tg}^2\psi} \Rightarrow$ $u = R\cdot\cos^2\psi$. Аналогично, $v = R\cdot\sin^2\psi$.

Длина отрезка OM называется *модулем* ***АКЧ*** $[R]$, равным сумме длин u и v

$$[R] = |u+v|.$$

В отличие от обычного модуля $|\ \ |$, относящегося к знаку минус «$-$», модуль $[\ \ ]$ относится лишь к мнимому числу i.

Альтернативные комплексные числа можно показывать не только на окружности в координатах $x - yi$, но и на гиперболе. Рассмотрим часть гиперболы на рис. 2 с полуосью OP и проведем вектор $\vec{R}$ от точки O до точки M.

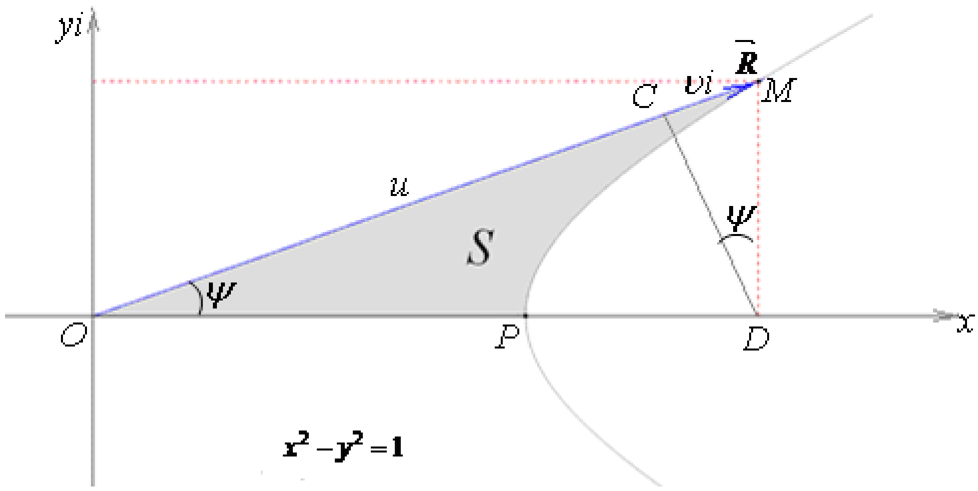


Рис. 2

Параметр ψ в радианных единицах соответствует длине дуги PM. Опуская перпендикуляр DC на сторону OM, получим два треугольника $\triangle OCD$ и $\triangle MDC$. Пусть OM есть длина комплексного числа $R = u+vi$, т. е. $[R] = u + v$. Из $\triangle OCD$ имеем $|OC| = |OD| \cdot \operatorname{ch}\psi$, а из $\triangle MDC$ $|MC| = |DM| \cdot \operatorname{sh}\psi$.

Так как $|OM| = [R] = u + v$, $|OC| = u$, $|CM| = v$, $|OD| = x$, $|DM| = y$, то $u = x \cdot \operatorname{ch}\psi$, $v = y \cdot \operatorname{sh}\psi$.

Следовательно, в гиперболической форме альтернативное комплексное число можно записать в виде

$$R = x \operatorname{ch}\psi + iy \operatorname{sh}\psi.$$

По модулю $[R] = x \operatorname{ch}\psi + y \operatorname{sh}\psi$.

Для изображения комплексных чисел на гиперболе совместим окружность радиусом $R_O = |OM_1|$ и равностороннюю гиперболу (рис. 3).

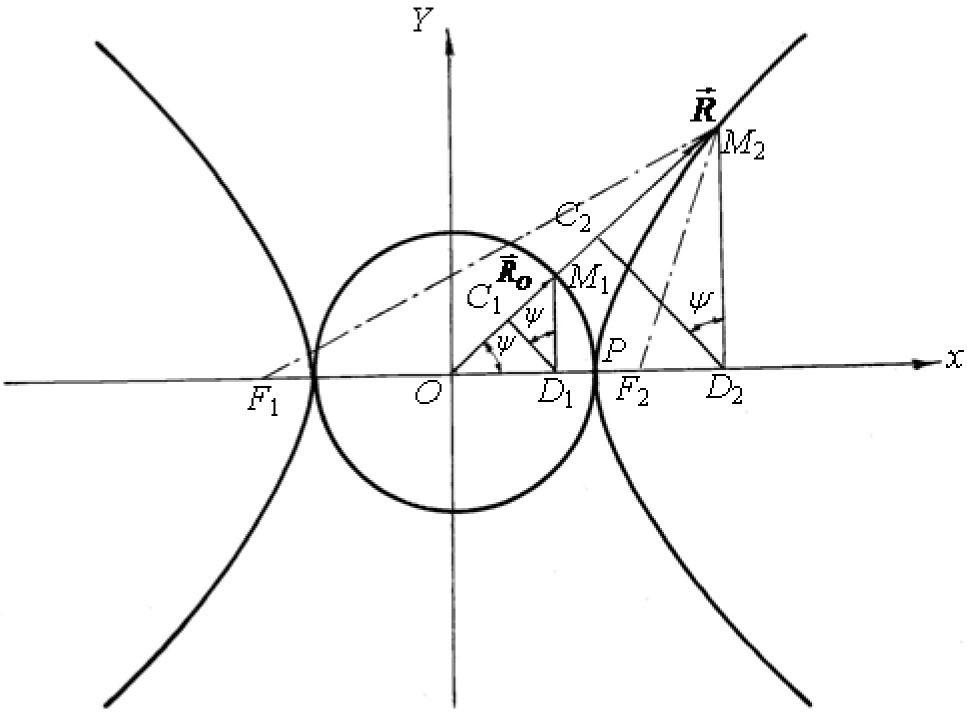


Рис. 3

Поскольку параметры альтернативного комплексного числа $R_1 = u_1 + v_1 i$ через окружность определяются в виде:

$$[R_O] = u_1 + v_1, \quad \psi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{v_1}{u_1}}, \quad u_1 = R_O \cos^2\psi, \quad v_1 = R_O \sin^2\psi,$$

то аналогично параметры комплексного числа $R_2 = u_2 + v_2 i$ через равностороннюю гиперболу могут определяться в виде:

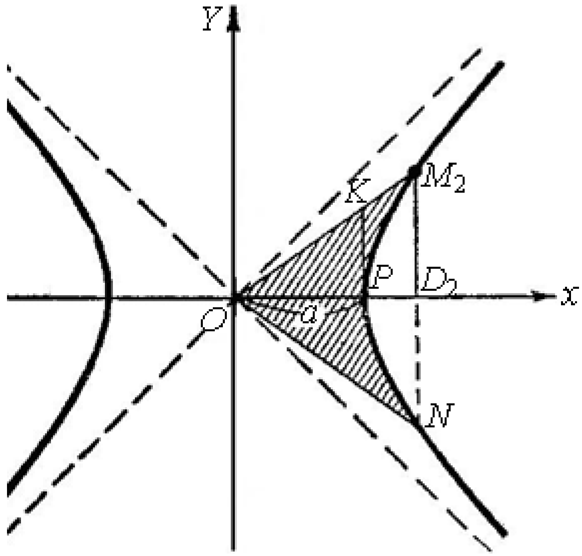
$$[R] = u_2 + v_2, \quad \psi = \operatorname{arth}\sqrt{\frac{v_2}{u_2}}, \quad u_2 = R_O \operatorname{ch}^2\psi, \quad v_2 = R_O \operatorname{sh}^2\psi.$$

Это следует из $\triangle OM_1D_1$, где $[R_O] = |OM_1|$, $u_1 = |OC_1|$, $v_1 = |C_1M_1|$, $|OD_1| = x_1$, $|DM_1| = y_1$ и из $\triangle OM_2D_2$, где $[R] = |OM_2|$, $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |C_2M_2|$, $|OD_2| = x_2$, $|DM_2| = y_2$.

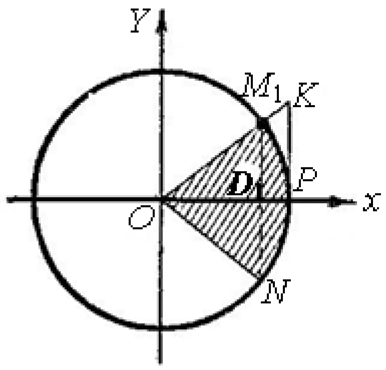
Следовательно, $u_1 = x_1 \operatorname{ch}\psi$, $v_1 = y_1 \operatorname{sh}\psi$, $\dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{y_1 \operatorname{sh}\psi}{x_1 \operatorname{ch}\psi} = \dfrac{y_1}{x_1}\operatorname{th}\psi$ и $u_2 = x_2 \operatorname{ch}\psi$, $v_2 = y_2 \operatorname{sh}\psi$, $\dfrac{v_2}{u_2} = \dfrac{y_2 \operatorname{sh}\psi}{x_2 \operatorname{ch}\psi} = \dfrac{y_2}{x_2}\operatorname{th}\psi$.

Поскольку $\dfrac{y_1}{x_1} = \operatorname{th}\psi$, то $\dfrac{v_1}{u_1} = \operatorname{th}^2\psi$ и $\operatorname{th}\psi = \sqrt{\dfrac{v_1}{u_1}}$, а также $\dfrac{y_2}{x_2} = \operatorname{th}\psi$, то $\dfrac{v_2}{u_2} = \operatorname{th}^2\psi$ и $\operatorname{th}\psi = \sqrt{\dfrac{v_2}{u_2}}$.

Для изображения комплексных чисел на равносторонней гиперболе важно показать, что аргумент ψ, определяемый по окружности $\psi = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{v}{u}}$, равен аргументу ψ, определяемому по гиперболе $\psi = \operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{v}{u}}$. Для этого рассмотрим гиперболические и круговые сегменты, показанные на рис. 4 *а, б* [2].



а



б

Рис. 4

Обозначим через $\dfrac{S}{2}$ площадь гиперболического сектора M_2OP (рис. 4, *а*) и припишем величине S (площади двойного сектора) знак, который имеет угол поворота ψ. Тогда отношения направленных отрезков DM_2, OD_2, PK (построенных для точки M_2 гиперболы) аналогичны отношениям отрезков DM_1, OD_1, PK на окружности. Полуось a выражается через S следующим образом

$$\frac{|DM_2|}{a} = \operatorname{sh}\frac{S}{a^2}; \qquad \frac{|OD_2|}{a} = \operatorname{ch}\frac{S}{a^2}; \qquad \frac{|PK|}{a} = \operatorname{th}\frac{S}{a^2}. \tag{1}$$

Эти соотношения получаются из рассмотрения площади сегмента POM_2 и площади треугольника $\triangle OM_2D_2$:

$$\text{пл.}PM_2O = \int\limits_a^x \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} =$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}, \qquad \text{пл.}\triangle OM_2D_2 = \frac{xy}{2}.$$

Тогда пл.$M_2PD_2 =$ пл.$\triangle OM_2D_2 -$ пл.$PM_2O = \dfrac{a^2}{2}\ln\dfrac{x+y}{a}$ или

$$S = 2\cdot\text{пл.}M_2PD_2 = a^2\ln\frac{x+y}{a}.$$

Решая это уравнение совместно с каноническим уравнением гиперболы $x^2-y^2=a^2$, находим

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{S/a^2}+e^{-S/a^2}}{2} = \operatorname{ch}\frac{S}{a^2}; \qquad \frac{y}{a} = \frac{e^{S/a^2}-e^{-S/a^2}}{2} = \operatorname{sh}\frac{S}{a^2}.$$

Рассмотрим теперь окружность $x^2+y^2=a^2$ (рис. 4 *б*). Величина $\dfrac{S}{a^2}$ (S — площадь удвоенного кругового полусектора OM_1K) дает угол $\angle KOP$, так что для окружности (из подобия треугольников $\triangle OD_1M_1$, $\triangle OPK$) можно записать:

$$\frac{|D_1C_1|}{a} = \sin\frac{S}{a^2}; \quad \frac{|OD_1|}{a} = \cos\frac{S}{a^2}; \quad \frac{|PK|}{a} = \operatorname{tg}\frac{S}{a^2}. \tag{2}$$

Из выражения (1) и (2) следует:

— для окружности $x = a\cos\psi$, $y = a\sin\psi$, где a — радиус окружности ($a = R_O$);

— для равносторонней гиперболы $x = a\operatorname{ch}\psi$, $y = a\operatorname{sh}\psi$, где $\psi = \dfrac{S}{a^2}$, где a — длина полуоси $|OP|$.

Аналогичные выкладки можно получить, рассматривая «связку» эллипса с неравносторонней гиперболой с полуосями a и b (рис. 5 при $a > b$, рис. 6 при $a < b$).

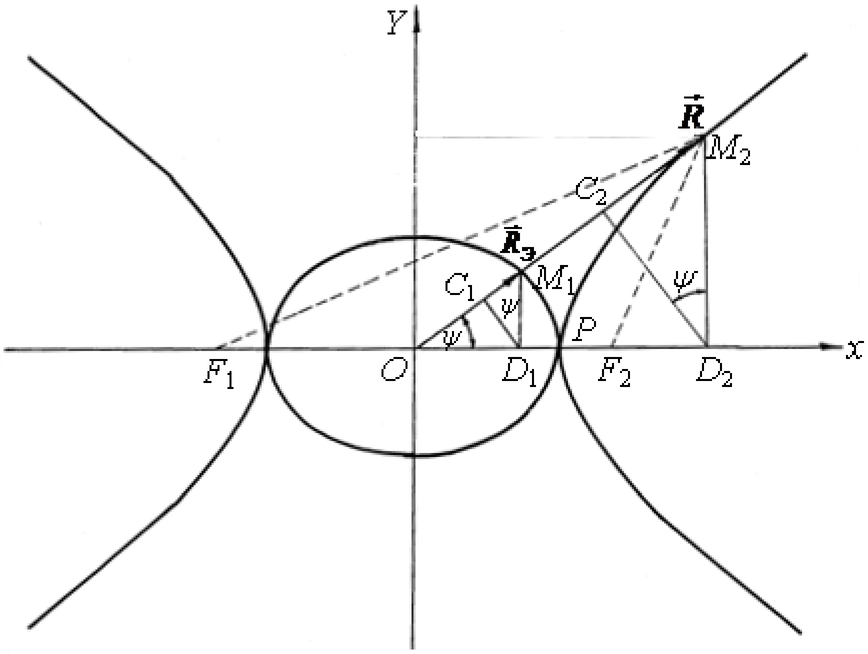


Рис. 5

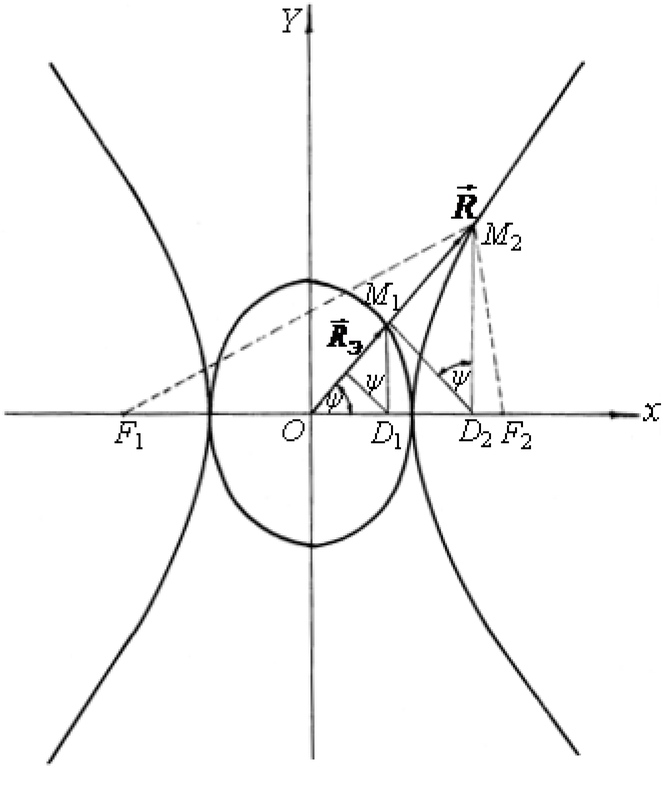


Рис. 6

Определимся с комплексными числами на эллипсе (рис. 5 и рис. 6).

Пусть центральный радиус $R_Э$ эллипса задан в виде комплексного числа $R_Э = u_1 + v_1 i$. Рассмотрим треугольники $\triangle OD_1C_1$, $\triangle OD_1M_1$, $\triangle M_1D_1C_1$, где $|OD_1| = x$, $|D_1M_1| = y$, $|OM_1| = [R_Э]$, $|OC_1| = u_1$,

$|M_1C_1| = v_1$. Откуда $[R_Э] = u_1 + v_1$, $u_1 = x \cdot \cos\psi$, $v_1 = y \cdot \sin\psi$, или $\dfrac{y}{x} = \mathrm{tg}\psi$ или

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\psi = \sqrt{\frac{v_1}{u_1}} \quad \text{и} \quad \psi = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{v_1}{u_1}}.$$

Как видим, комплексные числа *по версии* ***АКЧ*** имеют одинаковый вид, как на окружности, так и на эллипсе. Однако в данном случае центральный радиус $R_Э$ для эллипса не есть постоянная величина, как для окружности, а есть функция от угла ψ. В полярных координатах эта функция имеет вид

$$R_Э = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi}}. \tag{3}$$

Из (3) видно, что центральный радиус изменяется от полуоси a до b (и наоборот) по мере вращения радиус-вектора $\vec{R}_Э$ вокруг центра эллипса.

Следовательно, и параметры комплексного числа u_1 и v_1 $u_1 = R_Э \cdot \cos^2\psi$ и $v_1 = R_Э \cdot \sin^2\psi$ связаны с полуосями эллипса a и b.

Для изображения комплексных чисел на неравносторонней гиперболе также следует показать, что аргумент ψ как на эллипсе, так и на этой гиперболе имеет одинаковый вид. Используя те же обозначения, как и на рис. 1–2, можно записать для гиперболы

$$\text{пл.}PM_2O = \int\limits_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \text{ т.к. пл.}\triangle OM_2D_2 = \frac{xy}{2};$$

$$S = \text{пл.}PM_2D_2 = \text{пл.}\triangle OM_2D_2 - \text{пл.}\triangle PM_2O = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right). \tag{4}$$

Решая уравнение (4) совместно с уравнением гиперболы, получим

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{S/ab} + e^{-S/ab}}{2} = \mathrm{ch}\,\frac{S}{ab}; \qquad \frac{y}{a} = \frac{e^{S/ab} - e^{-S/ab}}{2} = \mathrm{sh}\,\frac{S}{ab};$$

или

$$\frac{x}{a} = \mathrm{ch}\,\psi; \qquad \frac{y}{b} = \mathrm{sh}\,\psi, \tag{5}$$

где $\psi = \dfrac{S}{ab}$.

У эллипса площадь сегмента OPM_1 вычисляется по формуле $S = \int\limits_0^\psi y(x)dx$, где $y(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (уравнение эллипса), т.е. $S = \int\limits_0^\psi \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = ab\psi$, откуда получаем $\psi = \dfrac{S}{ab}$.

Таким образом, сохраняются отношения отрезков D_1M_1 и OD_1 к полуоси эллипса a, так же, как и отношения отрезков D_2M_2 и OD_2 к полуоси гиперболы:

$$\frac{|D_1M_1|}{a} = \sin\frac{S}{ab} = \sin\psi, \qquad \frac{|D_2M_2|}{a} = \operatorname{sh}\frac{S}{ab} = \operatorname{sh}\psi,$$
$$\frac{|OD_1|}{a} = \cos\frac{S}{ab} = \cos\psi, \qquad \frac{|OD_2|}{a} = \operatorname{ch}\frac{S}{ab} = \operatorname{ch}\psi.$$

Точно так же, как и для равнобочной гиперболы, комплексное число $R = u_2 + v_2 i$ (при тех же обозначениях) на гиперболах в общем виде (как при $a > b$, так и при $a < b$) имеют такие же параметры (рис. 6) $[R] = |OM_2|$, $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |C_2M_2|$, $|OD_2| = x$, $|D_2M_2| = y_2$, $[R] = u_2 + v_2$, $u_2 = x\operatorname{ch}\psi$, $v_2 = y\operatorname{sh}\psi$, $\psi = \operatorname{arcth}\sqrt{\dfrac{v_2}{u_2}}$.

В отличие от эллипса, характеризующегося центральным радиусом $R_Э$, у гиперболы радиус отсутствует. Изобразив действительную гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в координатах $yi - x$, получим «комплексный» (мнимый) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(y)^2}{b^2} = 1$ с мнимым центральным радиусом, который, по-видимому, можно изобразить в виде $[R_Э] = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2\operatorname{ch}^2\psi - a^2\operatorname{sh}^2\psi}}$.

Как видим для эллипса и гиперболы как модуль $[R_Э]$ комплексного числа, так и аргумент ψ связаны с параметрами этих фигур (a, b, R, эксцентриситетом $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, фокальными радиусами и др.).

Обобщая изложенное выше, альтернативные комплексные числа, можно систематизировать следующим образом:

— на окружности (рис. 3) $R_O = u_1 + v_1 i$, $[R_O] = u_1 + v_1$, $[R_O] = \mathrm{const}$, $\psi = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{v_1}{u_1}}$, $\psi = \dfrac{S}{a^2}$, $u_1 = [R_O]\cos^2\psi$, $v_1 = [R_O]\sin^2\psi$, где $u_1 = |OM_1|$, $v_1 = |M_1C_1|$,

— на равносторонней гиперболе (рис. 3) $R = u_2 + v_2 i$, $[R] = u_2 + v_2$, $[R] \neq \mathrm{const}$, $\psi = \operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{v_2}{u_2}}$, $\psi = \dfrac{S}{a^2}$, $u_2 = [R]\operatorname{ch}^2\psi$, $v_2 = [R]\operatorname{sh}^2\psi$, где $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |M_2C_2|$,

— на эллипсе (рис. 5–6) $R_Э = u_1 + v_1 i$, $[R_Э] = u_1 + v_1$, $b \le [R_Э] \le a$ (при $a > b$), $b \ge [R_Э] \ge a$ (при $a < b$), $\psi = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{v_1}{u_1}}$, $\psi = \dfrac{S}{ab}$, $u_1 = [R_Э]\cos^2\psi$, $v_1 = [R_Э]\sin^2\psi$, где $u_1 = |OC_1|$, $v_1 = |M_1C_1|$,

— на неравносторонней гиперболе (рис. 5–6) $R = u_2 + v_2 i$, $[R] = u_2 + v_2$,

$[R] \neq \mathrm{const}$, $\psi = \operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{v_2}{u_2}}$, $\psi = \dfrac{S}{ab}$, $u_2 = [R]\operatorname{ch}^2\psi$, $v_2 = [R]\operatorname{sh}^2\psi$, где $u_2 = |OC_2|$, $v_2 = |M_2C_2|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. Д.* Альтернативные комплексные числа (АКЧ). 1. Изображенные на плоскости. Свойства модулей // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2016. С. 27–31.

2. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 870 с.

УДК 517.935.2

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Д. В. Мельничук (Саратов, Россия)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru, meldm007@gmail.com

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели технических систем в форме систем связанных посредством условий связи и граничных условий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$, где t — время, рассмотрены в [1–4]. Основные теоремы о быстрых алгоритмах проверки устойчивости КДС сформулированы и доказаны в [1–3], а методы параметрического синтеза, т.е. выбора параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, рассмотрены в [2, 4]. После параметрического синтеза требуется выполнить прямое численное моделирование переходных процессов в нелинейных КДС, что является нетривиальной вычислительной задачей. Уравнения движения КДС можно привести к виду, аналогичному [2, 4]

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{h} = \int\limits_S \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) dS, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})|_S = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{y}(0) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ — независимые пространственные координаты, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ — область, занятая объектами управления с распределенными по пространству параметрами, $S = \partial\Omega$ — граница области, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов управления с распределенными по пространству параметрами, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_h}$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_\mu} \times \mathbb{R}^{N_t} \to \mathbb{R}^{N_y}$, операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи; $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{N_\mu}$ —- параметры, характеризующие типовые нелинейности, $\boldsymbol{\mu}_t \in \mathbb{R}^{N_t}$ —- параметры, характеризующие нестационарность (зависимость от времени некоторых коэффициентов модельных уравнений); $\dot{()} = d()/dt$ либо $\dot{()} = \partial()/\partial t$. Полагаем, что функция $\mathbf{f}$ дифференцируема по $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ дифференцируемы по Фреше по $\mathbf{u}$, а также дифференцируемы по $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$.

Дискретизация уравнений в частных производных по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина. Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{W}_k$:$\Omega \to \mathbb{R}^{N_u}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — полная система функций в области Ω; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_s)$, $\Gamma_k : S \to \mathbb{R}^{N_G}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — полная система функций на границе $S = \partial\Omega$. Полагаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} u_k(t)\mathbf{W}_k(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Для того, чтобы приближенно выполненить уравнения (2), требуем

$$\begin{gathered}
\int\limits_\Omega \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega = \int\limits_\Omega \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t) \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega, \quad k = \overline{1, N_\Omega}, \\
\int\limits_S \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS = 0, \quad k = \overline{1, N_S}.
\end{gathered} \tag{5}$$

где $() \cdot ()$ — скалярное произведение векторов соответствующей размерности. Из (1), (3), (4), (5) следует задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (достаточно большой размерности)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t), \ \mathbf{Y}(0) = 0, \ \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{N_y}, u_1, u_2, \ldots, u_{N_\Omega})^T, \tag{6}$$

приведение которой к нормальной форме (6) аналогично нахождению вектора $\dot{\mathbf{Y}}$ по известному в текущий момент времени t вектору $\mathbf{Y}$. Далее (6) интегрируется численно жестко устойчивым ФДН-методом [5]. При этом наибольшие затраты времени связаны с вычислением матрицы Якоби $\partial\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial\mathbf{Y}$.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения КДС (1)–(3) и ее дискретного аналога (6) имеют вид

$$
\begin{gathered}
\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{h}} \hat{\mathbf{h}}, \\
\hat{\mathbf{h}} = \int\limits_S \frac{\partial \mathbb{H}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} dS, \quad \dot{\hat{\mathbf{u}}} = \mathbb{L}^{(F)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}, \dot{\hat{\mathbf{y}}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\
\mathbb{L}^{(F)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}, \dot{\hat{\mathbf{y}}}) = \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} + \\
+ \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t t)}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \dot{\hat{\mathbf{y}}}, \\
\mathbb{L}^{(G)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}) \Big|_S = 0, \quad S = \partial\Omega, \\
\mathbb{L}^{(G)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{\partial \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{y}} \hat{\mathbf{y}},
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\dot{\hat{\mathbf{Y}}} = \frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{Y}} \hat{\mathbf{Y}}. \tag{8}
$$

Теорема 1. *Пусть функция $\mathbf{f}$ дифференцируема по $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$, операторы $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$ дифференцируемы по Фреше по $\mathbf{u}$, а также дифференцируемы по $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$. Тогда, в предположении $\hat{\mathbf{Y}} = [Y_j]$, $Y_j = \delta_k^j$, $k, j = \overline{1, N_y + N_\Omega}$, где δ_k^j — символ Кронекера, k-й столбец матрицы Якоби $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial \mathbf{Y}$ может быть вычислен на основе применения к линейным уравнениям возмущенного движения КДС (7) того же самого варианта проекционного метода Галеркина, на основе которого из исходных нелинейных уравнений КДС (1)–(3) получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (6).*

Замечание 1. При численном интегрировании задачи Коши (6) матрица $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial \mathbf{Y}$ может быть вычислена с гораздо меньшей точностью, чем правые части $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)$, и в уравнениях возмущенного движения КДС (7) можно отбросить малые слагаемые, что существенно сокращает трудоемкость алгоритма.

Следствие 1. *Столбцы матрицы $\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_t)/\partial \mathbf{Y}$ могут быть вычислены независимо, т.е. параллельно.*

Замечание 2. Еще более эффективное распараллеливание вычислений при моделировании переходных процессов в нелинейных КДС может быть основано на том, что для различных $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\mu}_t$ численное интегрирование начально-краевых задач (1)–(3), т.е. задач Коши (6), может быть выполнено независимо, т.е. параллельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

2. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.

3. *Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К.* Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217.

4. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Мельничук Д. В., Портенко М. С.* Адаптивный алгоритм параметрического синтеза комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 465–475. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-465-475.

5. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М : Мир, 1999. 512 с.

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ПО ПРЯМОУГОЛЬНИКАМ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов (Екатеринбург, Россия)
Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Пусть $d \in \mathbb{N}$; $\mathbb{T}^d = [0, 2\pi)^d$ — d-мерный тор; $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неубывающая функция; $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ — множество определенных на $\mathbb{T}^d$ комплекснозначных функций f, для которых функция $\varphi(|f|)$ суммируема на $\mathbb{T}^d$; $C(\mathbb{T}^d)$ — множество функций, непрерывных на $\mathbb{T}^d$. Для $f \in L\,(\mathbb{T}^d)$ и вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$ с неотрицательными целочисленными координатами через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ будем обозначать значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции f в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\lambda \geq 1$. Кратный ряд Фурье функции f называется λ-сходящимся в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, если существует предел

$$\lim_{\min\{n_j : 1 \leq j \leq d\} \to +\infty} S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}), \tag{1}$$

рассматриваемый только по тем векторам $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$, для которых $1/\lambda \leq n_i/n_j \leq \lambda$, $1 \leq i, j \leq d$. В случае $\lambda = 1$ λ-сходимость называется сходимостью по кубам, а в случае $\lambda = +\infty$, то есть без ограничений на соотношения между координатами вектора $\mathbf{n}$, — сходимостью по Прингсхейму.

Известно [1], что если $f \in L(\ln^+ L)^d \ln^+ \ln^+ \ln^+ L(\mathbb{T}^d)$, то кратный тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду на $\mathbb{T}^d$.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

С другой стороны [2], для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует функция $f \in$ $\in C(\mathbb{T}^{2m})$, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию

$$\omega(f,\delta) = O\left(\ln^{-m}(1/\delta)\right), \quad \delta \to +0,$$

и такая, что ее ряд Фурье λ-расходится всюду для всех $\lambda > 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Положим

$$\Omega_\Lambda = \left\{ \mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d : \frac{1}{1+\lambda_{n_i}} \le \frac{n_i}{n_j} \le 1 + \lambda_{n_j},\ 1 \le i, j \le d \right\}.$$

Кратный ряд Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ назовем Λ-сходящимся в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, если существует предел (1), рассматриваемый только по векторам $\mathbf{n} \in \Omega_\Lambda$. Заметим, что если $\lambda_\nu \equiv \lambda - 1$ для некоторого $\lambda > 1$, то условие Λ-сходимости превращается в определенное выше условие λ-сходимости. А если $\lambda_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, то условие Λ-сходимости является более слабым, чем условие λ-сходимости при любом $\lambda > 1$.

Теорема 1. *Пусть невозрастающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\lambda_\nu = O\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{2}$$

функция $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ выпуклая на $[0,+\infty)$ и такая, что $\varphi(u)u^{-1}$ не убывает на $[u_0,+\infty)$, а функция $\varphi(u)u^{-1-\delta}$ убывает на $[u_0,+\infty)$ при некотором $u_0 \ge 0$ и любом $\delta > 0$. Предположим, что тригонометрический ряд Фурье любой функции $g \in \varphi(L)(\mathbb{T})$ сходится почти всюду на $\mathbb{T}$. Тогда для любого $d \ge 2$ кратный тригонометрический ряд Фурье любой функции f из класса $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$ Λ-сходится почти всюду на $\mathbb{T}^d$ [4].

Следствием теоремы 1 и результата работы [3] является следующая

Теорема 2. *Пусть невозрастающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2), $d \ge 2$. Тогда кратный тригонометрический ряд Фурье любой функции f из класса $L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)(\mathbb{T}^d)$ Λ-сходится почти всюду на $\mathbb{T}^d$* [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонов Н. Ю.* О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, вып. 2. С. 3–22.

2. *Бахвалов А. Н.* О λ-расходимости всюду ряда Фурье непрерывной функции многих переменных // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 4. С. 490–501.

3. *Antonov N. Yu.* Convergence of Fourier series // East Journal on Approximations. 1996. Vol. 2, № 2. P. 187–196.

4. *Antonov N. Yu.* On Λ-convergence almost everywhere of multiple trigonometric Fourier series // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, № 2. P. 14–21.

УДК 517.518+517.983

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)
vitalii.arestov@urfu.ru

Будет обсуждаться задача Стечкина [1] о наилучшем приближении оператора дифференцирования $D^k = d^k/dt^k$ в пространстве L_q на числовой прямой множеством $\mathcal{L}(N; L_r, L_s)$ линейных ограниченных операторов из L_r в L_s на классе

$$Q^n_{r,p} = \{x \in L_r \colon x^{(n)} \in L_p,\ \|x^{(n)}\|_p \le 1\}$$

при $0 \le k < n$. Задача состоит в исследовании величины

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{L}(N; L_r, L_s)\}, \qquad (1)$$

$$U(T) = \sup\{\|x^{(k)} - Tx\|_q \colon x \in Q^n_{r,p}\}.$$

Эта задача взаимосвязана с несколькими экстремальными задачами теории функций; в первую очередь — с точными неравенствами Колмогорова между классическими и неклассическим нормами последовательных производных дифференцируемых функций [1, 2].

В сообщении будет, в частности, обсуждаться новый случай задачи (1) для значений парметров $p = q = \infty$, $r = s = 2$. Соответствующее неравенство Колмогорова в данном случае имеет вид

$$\|f^{(k)}\|_C \le K\,(\vee f)^{\frac{n-k}{n}}\,\|f^{(n)}\|_{L_\infty}^{\frac{n-k}{n}},$$

где $\vee f$ – вариация функции f на оси $(-\infty, \infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

2. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

3. *Arestov V. V.* On the best approximation of the differentiation operator // Ural Math. J. 2015. Т. 1, № 1. P. 20–29.

[1]Исследования выполнены при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

УДК 517.5+517.982.27

О СРАВНЕНИИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН[1]

С. В. Асташкин (Самара, Россия)
astash56@mail.ru

Будем говорить, что система случайных величин (с.в.) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *мажорируется по распределению* системой с.в. $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega', \Sigma', \mathbb{P}')$, если для некоторого $C > 0$ и всех $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $z > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\Big\{\omega \in \Omega : \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(\omega)\Big| > z\Big\} \le C\mathbb{P}'\Big\{\omega' \in \Omega' : \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(\omega')\Big| > C^{-1}z\Big\}.$$

В докладе речь будет идти, главным образом, о некоторых результатах работы [1] о сравнении скалярных и векторнозначных линейных комбинаций с.в. с соответствующими линейными комбинациями функций Радемахера. определенных на $[0, 1]$ следующим образом:

$$r_i(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^i \pi t), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Приведем один из результатов.

Теорема 1. *Предположим, что система с.в.* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, *определенных на вероятностном пространстве* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, *мажорируется по распределению последовательностью Радемахера* $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$. *Тогда существует* $\tilde{C} > 0$ *такое, что для каждого банахова пространства* F *и всех* $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *и* $z > 0$ *имеет место следующее неравенство:*

$$\mathbb{P}\Big\{\omega \in \Omega : \Big\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(\omega)\Big\|_F > z\Big\} \le \tilde{C} m\Big\{t \in [0, 1] : \Big\|\sum_{i=1}^{m} x_i r_i(t)\Big\|_F > \tilde{C}^{-1} z\Big\}$$

(m — мера Лебега).

В доказательстве теоремы 1 используются некоторые следствия положительного решения так называемой гипотезы Бернулли, полученного в 2013 г. В. Бедножем и Р. Латалой [2, 3].

Планируется также обсудить связь результатов [1] с результатами недавно опубликованной работы Ж. Бургейна и М. Левко [4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект 1.1470.2016/1.4) и РФФИ (проект 17-01-00138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асташкин С. В.* О сравнении систем случайных величин с последовательностью Радемахера // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, № 6. С. 5–22.

2. *Bednorz W., Latała R.* On the suprema of Bernoulli Processes // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2013. Vol. 351. P. 131–134.

3. *Bednorz W., Latała R.* On the boundedness of Bernoulli processes // Annals Math. 2014. Vol. 180, № 3. P. 1167–1203.

4. *Bourgain J., Lewko M.* Sidonicity and variants of Kaczmarz's problem // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2017. Vol. 67, № 3. P. 1321–1352.

УДК 517.9

ДРОБНЫЙ ХАОС РАДЕМАХЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА[1]

С. В. Асташкин, К. В. Лыков (Самара, Россия)

astash56@mail.ru, alkv@list.ru

Работа продолжает исследования [1-7] по поведению в симметричных пространствах на $[0,1]$ системы Радемахера и производных от нее систем.

Как обычно, функции Радемахера определяются следующим образом: если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $r_j(t) := \operatorname{sign}(\sin(2^j \pi t))$, $j = 1, 2, \ldots$. Напомним классические неравенства Хинчина [1, 8]: для любого $p \geqslant 1$ и произвольных $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots,$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2} \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j r_j \right\|_{L_p[0,1]} \leqslant \sqrt{p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{1/2}.$$

Эти соотношения вызвали большое количество исследований и обобщений, нашли многочисленные применения в различных разделах анализа. А. Я. Хинчин доказал их, «преследуя цель выяснения правильной скорости сходимости в усиленном законе больших чисел Э. Бореля» [9]. С точки зрения геометрии банаховых пространств неравенства Хинчина показывают, что пространства $L_p[0,1]$, не являясь гильбертовыми при $p \neq 2$, тем не менее, содержат подпространства, изоморфные ℓ_2. Вопрос о том, в каких симметричных пространствах X последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису в ℓ_2, был решен в работе Родина и Семенова [2], показавших, что последнее имеет место тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича $\mathrm{Exp}L^2$, построенного по функции $M(u) = e^{u^2} - 1$. В работе [3] аналогичный вопрос изучался для системы $\{r_{j_1}(t) \cdot r_{j_2}(t)\}_{j_1 > j_2}$ произведений функций Радемахера, именуемой хаосом Радемахера второго порядка.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00138 а и № 16-41-630676 р_а) и Министерства образования и науки РФ (проект 5-100).

Там было доказано, что такая система эквивалентна в X каноническому базису в ℓ_2 тогда и только тогда, когда X содержит сепарабельную часть пространства Орлича Exp$L$, построенного по функции $M(u) = e^u - 1$. Кроме того, эквивалентность системы $\{r_{j_1} r_{j_2}\}_{j_1 > j_2}$ в X каноническому базису в ℓ_2 оказалась равносильной формально более слабому свойству безусловной базисности [4]. Отметим, что система $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ является безусловной (и даже симметричной) базисной последовательностью в любом симметричном пространстве [10]. В настоящей работе вопросы о справедливости неравенств Хинчина и свойства безусловности исследуются для подсистем хаоса Радемахера, индексное множество которых допускает определенные ниже плотностные оценки, связанные с понятием комбинаторной размерности из [11].

Определение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ является (α, β)-*множеством*, если:

1) для некоторого $c_{\mathcal{A}} > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся множества $B_1, B_2, \ldots, B_d$ такие, что $|B_j| = n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, и

$$|\mathcal{A} \cap (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_d)| \geqslant c_{\mathcal{A}} n^{\alpha};$$

2) для некоторого $C_{\mathcal{A}} > 0$, каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых множеств $B_1, B_2, \ldots, B_d$, $|B_j| = n$, $j = 1, 2, \ldots, d$, выполняется неравенство

$$|\mathcal{A} \cap (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_d)| \leqslant C_{\mathcal{A}} n^{\beta}.$$

Ясно, что если $\mathcal{A}$ является (α, β)-множеством, то $\alpha \leqslant \beta$. Любое множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^d$, удовлетворяющее условию 1) определения 1, является (α, d)-множеством.

Следующее определение, взятое нами из [12], ослабляет известное свойство безусловности.

Определение 2. Базисная последовательность $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ в банаховом пространстве X называется *RUD последовательностью*, если для некоторого $D > 0$ и любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|_X \leqslant D \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(u) a_j x_j \right\|_X du.$$

Положим $\jmath := (j_1, j_2, \ldots, j_d)$ и $\mathbf{r}_\jmath(t) := r_{j_1}(t) \cdot r_{j_2}(t) \cdot \ldots \cdot r_{j_d}(t)$. Через $\triangle^d$, $d \in \mathbb{N}$, будем обозначать «нижнетреугольную» часть $\mathbb{N}^d$, т.е.

$$\triangle^d := \{(j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d : \ j_1 > j_2 > \ldots > j_d\}.$$

Отметим, что система $\{\mathbf{r}_\jmath\}_{\jmath\in\triangle^d}$, рассматриваемая в лексикографическом порядке, является базисной в любом симметричном пространстве [7].

Теорема 1. *Пусть X — симметричное пространство функций на отрезке $[0,1]$. Предположим также, что $d\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}\subset\triangle^d$ является (α,β)-множеством и $\alpha+1/\beta>2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{\mathbf{r}_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}$ — RUD последовательность в X;

2) для некоторой константы C_X и произвольных $a_\jmath\in\mathbb{R}$

$$C_X^{-1}\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}\leqslant\left\|\sum_{\jmath\in\mathcal{A}}a_\jmath\mathbf{r}_\jmath\right\|_X\leqslant C_X\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}.$$

В классе пространств Орлича и для множеств $\mathcal{A}$ *точной* комбинаторной размерности теорему 1 можно уточнить.

Теорема 2. *Пусть X — пространство Орлича функций на отрезке $[0,1]$. Предположим также, что $d\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}\subset\triangle^d$ является (α,α)-множеством и $\alpha>1$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\{\mathbf{r}_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}$ — RUD последовательность в X;

2) для некоторой константы C_X и произвольных $a_\jmath\in\mathbb{R}$

$$C_X^{-1}\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}\leqslant\left\|\sum_{\jmath\in\mathcal{A}}a_\jmath\mathbf{r}_\jmath\right\|_X\leqslant C_X\|\{a_\jmath\}_{\jmath\in\mathcal{A}}\|_{\ell_2(\mathcal{A})}.$$

3) $X\supset\mathrm{Exp}L^{2/\alpha}$, где $\mathrm{Exp}L^{2/\alpha}$ — пространство Орлича, построенное по выпуклой функции $M(u)\sim e^{u^{2/\alpha}}-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khintchine A.* Über dyadische Brüche // Math. Zeitschrift. 1923. Vol. 18. P. 109–116.

2. *Semyonov E. M., Rodin V. A.* Rademacher series in symmetric spaces // Anal. Math. 1975. Vol. 1, № 3. P. 207–222.

3. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 311–336.

4. *Astashkin S. V.* Rademacher chaos in symmetric spaces, II // East J. Approx. 2000. V. 6, № 1. P. 71–86.

5. *Асташкин С. В.* Функции Радемахера в симметричных пространствах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 32. С. 3–161.

6. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах. М. : Физматлит, 2017. 550 с.

7. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Разреженный хаос Радемахера в симметричных пространствах // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 3–31.

8. *Szarek S. J.* On the best constant in the Khinchin inequality // Studia Math. 1976. Vol. 58, № 2. P. 197–208.

9. *Пешкир Г., Ширяев А. Н.* Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия // УМН. 1995. Т. 50, № 5(305). С. 3–62.

10. *Braverman M. Sh.* Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1994. 116 p.

11. *Blei R.* Analysis in Integer and Fractional Dimensions / Cambridge Studies in Advanced Mathematics 71. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001. 577 p.

12. *Lopez-Abad J., Tradacete P.* Bases of random unconditional convergence in Banach spaces // Transactions of the AMS. 2016. Vol. 368, № 12. P. 9001–9032.

УДК 517.5

СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

С. В. Асташкин (Самара, Россия),
П. А. Терехин (Саратов, Россия)
astash56@mail.ru, terekhinpa@mail.ru

Пусть $f \in L^1[0,1]$ и $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Системой $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сжатий и сдвигов функции f называется последовательность

$$f_n(t) := \begin{cases} f(2^k t - j), & \text{если } t \in [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $n = 2^k + j$, $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$. В частности, если $f = h_1 = \chi_{(0,\frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, то получаем систему Хаара $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, нормированную в L^∞ (без функции $h_0(t) = 1$).

Рассмотрим (линейный) оператор T_f, определяемый равенствами $T_f h_n = f_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Под нормой $\|T_f\|_{X \to Y}$ будем понимать обычную норму оператора $T_f : \overline{\operatorname{span}}_X \{h_n\}_{n=1}^\infty \to Y$.

Заметим, что оператор T_f перестановочен с операторами

$$V_0 f(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t \le 1, \end{cases} \qquad V_1 f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ f(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Кроме того, имеем $\{f_n\}_{n=1}^\infty = \{V^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, где

$$V^\alpha = V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_k}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A} := \bigcup_{k=0}^\infty \{0,1\}^k,$$

причем $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии, определяемом двоичным разложением $n = 2^k + \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$. Обозначим через $|\alpha| = k$ длину индекса α, а через $\alpha\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l)$ конкатенацию индексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (проект 1.1470.2016/1.4) и РФФИ (проект 17-01-00138) (первый автор), а также РФФИ (проект № 16-01-00152) (второй автор).

Спектром Хаара функции f называется множество индексов

$$S(f) := \{\beta \in \mathbb{A} : (f, h_\beta) \neq 0\}.$$

Скажем, что функция f имеет простой спектр Хаара, если из равенства $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, где $\alpha, \alpha' \in \mathbb{A}$ и $\beta, \beta' \in S(f)$, следует, что $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Лемма. *Если $f \in L^2$, $f \neq 0$, и f имеет простой спектр Хаара, то система сжатий и сдвигов функции f является ортогональной. Следовательно, $\|T_f\|_{L^2 \to L^2} = \|f\|_2$.*

Банахово пространство X измеримых функций на $[0,1]$ называется симметричным, если 1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0,1]$, где функция x измерима и $y \in X$, следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$; 2) из равенства

$$|\{t \in [0,1] : |x(t)| > \tau\}| = |\{t \in [0,1] : |y(t)| > \tau\}|$$

для всех $\tau > 0$, т.е. из равноизмеримости x и y, где функция x измерима и $y \in X$, следует $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$ (здесь $|A|$ — мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$). Оператор растяжения σ_τ, определяемый равенством

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(t/\tau), & 0 \leq t \leq \min(1,\tau), \\ 0, & \min(1,\tau) < t \leq 1, \end{cases} \qquad \tau > 0,$$

ограничен в каждом симметричном пространстве X. Нижний и верхний индексы Бойда пространства X определяются соотношениями

$$\alpha_X = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \to X}}{\ln \tau}, \qquad \beta_X = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \to X}}{\ln \tau}.$$

Всегда $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$. Если $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, то говорят, что симметричное пространство X имеет нетривиальные индексы Бойда.

Примерами симметричных пространств являются пространства L^p, Орлича L_Φ, Лоренца Λ_φ, Марцинкевича M_φ и др. (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть*

$$f = \sum_{i=1}^\infty f_i, \qquad \sum_{i=1}^\infty \|f_i\|_{BMO_d} < \infty,$$

где каждая функция f_i, $\int_0^1 f_i(t)\,dt = 0$, имеет простой спектр Хаара. Тогда оператор T_f ограничен в каждом симметричном пространстве X с нетривиальными индексами Бойда $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$.

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+^s = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) : k_1, \ldots, k_s \geq 0\}$ и $\langle \mathbf{k} \rangle := = k_1 + \ldots + k_s$. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^s$ положим

$$V^{\mathbf{k}} = V_0^{k_1} V_1 V_0^{k_2} V_1 \ldots V_1 V_0^{k_s}.$$

Функцию вида

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^s} c_{\mathbf{k}} V^{\mathbf{k}}$$

будем называть хаосом Хаара порядка s. Обозначим $\mathcal{H}_{ch}^s$ множество всех таких функций.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{H}_{ch}^s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $f \in \bigcap_{1<q<\infty} L^q$;

2) *функция* $\widehat{f}(\mathbf{z}) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+^s} c_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ *аналитична в единичном поликруге* $\mathbb{D}^s$;

3) *оператор T_f ограничен в каждом симметричном пространстве X с нетривиальными индексами Бойда.*

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathcal{H}_{ch}^1$ — хаос Хаара порядка $s = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *функция $\widehat{f}(z)$ аналитична и не обращается в нуль в $\mathbb{D}$;*

2) *оператор T_f является изоморфизмом каждого сепарабельного симметричного пространства X с нетривиальными индексами Бойда.*

Теорема 4. *Если оператор T_f является изоморфизмом в L^{p_0} при некотором $p_0 \in (1, \infty)$, то он также является изоморфизмом в L^p для всех $1 < p < p_0$.*

Заметим, что если T_f — изоморфизм сепарабельного симметричного пространства X с нетривиальными индексами Бойда, то система сжатий и сдвигов функции f эквивалентна системе Хаара и поэтому является безусловным базисом пространства X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978.

2. *Асташкин С. В., Терехин П. А.* Об ограниченности оператора, порожденного мультисдвигом Хаара // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 2. С. 133–135.

3. *Astashkin S. V., Terekhin P. A.* Sequences of dilations and translations in function spaces // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 457, № 1. P. 645–671.

УДК 517.51

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

А. Г. Бабенко (Екатеринбург, Россия)
babenko@imm.uran.ru

Доклад посвящен экстремальным задачам для полиномов и целых функций с ограничениями на их значения и коэффициенты (преобразование Фурье). А именно задачам, которые возникают как в теории приближений функций на некоторых классических многообразиях, так и задачам оптимального расположения точек на этих многообразиях.

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДНЫМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА СИМПЛЕКСАХ В СЛУЧАЯХ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ[1]

Н. В. Байдакова (Екатеринбург, Россия)
baidakova@imm.uran.ru

Пусть Δ — d-симплекс ($d = 3, 4$) с вершинами $a_1, \ldots, a_{d+1}$, H — наибольшее ребро этого симплекса. Рассмотрим задачу интерполяции функции f из $W^{n+1}M$ (множество функций, у которых все производные до порядка $n+1$ включительно существуют и непрерывны на Δ, и производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M) многочленом P_n^d степени не выше n в узлах

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}} = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \ldots, \frac{i_{d+1}}{n}\right),$$

$$i_k \in \{0, \ldots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_{d+1} = n.$$

Будем писать, что величины ψ_1 и ψ_2 находятся в отношении $\psi_1 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\lesssim} \psi_2$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — некоторые числовые параметры, если найдется неотрицательное число $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, зависящее от $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, такое, что $\psi_1 \le C(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)\psi_2$.

Известно [1], что для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$ имеет место оценка

$$\left\| D^s_{\xi_1,\ldots,\xi_s}\left(f - P_n^d\right)\right\|_\infty \underset{n,d}{\lesssim} M\frac{H^{n+1-s}}{(\cos\theta)^s}\,, \quad s = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00702П).

где характеристика θ определяется следующим образом: если $E_d = \{e_s\}_{s=1}^d$ — множество единичных линейно независимых векторов; ξ — произвольный единичный вектор из $\mathbb{R}^d$; $\mathcal{E}_N = \{e_s\}_{s=1}^N$ — множество всех единичных векторов, параллельных ребрам d-симплекса Δ, θ_s — угол между ξ и прямой с направляющим вектором e_s (т. е. $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$), то

$$\theta = \theta(\Delta) = \min_{E_d \subset \mathcal{E}_N} \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in E_d} \{\theta_s\}.$$

Известно также [2], что оценка (1) близка к неулучшаемой.

Введем геометрическую характеристику симплекса, которая более просто определяется и качественно ведет себя аналогично $\cos\theta$. Обозначим через T_i $(i = 0, \ldots, d)$ грани размерности $d-1$ симплекса Δ, для которых соответственно $a_i \notin T_i$; τ_{ij} — единичные векторы, направленные от a_i к a_j. Пусть γ_{ij} — угол между τ_{ij} и T_i; γ_i и γ — такие углы, что

$$\sin\gamma_i = \max_{\substack{1 \leq j \leq d+1 \\ j \neq i}} \sin\gamma_{ij}\ ,$$

$$\sin\gamma = \min_{1 \leq i \leq d+1} \sin\gamma_i\ .$$

Теорема 1. *Если $d = 3, 4$, то имеет место соотношение*

$$\cos\theta \lesssim \sin\gamma \lesssim \sqrt[d]{\cos\theta}.$$

Таким образом, для $d = 3, 4$ теорема позволяет перейти от оценок (1) к оценкам

$$\left\| D^s_{\xi_1,\ldots,\xi_s}\left(f - P^d_n\right)\right\| \underset{n}{\lesssim} M\frac{H^{n+1-s}}{(\cos\gamma)^{sd}}\ , \quad s = 0, \ldots, n.$$

Однако можно получить более точные оценки с использованием характеристики γ.

Теорема 2. *При $d = 3, 4$ для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$, s=0,..., n, имеет место оценка*

$$\left\| D^s_{\xi_1,\ldots,\xi_s}\left(f - P^d_n\right)\right\|_\infty \underset{n,d}{\lesssim} M\frac{H^{n+1-s}}{(\cos\gamma)^{s}}\ , \quad s = 0, \ldots, n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jamet P.* Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. Vol. 10, № 1. P. 43–60.

2. *Байдакова Н. В.* Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Матем. тр. 2017. Т. 20, № 1. С. 43–74.

УДК: 621.391.1 : 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ДЛЯ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ[1]

А. А. Барышев, Г. А. Бондаренко, Д.С. Лукомский
(Саратов, Россия)
baryshevaa@gmail.com, gebond77@gmail.com, lukomskiids@info.sgu.ru;

Данная работа посвящена вопросу численной реализации быстрого преобразования Фурье на локальных полях, рассмотренного в работе С. Ф. Лукомского и А. М. Водолазова [1]. Необходимо отметить, что в настоящее время в информационных технологиях активно применяются алгоритмы, использующие различные свойства преобразования Фурье по разнообразным системам. Будем рассматривать применение алгоритма на примере сжатия изображений.

Под локальным полем K понимают локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции «$\dot{+}$», «$\cdot$» — сложения и умножения, для которых выполнены аксиомы поля. В поле K вводят оператор растяжения следующим образом. Единичный шар

$$\mathcal{D} = \{x \in K:\ |x| \le 1\},\ \mu\mathcal{D} = 1.$$

является кольцом, в котором существует единственный максимальный идеал

$$\mathcal{B} = \{x \in K:\ |x| < 1\}.$$

Элемент $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}$ с наибольшей нормой $|\mathfrak{p}|$ называют примитивным элементом. Для него $\mu\mathcal{B} = |\mathfrak{p}| = \frac{1}{p^s}$, где p – простое, $s \in \mathbb{N}$. Если $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$, то $|x| = 1$. Если для любого $a \in K$ произведение $pa \stackrel{df}{=} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p} = 0$, то число p называют характеристикой поля K.

Пусть p — простое и s – натуральное. Конечное поле $GF(p^s)$ состоит из векторов

$$\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, ..., a^{(s-1)}),$$

в которых компоненты $a^{(j)}$ принимают значения от 0 до $p-1$, операция сложения определяется покомпонентно по модулю p. Локальное поле $K = F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152)

формальных степенных рядов

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in GF(p^s).$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов. Можно считать, что локальное поле $F^{(s)}$ характеристики p состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей

$$a = (\ldots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \ldots, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots), \quad \mathbf{a}_j \in GF(p^s),$$

в которых лишь конечное число элементов $\mathbf{a}_j$ с отрицательными номерами отлично от нуля.

Пусть $f^{(N)}$ — ступенчатая функция. Обозначим ее значения на смежных классах $K_N \dot{+} \mathbf{a}_{N-1} g_{N-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_1 g_1 \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0 \subset K_0$ через

$$f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} := f^{(N)}(K_N \dot{+} \mathbf{a}_{N-1} g_{N-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_1 g_1 \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0).$$

Преобразование Фурье функции $f^{(N)}$ совпадает с коэффициентами $c_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{N-1}}$ в разложении

$$f^{(N)} = \sum_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{N-1} \in GF(p^s)} c_{\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_{N-1}} \mathbf{r}_0^{\bar{\alpha}_0} \mathbf{r}_1^{\bar{\alpha}_1} \ldots \mathbf{r}_{N-1}^{\bar{\alpha}_{N-1}},$$

где $\mathbf{r}_0^{\bar{\alpha}_0}, \mathbf{r}_1^{\bar{\alpha}_1}, \ldots, \mathbf{r}_{N-1}^{\bar{\alpha}_{N-1}}$ — функции Радемахера, определенные в [1]. Таким образом, преобразование Фурье вектору значений $f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}$ ставит в соответствие вектор коэффициентов $c_{\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_{N-1}}$.
Можно считать, что вектор значений функции $f^{(N)}$ есть вектор

$$\mathbf{F} = f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \left| \text{так как } \mathbf{a}_m = (a_m^{(0)}, a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(s-1)}), a_m^{(j)} = \overline{0, p-1} \right| =$$
$$= f^{(N)}_{a_{N-1}^{(0)} a_{N-1}^{(1)} \ldots a_{N-1}^{(s-1)}, a_{N-2}^{(0)} a_{N-2}^{(1)} \ldots a_{N-2}^{(s-1)}, \ldots, a_1^{(0)} a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(s-1)}, a_0^{(0)} a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(s-1)}}.$$

Будем полагать, что $f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}$ занумерованы индексом

$$n = (a_{N-1}^{(0)} + a_{N-1}^{(1)} p + \cdots + a_{N-1}^{(s-1)} p^{s-1}) + p^s (a_{N-2}^{(0)} + a_{N-2}^{(1)} p + \cdots +$$
$$+ a_{N-2}^{(s-1)} p^{s-1}) + \cdots + p^{s(N-1)} (a_0^{(0)} + a_0^{(1)} p + \cdots + a_0^{(s-1)} p^{s-1}). \tag{1}$$

Далее приведем формулы обратного преобразования Фурье

$$f^{(n)}_{(\bar{\alpha}_N\ldots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \sum_{\bar{\alpha}_{n-1} \in GF(p^s)} p^{\frac{-s}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1})} p^{\frac{s}{2}} f^{(n-1)}_{(\bar{\alpha}_N,\ldots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}. \tag{2}$$

Так как матрица системы (2) унитарна, то ее решение имеет вид

$$f^{(n-1)}_{(\bar{\alpha}_N\dots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \sum_{\mathbf{a}_{n-1}\in GF(p^s)} p^{-s} e^{-\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1},\mathbf{a}_{n-1})} f^{(n)}_{(\bar{\alpha}_N,\dots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}, \qquad (3)$$

После предпоследнего шага получаем равенства

$$f^{(1)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\dots,\bar{\alpha}_1)\mathbf{a}_0} = \sum_{\bar{\alpha}_0\in GF(p^s)} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_0,\mathbf{a}_0)} f^{(0)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\dots,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0)},$$

из которых находим коэффициенты Фурье $c_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\dots\bar{\alpha}_N} = f^{(0)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\dots,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0)}$ по формулам (3). Таким образом (3) и (2) — расчетные формулы для прямого и обратного преобразования Фурье соответственно.

Общее количество операций равно $(N+1)\cdot 2p^{2s}\cdot p^{Ns} = 2(N+1)p^{s(N+2)}$.

Далее рассмотрим практические задачи на примере сжатия изображений. Изображение можно трактовать как матрицу фиксированного размера, элементами которой являются номера цветов точек в цветовой палитре. Разобьем исходную матрицу на подматрицы размерности $p^N \times p^N$, где p — простое. Данную матрицу будем рассматривать как вектор длины p^{sN}, где $s = 2$. Таким образом, имеем кусочно постоянную функцию f^N, принимающую p^{sN} значений. Далее к ней применяем прямое преобразование Фурье (2), сортируем коэффициенты по убыванию модуля и обнуляем некоторый процент наименьших коэффициентов. Затем применяем обратное преобразование (1) и восстанавливаем изображение.

Отметим проблемы, возникающие при реализации данного алгоритма, которые влияют на вычислительную сложность. В формулах прямого и обратного преобразования для нумерации значений функции и коэффициентов используется мультииндекс $\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\dots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0$, который необходимо преобразовать в десятичное представление и наоборот.

Процедуры пересчета нумерации (преобразования индексов) в приведенных формулах преобразования Фурье не рассматриваются, однако они вносят значительную вычислительную сложность в прикладной задаче.

По результатам исследования написана программа, реализующая данный алгоритм. Проведено сравнение скорости и качества сжатия данного метода со сжатием по другим системам (Хаара, Виленкина, косинус-преобразования).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский С. Ф, Водолазов А. М.* Быстрое дискретное преобразование Фурье на локальных полях положительной характеристики // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53, вып. 2. С. 60–69.

УДК 517.9

О СРАВНЕНИИ ДВУХ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ МЕРОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

В. А. Беднаж (Брянск, Россия),
Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
vera.bednazh@mail.ru, shamoyanfa@yandex.ru

Пусть $\mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ — единичная окружность, $\triangle := \{t : 0 < t < 1\}$.

Обозначим через Ω — класс неотрицательных суммируемых функций ω на $\triangle$, для которых существуют неотрицательные числа q_ω, $0 < g_\omega < 1$, m_ω, M_ω такие, что

$$m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega, \quad \lambda \in [q_\omega, 1], \quad r \in \triangle.$$

Простейшими примерами таких функций являются функции вида

$$\omega(x) = x^\alpha \left(\ln \ldots \ln \frac{c}{x}\right)^\beta, \quad x \in \triangle, \quad \text{где } \alpha > -1,\ \beta \in \mathbf{R}.$$

В дальнейшем нам потребуются также следующие обозначения: $H(\mathbf{D})$ — множество всех аналитических в $\mathbf{D}$ функций, $M(\mathbf{D})$ — пространство всех мероморфных в $\mathbf{D}$ функций. Если $f \in M(\mathbf{D})$, то через $T(r, f)$ обозначим характеристику Р. Неванлинны функции f, т.е.

$$T(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt, \quad r \in \triangle,$$

где $\ln^+ |a| = \max(0, \ln |a|)$.

Если ω_1, $\omega_2 \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, то

$$N^p_{\omega_1, \omega_2} := \left\{ f \in M(\mathbf{D}) : \int_0^1 \omega_2(1 - r) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \omega_1(1 - t) \ln |f(rte^{i\theta})| dt \right)^+ d\theta \right)^p dr < +\infty \right\}.$$

Для удобства будем обозначать функцию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \omega_1(1 - t) \ln |f(rte^{i\theta})| dt \right)^+ d\theta + \int_0^1 \omega_1(1 - t) n(tr, \infty) dt$$

через $T_{\omega_1}(r,f)$. Характеристика такого типа была впервые введена М. М. Джрбашяном в работе [2] при $\omega_1(t)=t^\alpha$, $\alpha>-1$.

Обозначим также через S^p_ω следующий класс мероморфных функций

$$S^p_\omega := \left\{ f\in M(\mathbf{D}) : \int\limits_0^1 \omega(1-r)T^p(r,f)dr<+\infty \right\},$$

где $\omega\in\Omega,\quad 0<p<+\infty$.

Основная цель статьи — сравнить классы $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ and S^p_ω. Доказано, что при некоторых ограничениях на веса ω_1, ω_2 справедливо вложение:

$$S^p_{\omega_p}\subset N^p_{\omega_1,\omega_2},\quad 0<p<+\infty,$$

где $\omega_p(r)=\omega_2(r)\omega_1^p(r)r^p$, $r\in\triangle$. Таким образом, если $\omega_1=t^\alpha$, $\omega_2=t^\beta$, $t\in\triangle$, $\alpha,\beta>-1$, то $S^p_{\omega_p}=N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0<p<+\infty$.

Как доказано в [3], если $f\in S^p_{\omega_p}$ или $f\in N^p_{\omega_1,\omega_2}$, то функция f представима

$$f(z)=\frac{h_1(z)}{h_2(z)},\quad z\in\mathbf{D},$$

где $h_j\in H(\mathbf{D})$, $j=1,2$. Поэтому будем предполагать, что классы $N^p_{\omega_1,\omega_2}$ и S^p_ω состоят только из голоморфных функций.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $\omega_1,\ \omega_2\in\Omega$, $f\in N^p_{\omega_1,\omega_2}$, $0<p<+\infty$, $f(z_k)=0$, $k=1,2,\ldots$, $f(0)=1$, $n_k=card\left\{z_m:|z_m|\le 1-\frac{1}{2^k}\right\}$, $k=1,2,\ldots$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{{n_k}^p\,\omega_2(\frac{1}{2^k})\omega_1^p(\frac{1}{2^k})}{2^{k(2p+1)}}<+\infty.$$

Теорема 2. *Пусть* $\omega_1,\ \omega_2\in\Omega$, $0<p<+\infty$, *тогда справедливо вложение* $S^p_{\omega_1,\omega_2}\subset N^p_{\omega_1,\omega_2}$. *Причем выполняется оценка*

$$\int\limits_0^1\omega_2(1-t)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1\omega_1(1-u)\ln|f(ute^{i\theta})|du\right)^+d\theta\right)^p dt\le$$

$$\le c_1\int\limits_0^1\omega_2(1-t)\omega_1^p(1-t)(1-t)^pT^p(t,f)dt,\ f\in H(\mathbf{D}),\ 0<p<+\infty,$$

где c_1 *положительное число, не зависящее от* f.

Доказательство теоремы основано на следующем вспомогательном утверждении:

Лемма 1. *Пусть $f \in H(\mathbf{D})$, тогда для любой неотрицательной функции $\omega \in L^1(\Delta)$ справедлива оценка*

$$T_\omega(f,r) \le \int_0^1 \omega(1-t)T(f,rt)dt, \quad r \in [0,1]$$

Теорема 3. *Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha, \beta > -1$. Тогда классы $N^p_{\alpha,\beta}$ и $S^p_{\alpha,\beta}$ совпадают.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейман У.* Мероморфные функции. М. : Мир, 1966. 287 с. (англ. Hayman W. K. Meromorfhic functions. Oxford, 1964. 287 p.)
2. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге // Доклады АН СССР. 1964. Т. 157. № 5. С. 1024–1027.
3. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций / Брянский государственный университет, 2009. 152 с.
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир, 1973. 342 с.
5. *Джрбашян М. М.* Интегральное преобразование и представление функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. 670 с.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА ПЯТИЭЛЕМЕНТНОГО ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТРАНСТВА ЛИНДЕНШТРАУССА[1]

Б. Б. Беднов (Москва, Россия)
noriiii@inbox.ru

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf\left\{\sum_{k=1}^n \|x_k - x\| : x \in X\right\} =: |\mathrm{st}|(M).$$

Пространство X называется предуальным к L_1 или пространством Линденштраусса, если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-08335).

для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n (здесь l_∞^n обозначает n-мерное пространство с нормой $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}$). Пространства Линденштраусса хорошо изучены (см. [1, 2], а также [3]).

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M)$ не пусто [4] для произвольного конечного множества $M \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M)$ можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a, b] = \{x \in X : \|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|\}$).

Теорема А [5]. *Пусть пространство X предуально к L_1. Для множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ попарно различных элементов пространства X имеет место формула*

$$|\mathrm{st}|(M, X) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^{k} L(M_j) : M_1 \sqcup \cdots \sqcup M_k = M \right\} =: \Delta(M, X),$$

где максимум берётся по всем не менее чем двухточечным подмножествам $M_j \subset M$. Число $L(M_j)$ обозначает максимальную сумму длин рёбер цикла, обходящего все вершины из M_j по одному разу. При этом

$$\mathrm{st}(M, X) = \cap_{j=1}^{k} \mathrm{st}(M_j^*, X) = \cap m[x_p, x_q],$$

где $\{M_j^*\}_{j=1}^{k}$ — такие не менее чем двухточечные подмножества множества M, для которых $\sum\limits_{j=1}^{k} L(M_j^*) = 2 \cdot \Delta(M, X)$, а последнее пересечение берётся по тем парам индексов p, q, для которых $x_p, x_q \in M_j^*$ соединены ребром в цикле с длиной $L(M_j^*)$, обходящем множество M_j^* при каждом фиксированном $j = 1, \ldots, k$.

Заметим, что для двухточечного множества M_j цикл вырожден и состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

Разбиение множества M из теоремы А на попарно не пересекающиеся подмножества задает в пространстве X граф Z, состоящий из циклов и отдельных ребер. Для 5-точечного множества M граф Z может быть всего двух видов: либо цикл из пяти ребер, либо цикл из трех ребер и отдельное ребро.

Если граф Z для 5-точечного множества M есть цикл, то множество $\mathrm{st}(M, X)$ характеризуется в терминах пересечения сфер пространства X следующей теоремой (при $n = 5$).

Теорема Б [5]. *Пусть n нечётно, пространство X предуально к L_1, $x_1, \dots, x_n \in X$ различны и $\Delta(\{x_1, \dots, x_n\}, X) = \frac{1}{2}\big(\|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\| + \dots + \|x_n - x_1\|\big)$. Тогда верно равенство*

$$\mathrm{st}(\{x_1, \dots, x_n\}, X) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap \dots \cap m[x_n, x_1] = \cap_{i=1}^{n} S(x_i, r_i),$$

где $r_i = 0,5 \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cdot \|x_{i+j} - x_{i+j+1}\| \right)$ (индексы $i + j$ и $i + j + 1$ считаются по модулю n), а $S(x, r)$ обозначает сферу пространства X с центром x радиуса r.

Если же граф Z для 5-точечного множества $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ не связен, то есть Z есть цикл, скажем, $x_1x_2x_3$ и отдельное ребро x_4x_5, то расстояние от точек x_4 и x_5 до точки $s \in \mathrm{st}(M, X)$ не всегда вычисляется однозначно. Заметим, что в этом случае $\mathrm{st}(M, X) \subset \mathrm{st}(\{x_1, x_2, x_3\}, X)$ и $\mathrm{st}(M, X) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap m[x_3, x_1] \cap m[x_4, x_5]$.

Далее введём следующие обозначения. Пусть $r_i = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Это расстояние от точки x_i до (любой) точки $s \in \mathrm{st}(\{x_1, x_2, x_3\}, X)$, что следует из теоремы Б при $n = 3$.

Лемма. *Пусть X предуально к L_1, $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \subset X$, граф Z для M есть цикл $x_1x_2x_3$ и отдельное ребро x_4x_5. Расстояние от x_4 до множества $\mathrm{st}(M, X)$ равно $\max_{i=1}^{3}\{\|x_i - x_4\| - r_i\} =: A_4$.*

В силу равноправия точек x_4 и x_5 в рассматриваемом случае расстояние от x_5 до множества $\mathrm{st}(M, X)$ равно $\max_{i=1}^{3}\{\|x_i - x_5\| - r_i\} =: A_5$.

Теорема. *Пусть X предуально к L_1, $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \subset X$, граф Z для M есть цикл $x_1x_2x_3$ и отдельное ребро x_4x_5. Тогда множество $\mathrm{st}(M, X)$ есть объединение по $\rho_4 \in [A_4, \|x_4 - x_5\| - A_5]$ пересечений сфер*

$$S(x_1, r_1) \cap S(x_2, r_2) \cap S(x_3, r_3) \cap S(x_4, \rho_4) \cap S(x_5, \|x_4 - x_5\| - \rho_4).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Canad. J. Math. 1955. Vol. 7, № 4. P. 552–561.

2. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 48. P. 1–112.

3. *Lima Å.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 227. P. 1–62.

4. *Беднов Б. Б., Бородин П. А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–19.

5. *Беднов Б. Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. Т. 207, № 8. С. 31–46.

УДК 517.986.62

ПОСТРОЕНИЕ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА[1]

Г. С. Бердников (Саратов, Россия)
evrointelligent@gmail.com

Пусть $(G, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \quad x_j = \overline{0, p-1},$$

где p — любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т.е. $x \dot{+} y = (x_j \dot{+} y_j)(x_j + y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n = \{x \in G : \ x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, X_{n+1}, \dots)\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ — совокупность аннуляторов, $\mathcal{A}$ — оператор растяжения. Базисные элементы мультипликативной группы характеров будем обозначать r_n и называть функциями Радемахера.

Пусть $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$ — множество функций, постоянных на $G_{-N}^{\perp}\zeta$ с носителем в $G_M^{\perp}$. Аналогично, обозначим $\mathfrak{D}_{-N}(G_{\infty}^{\perp})$ — множество функций с неограниченным носителем и теми же промежутками постоянства.

На группах Виленкина возможно построить ортогональный кратномасштабный анализ. Задача построения кратномасштабного анализа сводится к нахождению масштабирующей функции φ, которая удовлетворяет равенству $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) = \prod\limits_{n=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-n})$, где $\mathcal{A}$ - оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской. Само равенство называется масштабирующим уравнением в частотном виде.

Необходимое и достаточное условие масштабирующей функции с компактным носителем самой функции и преобразования Фурье впервые было найдено в работах Ю. А. Фаркова [1, 2], однако для нахождения функции, пользуясь им, требуется перебор всех возможных вариантов. Алгоритм представленный в работах С. Ф. Лукомского, Ю. С. Крусс и автора [3, 4] не обладает этим недостатком, при этом также являясь необходимым и достаточным условием (см. [5]). Алгоритм использует особым образом построенные ориентированные графы без контуров. Однако этот алгоритм пригоден только для нахождения функций с ограниченной частотной полосой (компактным носителем преобразования Фурье).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152-а).

Первой попыткой строить масштабирующие функции с неограниченной частотной полосой при помощи методов теории графов можно считать работу автора [4], где выяснилось, что добавляя в орграфы один контур (ориентированный цикл) можно добиться неограниченности носителя преобразования Фурье, при этом сама функция будет удовлетворять масштабирующему уравнению. Представленная здесь работа является обобщением работы [4], и результаты, описанные ниже, позволяют строить функции более широкого класса.

Будем строить масштабирующую функцию φ такую, что $\hat{\varphi} \in \in \mathfrak{D}_{-1}(G_{\infty}^{\perp})$ следующим образом.

Рассмотрим ориентированный граф Γ, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вершинами являются все числа $\alpha_i = \overline{0, p-1}$. Каждая такая вершина присутствует в графе ровно один раз;

2) из вершины 0 нет исходящих дуг;

3) в графе присутствует хотя бы один контур.

Следующая теорема описывает алгоритм построения преобразования Фурье масштабирующей функции по такому графу.

Теорема 1. *Пусть дан граф Γ, удовлетворяющий вышеописанным условиям. Построим функцию $m_0(\chi)$ следующим образом. Пусть $m_0(G_{-1}^{\perp}) = 1$. Также по каждой дуге $\alpha_{-1} \to \alpha_0$ графа Γ построим значение $m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) \neq 0$ так, чтобы выполнялось необходимое условие маски масштабирующей функции:*

$$\sum_{\alpha_0=1}^{p-1} |m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2 = 1, \quad \forall\ \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}.$$

По каждому пути графа Γ вида $\alpha_{-1} \to \alpha_0 \to \cdots \to \alpha_s \to 0$ определим все ненулевые значения преобразования Фурье масштабирующей функции $\hat{\varphi}(\chi)$ так, чтобы $\hat{\varphi}(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} \ldots r_s^{\alpha_s}) = \prod\limits_{n=0}^{s} m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{n-1}} r_0^{\alpha_n})$.

Тогда функция $\hat{\varphi}(\chi)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению, причем $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-1}(G_{\infty}^{\perp})$ и система сдвигов $\varphi(x \dot{-} h)_{h \in H_0}$ ортонормирована.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных Абелевых группах // Изв.РАН. Сер.матем. 2005. V. 69. № 3. С. 193-220.

2. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Vol. 82, № 6. С. 934–952.

3. *Бердников Г. С., Лукомский С. Ф., Крусс Ю. С.* Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина // Матем. заметки. 2015. Т. 9, № 2. С. 310–313.

4. *Бердников Г. С.* Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 377–388. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-377-388.

5. *Бердников Г. С.* Графы в кратномасштабном анализе на группах Виленкина // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 51. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы Двенадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции. 2015. С. 70–72.

УДК 517.5

НАВИГАЦИЯ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов (Екатеринбург, Россия)
bvi@imm.uran.ru, vkost@imm.uran.ru

Доклад посвящен задачам, которые возникают при исследовании проблем навигации по геофизическим полям [1] и при планировании маршрутов движущихся объектов [2]. Автономная навигация по геофизическим полям является альтернативой спутниковой навигации и все более привлекает внимание исследователей в последнее время.

В докладе формулируется ряд задач, связанных с проблемой навигации:

– простейшие модели процесса навигации;

– задача определения местоположения автономного аппарата с использованием информации о поле в целом и фрагмента поля, снятого при движении;

– задача о наилучшей аппроксимации поля в целом с целью экономного хранения его на борту и быстрого восстановления;

– проблема оценки информативности поля и задача построения наиболее информативного маршрута, т.е. наилучшего маршрута с точки зрения точности навигации при движении по этому маршруту;

– задача планирования траектории движения объекта в условиях наблюдения. Предполагается наличие у объекта скоростного средства поражения, что заставляет наблюдателя для обеспечения безопасности придерживаться определенной тактики движения;

– экстремальная задача поиска оптимальной траектории, минимизирующей максимум видимости объекта при движении по ней;

– задача планирования маршрута при условии, когда наблюдатели неподвижны. Для двух последних постановок предложены эффективные численные методы для их решения, основанные на модификации алгоритма Дейкстры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев В. И., Костоусов В. Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург : УрО РАН, 2007.

2. *Попов А. А. Костоусов В. Б., Бердышев В. И.* Траектория объекта, наиболее удаленная от наблюдателей // Proc. International Youth School-Conf. "SoProMat-2017". Yekaterinburg. Russia, 06-Feb.-2017. P. 129–136. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/vis3.pdf.

УДК 517.9

ТОЧКИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА СВЯЗНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. А. Бондарев (Минск, Беларусь)
bsa0393@gmail.com

Классическая теорема Лебега утверждает, что почти всюду для функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), p \geq 1$ выполнено следующее соотношение

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(t)dt, \tag{1}$$

где $B(x,r)$ — евклидов шар с центром в точке x радиуса r. Множество точек, в которых не выполнено соотношение (1), будем называть исключительным. Что если исходная функция f будет более регулярной, например будет принадлежать некоторому функциональному пространству? В частности, исследуются свойства точек Лебега для функций из классов Соболева $W^p_\alpha(X)$ на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Пространство X предполагается связным. Мы получаем оценки на «размер» исключительного множества.

Пусть (X,d) — связное метрическое пространство с метрикой d, а регулярная борелевская мера μ удовлетворяет условию удвоения, т.е. для любых шаров $B(x,r)$ и $B(x,R)$, $R > r$, выполнено

$$\mu\big(B(x,R)\big) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu\big(B(x,r)\big)$$

для некоторых постоянных a_μ и γ. Тройка (X,d,μ) в этом случае называется пространством однородного типа, а число γ играет роль размерности. Исследуется так называемый предельный случай $\gamma = \alpha p$. Принципиальным является то, что p — произвольное положительное число (требование $p > 1$ необязательно). Для случая $\gamma > \alpha p, p > 0$ соответствующие результаты изложены в [1].

Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Пространство Соболева W^p_α на метрическом пространстве X состоит из множества функций (классов эквивалентности) $f \in L^p(X)$, для которых существует неотрицательная функция $g \in L^p(X)$, такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant [d(x, y)]^\alpha [g(x) + g(y)] \tag{2}$$

выполнено почти всюду (более подробно см. [2]). На $W_\alpha^p(X)$ вводится (квази)норма

$$\|f\|_{W_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf\{\|g\|_{L^p(X)}\},$$

где inf берется по всем неотрицательным функциям $g \in L^p(X)$, удовлетворяющим условию (2). Пространства W_α^p порождают емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\{\|f\|_{W_\alpha^p(X)}^p : f \geqslant 1 \text{ на } E \subset X\}.$$

Емкости являются «измерителями» массивности исключительных множеств в задачах теории тонких свойств функций. Такую же роль играют мера и размерность Хаусдорфа. Введем все необходимые определения. Вместимость Хаусдорфа определяется как

$$H_R^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i < R\right\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E шарами радиуса не более R. Мера Хаусдорфа воодится следующим образом

$$H^s(E) = \lim_{R \to +0} H_R^s(E).$$

Наконец, определим размерность Хаусдорфа

$$\dim_H(E) = \inf\{s : H^s(E) = 0\}.$$

Поскольку при $p < 1$ подынтегральная функция в (1) может быть несуммируема, то использовать интегральные средние в определении точек Лебега уже нельзя. Для преодоления этой трудности вместо интегральных средних используется техника приближения постоянными в пространстве L^p. Пусть шар $B \subset X$ и $f \in L^p(B)$, $p > 0$. Существует $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_B |f(y) - c|^p d\mu(y) = \int_B |f(y) - I_B^{(p)} f|^p d\mu(y).$$

Если $f \in L_{\mathrm{loc}}^p(X)$, то для почти всех $x \in X$ существует предел

$$\lim_{r \to +0} I_{B(x,r)}^{(p)} = f^*(x).$$

Постоянные наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ можно использовать вместо интегральных средних в определении точек Лебега (см. [1]). Преимуществом является то, что их также можно использовать при $p < 1$. Однако они не обладают «хорошими» свойствами интегральных средних, например сублинейностью.

В случае $\gamma > \alpha p$ справедлива следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < \alpha p < \gamma$ *и* $f \in W_\alpha^p(X)$. *Тогда существует множество* $E \subset X$ *такое, что для* $x \in X \setminus E$ *предел*

$$\lim_{r\to+0} I_{B(x,r)}^{(p)} = f^*(x)$$

существует. Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{3}$$

При этом $\operatorname{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и* $\dim_H(E) \le \gamma - \alpha p$.

В случае $\gamma = \alpha p$ параметр q равен бесконечности (однако вложение $W_\alpha^p \subset L^\infty$ неверно), поэтому в (3) можно ожидать экспоненциальную скорость сходимости.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $1 < \gamma = \alpha p$ *и* $f \in W_\alpha^p(X)$, *где* X *связно. Тогда существует множество* $E \subset X$ *такое, что для* $x \in X \setminus E$ *пределы*

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f d\mu, \quad \lim_{r\to+0} I_{B(x,r)}^{(p)}$$

существуют. Кроме того,

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} \left[\exp\left\{|f - I_{B(x,r)}|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right\} - 1\right] d\mu = 0,$$

где в качестве $I_{B(x,r)}$ *можно взять и постоянную наилучшего приближения* $I_{B(x,r)}^{(p)}$, *и среднее интегральное. При этом для множества* E *выполнено* $\operatorname{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и* $\dim_H(E) = 0$.

Заметим, что ограничение $\gamma > 1$ в теореме 2 является естественным, поскольку, если $\gamma < 1$, то пространство X обязательно является несвязным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bondarev S.A., Krotov V.G.* Fine properties of Functions from Hajłash–Sobolev classes M_α^p, $p > 0$ I. Lebesgue points. // J. of Contemp. Math. Anal. 2016. Vol. 51, № 6. P. 282–295.

2. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. Vol. 5, № 4. P. 403–415.

УДК 517.984

НЕПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ДЕРЕВЕ[1]

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов, Россия)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф без циклов (дерево) G, с множеством вершин V и множеством ребер $E = \{e_j\}_{j=1}^m$. Обозначим через E_v множество ребер, инцидентных вершине v, через ∂G и $\operatorname{int} G$ — множества граничных и внутренних вершин графа G соответственно, $\operatorname{int} G = V \backslash \partial G$.

Будем считать, что все ребра дерева G имеют одинаковую длину π. Для каждого ребра e_j введем параметр $x_j \in [0, \pi]$. Функцией на дереве G называется вектор-функция $y = [y_j]_{j=1}^m$, где $y_j = y_j(x_j)$, $x_j \in [0, \pi]$, $j = \overline{1, m}$. Пусть q_j, $j = \overline{1, m}$, вещественные функции из класса $W_2^{-1}(0, \pi)$, т. е. q_j — обобщенные производные функций $\sigma_j \in L_2(0, \pi)$. Дифференциальное выражение Штурма – Лиувилля

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x_j) y_j$$

на ребре e_j понимается в следующем смысле (см. [1]):

$$\ell_j y_j = -(y_j^{[1]})' - \sigma_j(x_j) y_j^{[1]} - \sigma_j^2(x_j) y_j,$$

где $y_j^{[1]} = y_j' - \sigma_j y_j$ — *квазипроизводная*, и функция y_j принадлежит пространству

$$\mathcal{D}(\ell_j) = \{y_j \in W_2^1[0, \pi] \colon y_j^{[1]} \in W_1^1[0, \pi],\ \ell_j y_j \in L_2(0, \pi)\}.$$

Предположим, что вершина $u \in V$ соответствует концу $x_j = 0$ ребра e_j и вершина $v \in V$ соответствует $x_j = \pi$. Введем обозначения

$$\begin{array}{ll} y_j(u) = y_j(0), & y_j(v) = y_j(\pi), \\ y_j^{[1]}(u) = -y_j^{[1]}(0), & y_j^{[1]}(v) = y_j^{[1]}(\pi). \end{array}$$

Для $u \in \partial G$ мы будем опускать индекс j и писать $y(u)$, $y^{[1]}(u)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ (проект МК-686.2017.1), Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).

Рассмотрим краевую задачу L на дереве G для системы уравнений Штурма – Лиувилля

$$(\ell_j y_j)(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi),\ y_j \in \mathcal{D}(\ell_j),\ j = \overline{1, m}, \tag{1}$$

со стандартными условиями склейки

$$\left.\begin{array}{ll} y_j(v) = y_k(v), \quad e_j, e_k \in E_v & \text{(условия непрерывности)}, \\ \sum\limits_{e_j \in E_v} y_j^{[1]}(v) = 0, & \text{(условия Кирхгофа)} \end{array}\right\} \tag{2}$$

во внутренних вершинах $v \in \operatorname{int} G$, и условиями Дирихле $y(v) = 0$ или Неймана $y^{[1]}(v) = 0$ в граничных вершинах $v \in \partial G$. В разных вершинах могут быть разные типы граничных условий. Фиксируем некоторые граничные условия описанного вида и обозначим их BC.

Пусть дерево G разделено на два связных поддерева G_{known} и $G_{unknown}$, имеющих одну общую вершину $w \in \operatorname{int} G$. Обозначим их множества ребер через E_{known} и $E_{unknown}$ соответственно. Положим $\partial G_{unknown} \backslash \{w\} =: \{v_k\}_{k=1}^{b}$. Обозначим через L_k краевую задачу для системы уравнений (1) на графе G со стандартными условиями склейки (2) в вершинах $v \in \operatorname{int} G$ и условями BC в вершинах $v \in \partial G \backslash \{v_k\}$. Краевое условие в вершине v_k отличается от BC, т. е. если в задаче L было условие Дирихле $y(v_k) = 0$, то в задаче L_k будет условие Неймана $y^{[1]}(v_k) = 0$, и наоборот.

Спектры $\Lambda(L)$ и $\Lambda(L_k)$, $k = \overline{1, b}$, задач L и L_k, $k = \overline{1, b}$, соответственно представляют собой счетные множества собственных значений. Рассмотрим некоторые их подспектры $\Lambda'(L) \subseteq \Lambda(L)$ и $\Lambda'(L_k) \subseteq \Lambda(L_k)$, $k = \overline{1, b}$.

Обратная задача. *Даны потенциалы* σ_j *на ребрах* $e_j \in E_{known}$ *и подспектры* $\Lambda'(L)$, $\Lambda'(L_k)$, $k = \overline{1, b-1}$. *Найти* σ_j *на ребрах* $e_j \in E_{unknown}$.

Поставленная задача относится к классу так называемых *неполных обратных задач*, в которых коэффициенты дифференциального оператора частично известны априори. Она обобщает задачу Хохштадта-Либермана на конечном интервале (см. [2]). Заметим, что если заданы полные спектры $\Lambda(L)$, $\Lambda(L_k)$, $k = \overline{1, b-1}$, то потенциалы σ_j на ребрах $e_j \in E_{unknown}$ могут быть восстановлены методом из [3].

Цель работы — выделить некоторый класс достаточных условий на подспектры, при которых решение сформулированной обратной задачи единственно. Предложен конструктивный алгоритм решения неполной обратной задачи, основанной на сведении ее к полной задаче на поддереве $G_{unknown}$ путем использования базисности Рисса специальных систем вектор-функций. Данный метод является развитием подхода, предложенного в работе [4] для графа-звезды. Результаты настоящей работы более подробно изложены в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

2. *Hochstadt H., Lieberman B.* An inverse Sturm – Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34. P. 676–680.

3. *Юрко В. А.* О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

4. *Bondarenko N. P.* A partial inverse problem for the Sturm – Liouville operator on a star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2017. Published online. DOI: 10.1007/s13324-017-0172-x.

5. *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm – Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // arXiv:1711.05659 [math.SP].

УДК 517.518.4+517.518.8

СХОДИМОСТЬ К НУЛЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СУММ С ЦЕЛЫМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ПРЯМОЙ СУММАМИ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ

П. А. Бородин, С. В. Конягин (Москва, Россия)

pborodin@inbox.ru, konyagin23@gmail.com

Теорема 1. *Существует последовательность тригонометрических многочленов*

$$Q_\nu(x) = \sum_{s=1}^{s_\nu} n_s^{(\nu)} e^{ik_s^{(\nu)}x}$$

с целыми $k_s^{(\nu)}$ *и целыми положительными* $n_s^{(\nu)}$*, сходящаяся к нулю почти всюду.*

Существование сходящейся почти всюду к нулю последовательности ненулевых многочленов Q_ν с целыми (необязательно положительными) коэффициентами $n_s^{(\nu)}$ следует из результатов Фекете [1].

Задача о существовании указанной в теореме 1 последовательности явно возникла в [2] в связи с приближениями суммами сдвигов одной функции в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. И вот теперь с помощью теоремы 1 получается

Теорема 2. *Пусть* $2 \le p < \infty$*. В действительном пространстве* $L_p(\mathbb{R})$ *существует функция* f*, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

плотны в $L_p(\mathbb{R})$*.*

Теорема 1 доказана С. В. Конягиным, теорема 2 — П. А. Бородиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fekete M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. 1923. Bd. 17. S. 228–249.

2. *Бородин П. А.* Плотность полугруппы в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 6. С. 21–48.

УДК 517.521

ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА И ЕЕ ОБРАЩЕНИЕ

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)

Braichev@mail.ru

Теорема Штольца [1] является дискретным аналогом теоремы Бернулли – Лопиталя. Приведем ее в общей форме — с верхними и нижними пределами вместо обычных (см., например, [2]).

Теорема Штольца. *Пусть x_n и y_n — вещественные последовательности, причем y_n строго монотонна. Если обе последовательности являются бесконечно малыми или y_n — бесконечно большая, а x_n — произвольная, то выполняются неравенства*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n},\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}. \tag{1}$$

Представим сначала равномерные оценки рассматриваемых отношений двух последовательностей.

Теорема 1. *Пусть последовательность x_n выпукла, а последо- вательность y_n положительна и строго возрастает. Пусть, далее, с неотрицательными константами m, M, $m\le M$, выполнено условие*

$$m\le\frac{x_n}{y_n}\le M,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда справедлива двусторонняя оценка

$$M\,s_1^+(\theta)\le\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\le M\,s_2(\theta),\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\theta=\dfrac{m}{M}$, *а величины $s_1(\theta)$, $s_2(\theta)$ определяются формулами*

$$s_1(\theta)=\inf_{n\ge2}\frac{1}{y_n-y_{n-1}}\sup_{k<n}\frac{y_k-\theta y_n}{k-n},$$

$$s_2(\theta) = \sup_{n \ge 1} \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \inf_{k>n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n}.$$

Оценка (2) справедлива и для строго убывающих последовательностей y_n, если величины $s_1(\theta)$, $s_2(\theta)$ заменить соответственно на $p_1(\theta)$, $p_2(\theta)$, определяемые формулами

$$p_1(\theta) = \inf_{n \ge 1} \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \inf_{k>n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n},$$
$$p_2(\theta) = \sup_{n \ge 2} \frac{1}{y_n - y_{n-1}} \sup_{k<n} \frac{y_k - \theta y_n}{k-n}.$$

Исследование случаев равенства в оценках (1) и получение неравенств противоположного смысла требует дополнительных (тауберовых) условий на эталонные последовательности y_n, с ростом или убыванием которых сравнивают поведение исследуемых последовательностей x_n. Например, обращение теоремы Штольца справедливо для *быстрорастущих последовательностей* y_n , которые по определению (см. [3]) удовлетворяют условию

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \to +\infty, \qquad n \to \infty.$$

Приводимые ниже теоремы представляют дополнения и уточнения соответствующих результатов работы [3].

Теорема 2. *Пусть x_n и y_n — положительные последовательности, причем y_n быстрорастущая. Тогда имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},$$

а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_n}{y_n} < +\infty$, то также выполняется равенство

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{y_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Следующее обращение теоремы Штольца справедливо для выпуклых последовательностей. Напомним, что последовательность y_n называется выпуклой, если с ростом n возрастает последовательность $y_{n+1} - y_n$.

Теорема 3. *Пусть x_n и y_n — положительные выпуклые последовательности, причем y_n удовлетворяет условиям*

$$\frac{y_n}{n} \to \infty, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Тогда выполняются равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Для последовательностей, имеющих промежуточный рост, чем предусмотренный в теоремах 2 и 3, справедлив следующий результат

Теорема 4. *Пусть последовательность x_n положительна и выпукла, а последовательность y_n положительна и строго возрастает. Пусть далее*

$$m = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n}, \qquad M = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n}.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leq M\,\tilde{s}_2(\theta).$$

Если, кроме того, y_n имеет лакуны Адамара, т. е. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{y_{n+1}}{y_n} > 1$, то выполняется и неравенство

$$M\,\max\{\tilde{s}_1(\theta),\,0\} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Здесь $\theta = \dfrac{m}{M}$, а величины $\tilde{s}_1(\theta)$, $\tilde{s}_2(\theta)$ задаются формулами

$$\tilde{s}_1(\theta) = \underline{\lim_{l\to\infty}}\inf_{n\geq l+1}\frac{1}{y_n-y_{n-1}}\sup_{l\leq k<n}\frac{y_k-\theta y_n}{k-n},$$
$$\tilde{s}_2(\theta) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{y_{n+1}-y_n}\inf_{k>n}\frac{y_k-\theta y_n}{k-n}.$$

В качестве иллюстрации приведем характерный пример с эталонной последовательностью экспоненциального роста.

Пусть положительная последовательность y_n имеет лакуны Адамара, и $p = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{y_{n+1}}{y_n} > 1$. Пусть далее x_n — произвольная воз- растающая выпуклая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$m = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n}, \quad M = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_n}{y_n}.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\frac{mp-M}{p-1} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \leq \frac{Mp-m}{p-1}.$$

Полученные неравенства точны, в чем можно убедиться на примере последовательности $y_n = e^{\alpha n}$.

Утверждение, аналогичное теореме 4, верно и когда последовательность y_n строго убывает к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stolz O.* Vorlesungen Uber allgemeine Arithmetik: nach den Neuen Ansichten. Leipzig : Teubners, 1885. P. 173–175.

2. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М. : Прометей, 2005. 232 с.

3. *Абанин А. В., Юделевич В. В.* Об обращении теоремы Штольца // Изв. вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 2. С. 5–9.

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, РАССМАТРИВАЕМОГО В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ [1]

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, Россия)
bmsh2001@mail.ru

Исследование классических решений функционально-дифференциальных уравнений с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ на отрезке $[0, 1]$ и соответствующих операторов обычно приводит к исследованию систем Дирака (с потенциалом специального симметричного вида), решение которых необходимо удовлетворяет дополнительному условию в неподвижной точке инволюции $x = 1/2$ (см., например, [1], [2]). Простейшее же уравнение с инволюцией $y'(x) = \lambda y(1-x)$ легко приводится к простейшему уравнению второго порядка $y''(x) = -\lambda^2 y(x)$. Однако, если допустить конечный разрыв у решения уравнения с инволюцией (т.е. рассматривать его в классе разрывных решений из пространства $C^1([0, 1/2) \cup (1/2, 1])$), то удается установить его эквивалентность и системе Дирака, и уравнению Штурма-Лиувилля, заданным на отрезке $[0, 1/2]$, но теперь уже произвольными непрерывными потенциалами [3]. Здесь мы установим связь между классическим решением смешанной задачи для волнового уравнения и решением смешанной задачи для уравнения с инволюцией, рассматриваемым в классе разрывных функций. Соотношения между классическими решениями таких задач в случае уравнений с нулевыми потенциалами исследовались в [4].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

1. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t), \quad x\in[0,1/2],\ t\in[0,+\infty),\\ u(0,t)=u(1/2,t)=0,\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad {u'}_t(x,0)=0, \quad x\in[0,1/2],\end{gathered} \tag{1}$$

где $q(x)$, $\varphi(x)$ комплекснозначные, $q(x)\in C[0,1]$. В [5] при минимальных условиях $\varphi(x)\in C^2[0,1/2]$, $\varphi(0)=\varphi(1/2)=\varphi''(0)=\varphi''(1/2)=0$, установлено, что формальное решение по методу Фурье задачи (1) является классическим решением. Из доказательства этого факта, легко следует, что частные производные $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}$ существуют и непрерывны. Поэтому уравнение в (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=-q(x)u(x,t).$$

Отсюда придем к утверждению.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи (1), то $w(x,t) = (w_1(x,t),w_2(x,t))^T$ (T — знак транспонирования) такая, что $w_1(x,t)=u(x,t)$, $w_2(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)$, является решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=B\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+Q(x)w(x,t), \quad x\in[0,1/2],\ t\in[0,+\infty),\\ w_1(0,t)=w_1(1/2,t)=0,\\ w_1(x,0)=\varphi(x), \quad w_2(x,0)=-\varphi'(x), \quad x\in[0,1/2],\end{gathered} \tag{2}$$

где $B=\mathrm{diag}(1,-1)$, $Q(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q(x) & 0\end{pmatrix}$.

Полагая $v(x,t)=w_1(x,t)$, при $x\in[0,1/2]$, $v(x,t)=w_2(1-x,t)$, при $x\in(1/2,1]$, получим

Теорема 2. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи (1), то $v(x,t)$ такая, что $v(x,t)=u(x,t)$, при $x\in[0,1/2]$, $v(x,t)=u'_t(1-x,t)+u'_x(1-x,t)$, при $x\in(1/2,1]$, является разрывным в точке $x=1/2$ решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+p(x)v(1-x,t), \quad x\in[0,1],\ t\in[0,+\infty),\\ v(0,t)=v(1/2,t)=0,\\ v(x,0)=\varphi_1(x), \quad x\in[0,1],\end{gathered} \tag{3}$$

где $p(x)=1$, при $x\in[0,1/2]$, $p(x)=-q(1-x)$, при $x\in(1/2,1]$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, при $x\in[0,1/2]$, $\varphi_1(x)=-\varphi'(1-x)$ при $x\in(1/2,1]$.

Аналогично, переходя сначала к векторному уравнению относительно $w_1(x,t) = u(x,t)$, $w_2(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$, а затем снова к скалярному, получим

Теорема 3. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи* (1), *то $\widetilde{v}(x,t)$ такая, что $\widetilde{v}(x,t) = u(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, $\widetilde{v}(x,t) = u'_t(1-x,t) - u'_x(1-x,t)$, при $x \in (1/2,1]$, является разрывным в точке $x = 1/2$ решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial \widetilde{v}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \widetilde{v}(x,t)}{\partial x} + p(x)\widetilde{v}(1-x,t), \quad x \in [0,1],\ t \in [0,+\infty), \\ \widetilde{v}(0,t) = \widetilde{v}(1/2,t) = 0, \\ \widetilde{v}(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1],\end{gathered} \tag{4}$$

где $p(x)$ из теоремы 2, а $\varphi_2(x) = \varphi(x)$, при $x \in [0,1/2]$, $\varphi_2(x) = \varphi'(1-x)$ при $x \in (1/2,1]$.

2. Теперь исследуем обратный переход от решений задач (3) и (4) к решению (1).

Лемма 1. *Если $v(x,t)$ есть решение задачи (3), то $v(x,t)$ и $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)v(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по всем $x \in [0,1/2]$ и всем t, и имеют место соотношения:*

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x,t) = -q(x)v(x,t), \qquad x \in [0,1/2], \\ v(0,t) = v(1/2,t) = 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), \quad v'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1/2].\end{gathered}$$

Аналогичный результат имеет место для решения задачи (4). Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть $v(x,t)$ есть решение задачи* (3), *$\widetilde{v}(x,t)$ есть решение задачи* (4), *причем $v(x,t) = \widetilde{v}(x,t)$ при $x \in [0,1/2]$. Тогда $v(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in [0,1/2]$ и всем t, и функция $u(x,t) = v(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, является классическим решением задачи* (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 4. С. 1309–1312.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 15–17.

3. *Бурлуцкая М. Ш.* Функционально-дифференциальные уравнения с инволюцией в классе разрывных решений // Современные методы теории краевых задач :

материалы Воронежской весенней матем. шк. «Понтрягинские чтения XXVII». Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2017. С. 47–48.

4. *Хромов А. П.* Об одном свойстве смешанной задачи с инволюцией // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Материалы 10-й Междунар. Казан. летней науч. школы-конф. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2011. Т. 43. С. 364–365.

5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРЫХ ДЛИНА КРАТЧАЙШЕЙ СЕТИ ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ ПОПАРНЫХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ТОЧКАМИ[1]

Л. Ш. Бурушева (Москва, Россия)
lburusheva@gmail.com

Пусть X — банахово пространство и $x_1, ..., x_n \in X$. *Длиной кратчайшей сети* для точек $x_1, ..., x_n$ называется число

$$|\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}, X) = \inf\{|\Gamma| : \text{ сеть } \Gamma \text{ соединяет точки } x_1, \ldots, x_n\},$$

где сеть — связный граф с ребрами-отрезками, содержащий точки в качестве своих вершин. Через $|\Gamma|$ обозначается длина сети, то есть сумма длин ее ребер. Будем говорить, что банахово пространство *реализует кратчайшую сеть* для $x_1, \ldots, x_n$, если $|\Gamma_0| = |\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}, X)$ для некоторой сети Γ_0, соединящей $x_1, \ldots, x_n$.

Доклад посвящен вопросу, поставленному в работе [2]: в каких банаховых пространствах для всякого натурального n величина $|\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}, X)$ зависит только от попарных расстояний между точками $x_k \in X$ $(k = 1, \ldots, n)$?

Теорема. *В действительном банаховом пространстве X, реализующем кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств, длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда X либо предуально к L_1, либо гильбертово.*

Пространство X *предуально* к L_1 [3], если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-08335).

Следствие. *В n-мерном действительном банаховом пространстве X длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда X изометрически изоморфно либо l_2^n, либо l_∞^n.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Теория экстремальных сетей. Ижевск : ИКИ, 2003. 424 с.
2. *Беднов Б. Б., Бородин П. А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20.
3. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. Vol. 48. P. 1–112.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЕМ РАЗРЫВА[1]

С. А. Бутерин (Саратов, Россия)

buterinsa@info.sgu.ru

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — спектр краевой задачи $L = L(M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ вида

$$-y''(x) + \int_0^x M(x-t)y'(t)\,dt = \lambda y(x), \quad x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \cup \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big), \tag{1}$$

$$y\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_0 y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \quad y'\Big(\frac{\pi}{2}+0\Big) = \alpha_1 y'\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big) + \beta y\Big(\frac{\pi}{2}-0\Big), \tag{2}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$ — комплекснозначная функция, а α_j, β — комплексные числа, причем $\alpha_0 + \alpha_1 \neq 0$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Собственные значения задачи L имеют вид*

$$\lambda_k = (k + \kappa_k)^2, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \tag{4}$$

Исследуется обратная задача восстановления функции $M(x)$ по спектру $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в предположении, что числа $\alpha_0, \alpha_1, \beta$ известны. Наиболее полные результаты по обратным спектральным задачам получены для дифференциальных операторов (см. обзор в [1]). В частности, обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля с условиями разрыва изучалась в [2, 3]. Различные аспекты обратных задач для интегро-дифференциальных операторов без разрыва исследовались в [4–9] и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

других работах. Что касается интегро-дифференциальных операторов с условиями разрыва, то для операторов первого порядка обратная задача изучалась в [10, 11], а для операторов второго порядка исследовался лишь вопрос единственности решения обратной задачи в специальном случае, когда терпит разрыв только y', но его величина зависит от λ (см. [12]). В данной работе установлена единственность решения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости рассматриваемой обратной задачи при условии, что $\alpha_0 + \alpha_1 \notin (-\infty, 0]$, т. е. справедлива

Теорема 2. *Пусть заданы* $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha_0+\alpha_1 \notin (-\infty, 0]$. *Тогда для произвольный последовательности комплексных чисел* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *вида* (4) *существует единственная (с точностью до значений на множестве меры нуль) функция* $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, *такая что последовательность* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *является спектром соответствующей краевой задачи* $L(M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$.

Схема доказательства. Можно показать, что собственные значения краевой задачи L совпадают с нулями функции

$$\Delta(\lambda) = S(\pi,\lambda) + \Big((\alpha_0 - 1)C(a,\lambda) + (\alpha_1 - 1)S'(a,\lambda) + \beta S(a,\lambda)\Big)S(a,\lambda),$$

где $a = \pi/2$, а $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $C(0,\lambda) = S'(0,\lambda) = 1$, $C'(0,\lambda) = S(0,\lambda) = 0$. Справедливы следующие представления (см. [5, 8]):

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P(x, x-t)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,dt, \quad C(x,\lambda) = 1 - \lambda\int_0^x S(t,\lambda)\,dt, \quad (5)$$

где

$$P(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(x-t)^\nu}{\nu!} N^{*\nu}(t), \qquad (6)$$

$$N^{*1}(x) = N(x), \quad N^{*(\nu+1)}(x) = N * N^{*\nu}(x) = \int_0^x N(x-t)N^{*\nu}(t)\,dt,$$

а функция $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi)$, является решением уравнения

$$M(x) = 2N(x) - \int_0^x dt \int_0^t N(t-\tau)N(\tau)\,d\tau, \quad 0 < x < \pi. \qquad (7)$$

С помощью (5), (6) доказывается следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx, \quad w(x) \in L_2(0,\pi), \qquad (8)$$

при этом
$$w(x) = A(x; \alpha_0, \alpha_1, \beta, N), \tag{9}$$
где A — некоторый оператор, нелинейно зависящий от функции $N(x)$.

Отметим, что теорема 1 является следствием представления (8). Для доказательства же теоремы 2 нужно посмотреть на соотношение (9), как на нелинейное уравнение относительно функции $N(x)$. Развивая метод, использованный в работе [5], можно показать, что если $\alpha_0+\alpha_1 \notin (-\infty, 0]$, то для всякой функции $w(x) \in L_2(0,\pi)$ нелинейное уравнение (9) имеет единственное решение $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi)$.

Далее, используя (8) и теорему Адамара, можно показать, что для функции $\Delta(\lambda)$ имеет место также представление
$$\Delta(\lambda) = \pi\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{k^2}. \tag{10}$$
Кроме того, известным методом (см., например, [5]) доказывается, что для всякой последовательности комплексных чисел вида (4) функция $\Delta(\lambda)$, определенная по формуле (10), имеет вид (8).

Таким образом, доказательство теоремы 2 носит конструктивный характер и состоит из следующих шагов. По заданным числам λ_k, $k \in \mathbb{N}$, вида (4) и известным α_0, α_1 строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (10). Решая уравнения (9) с функцией $w(x) \in L_2(0,\pi)$ из представления (8) для построенной функции $\Delta(\lambda)$, находим $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi)$. Наконец, строим функцию $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, по формуле (7). Нетрудно увидеть, что заданная последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является спектром построенной краевой задачи $L(M, \alpha_0, \alpha_1, \beta)$ вида (1)–(3). Единственность следует из единственности решения уравнения (9). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

2. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 8. С. 1139–1140.

3. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse spectral problems for singular non-selfadjoint differential operators with discontinuities in an interior point // Inverse Problems. 2002. Vol. 18. P. 757–773.

4. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.

5. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Math. 2007. Vol. 50. № 3–4. P. 173–181.

6. *Курышова Ю. В.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 6. С. 855–866.

7. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

8. *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Letters. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

9. *Bondarenko N., Buterin S.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results in Math. 2017. Vol. 71. P. 1521–1529.

10. *Бутерин С. А.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов с условием разрыва // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 9–12.

11. *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for first-order integro-differential operators with discontinuities // Appl. Math. Letters. 2018. Vol. 78. P. 65–71.

12. *Manafov M. Dzh.* An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operator with integral delay // Electron. J. Diff. Eqns. 2017. Vol. 2017, №. 12. P. 1–8.

УДК 517.95

ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА[1]

В. Б. Васильев (Белгород, Россия)
vbv57l@inbox.ru

Для исследования дискретных аналогов псевдодифференциальных уравнений [1, 2] мы будем использовать дискретное преобразование Фурье для определения дискретных пространств Соболева – Слободецкого, которые очень удобны для изучения дискретных псевдодифференциальных уравнений.

Обозначим $u_d(\tilde{x})$ функцию дискретного аргумента $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$, и $\tilde{u}_d(\xi), \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \hbar = h^{-1}, \mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$, — ее дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} u_d(\tilde{x}) e^{i\tilde{x}\cdot\xi} h^m.$$

Обозначим $\zeta^2 = h^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)^2$ и введем следующее

Определение 1. *Пространство* $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из дискретных функций $u_d(\tilde{x})$, для которых следующая норма

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

конечна.

Далее, пусть $D = \mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, и $D_d = D \cap h\mathbb{Z}^m$ — дискретная область.

Определение 2. *Пространство* $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.7311.2017/БЧ).

Норма в пространстве $H^s(D_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. *Пространство* $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций u_d с носителем в D_d, причем эти функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в пространстве $H_0^s(D_d)$ дается формулой

$$||u_d||_s^+ = \inf ||\ell u_d||_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ — периодическая функция на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$. Такие функции мы называем символами.

Определение 3. *Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d в дискретной области D_d* называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d.$$

Класс E_α состоит из символов, удовлетворяющих следующему условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}$, $\xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

Определение 4. *Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$* называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полуполосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A_{d,+}^{\pm 1}(\xi)| \leq c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{æ}{2}}, \quad |A_{d,-}^{\pm 1}(\xi)| \leq c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{\alpha - æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется *индексом периодической факторизации.*

Для случая $æ - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$, мы рассмотрим следующее достаточно обшее уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^{n} K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \tag{1}$$

с неизвестными функциями $u_d, \tilde{b}_j, j = 0, 1, \ldots, n$, а K_j — заданные псевдодифференциальные операторы с символами $K_j(\xi) \in E_{\alpha_j}$.

Замечание. Мы говорим «оператор типа потенциала», потому что оператор K_j действует следующим образом. Если обозначить $\hat{K}_j(\tilde{x})$ «ядро» псевдодифференциального оператора K_j, мы получим

$$K_j\left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m)\right) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^{m-1}} \hat{K}_j(\tilde{x}' - \tilde{y}', \tilde{x}_m) b_j(\tilde{y}') h^{m-1}.$$

Это действительно дискретный оператор типа потенциала.

Продолжив правую часть и применив дискретное преобразование Фурье, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} t_{kj}(\xi') \tilde{b}_j(\xi') = f_k(\xi'), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где

$$t_{kj}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \left(\frac{e^{ih\xi_m} - 1}{h}\right)^k \frac{K_j(\xi', \xi_m)}{A_{d,-}(\xi', \xi_m)} d\xi_m,$$

$$f_k(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \left(\frac{e^{ih\xi_m} - 1}{h}\right)^k A_{d,-}^{-1}(\xi', \xi_m) \widetilde{(\ell v_d)}(\xi', \xi_m) d\xi_m.$$

Теорема. *Пусть* $æ - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u_d \in H^s(h\mathbb{Z}^m)$, $c_j \in H^{s_j}(h\mathbb{Z}^{m-1})$, $s_j = s - \alpha + \alpha_j + 1/2$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *тогда и только тогда, когда*

$$ess \inf_{\xi' \in h\mathbb{T}^{m-1}} |\det(t_{kj}(\xi'))_{k,j=0}^{n} > 0.$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \le a\|v_d\|_{s-\alpha}^{+}, \quad \|b_j\|_{s_j} \le a_j\|v_d\|_{s-\alpha}^{+}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

с постоянными $a, a_1, \ldots, a_n$, *не зависящими от* h.

Некоторые предшествующие исследования и технические подробности содержатся в работах [3–5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М. : Наука, 1973. 236 с.

2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : URSS, 2010. 135 с.

3. *Vasilyev V. B.* Potential like operators in the theory of boundary value problems in non-smooth domains // Azerb. J. Math. 2012. Vol. 2, № 2. P. 117–128.

4. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, вып. 5. С. 642–649.

5. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Difference equations in a multidimensional space // Math. Model. Anal. 2016. Vol. 21, № 3. P. 336–349.

УДК 517.9

ЭНТРОПИЙНЫЕ ЧИСЛА ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА: НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ[1]

А. А. Васильева (Москва, Россия)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $T : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Энтропийные числа оператора T для $k \in \mathbb{N}$ определяются равенством

$$e_k(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \; \exists y_1, \, \ldots, \, y_{2^{k-1}} \in Y : \; T(B_X) \subset \cup_{i=1}^{2^{k-1}} (y_i + \varepsilon B_Y) \right\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, g, $v : \Omega \to (0, \infty)$ — измеримые функции. Обозначим через $l_{r,d}$ число компонент обобщенной вектор-функции $\nabla^r f$ и положим

$$W^r_{p,g}(\Omega) = \left\{ f : \; \Omega \to \mathbb{R} \middle| \; \exists \psi : \; \Omega \to \mathbb{R}^{l_{r,d}} : \; \|\psi\|_{L_p(\Omega)} \le 1, \, \nabla^r f = g \cdot \psi \right\}$$

$\left(\text{соответствующую функцию } \psi \text{ обозначим через } \dfrac{\nabla^r f}{g}\right)$,

$$\|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} = \|f\|_{q,v} = \|fv\|_{L_q(\Omega)}, \qquad L_{q,v}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} | \; \|f\|_{q,v} < \infty \}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^d$ и $a > 0$ обозначим через $B_a(x)$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса a с центром в точке x.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Мы скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют число $T(x) > 0$ и число $\gamma_x : [0, \, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами: 1) γ_x имеет натуральную параметризацию, 2) $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$, 3) $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0, \, T(x)]$.

Область Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h : (0, \, 1] \to (0, \, \infty)$ неубывающая функция. Скажем, что Γ является h-множеством, если существуют число

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

$c_* \geq 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\operatorname{supp}\mu = \Gamma$ и

$$c_*^{-1}h(t) \leq \mu(B_t(x)) \leq c_*h(t)$$

для любого $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\, 1]$.

Пусть $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ — ограниченная область, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество, где $h \in \mathbb{H}$ имеет следующий вид в окрестности нуля:

$$h(t) = t^\theta |\log t|^\gamma \tau(|\log t|), \quad 0 < \theta < d,$$

где $\tau : (0,\, +\infty) \to (0,\, +\infty)$ — абсолютно непрерывная функция такая, что

$$\frac{t\tau'(t)}{\tau(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Пусть $1 < p < q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$, β_g, $\beta_v \in \mathbb{R}$, $g(x) = \varphi_g(\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma))$, $v(x) = \varphi_v(\operatorname{dist}_{|\cdot|}(x,\, \Gamma))$,

$$\varphi_g(t) = t^{-\beta_g}|\log t|^{-\alpha_g}\rho_g(|\log t|), \;\; \varphi_v(t) = t^{-\beta_v}|\log t|^{-\alpha_v}\rho_v(|\log t|),$$

где ρ_g и ρ_v — абсолютно непрерывные функции, такие что

$$\frac{t\rho_g'(t)}{\rho_g(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0, \;\; \frac{t\rho_v'(t)}{\rho_v(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Без потери общности можно считать, что $\overline{\Omega} \subset \left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)^d$.

Обозначим через $\mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^d)$ пространство полиномов на $\mathbb{R}^d$ степени не выше $r-1$. В основной теореме условия на веса окажутся такими, что $W^r_{p,g}(\Omega) \subset L_{q,v}(\Omega)$ и существуют $M > 0$ и линейный непрерывный оператор $P : L_{q,v}(\Omega) \to \mathcal{P}_{r-1}(\Omega)$ такие, что для любой функции $f \in W^r_{p,g}(\Omega)$

$$\|f - Pf\|_{L_{q,v}(\Omega)} \leq M \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Обозначим $\mathcal{W}^r_{p,g}(\Omega) = \operatorname{span} W^r_{p,g}(\Omega)$, $\hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) = \{f - Pf : \;\; f \in \mathcal{W}^r_{p,g}(\Omega)\}$. Введем на $\hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega)$ норму $\|f\|_{\hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega)} := \left\|\frac{\nabla^r f}{g}\right\|_{L_p(\Omega)}$. Обозначим через $I : \hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)$ оператор вложения. Тогда он непрерывен.

Положим для $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\overline{u}_j = 2^{j\left(\beta_g - r + \frac{d}{p}\right)}(j+1)^{-\alpha_g}\rho_g(j+1), \quad \overline{w}_j = 2^{j\left(\beta_v - \frac{d}{q}\right)}(j+1)^{-\alpha_v}\rho_v(j+1).$$

Пусть $\beta_g + \beta_v = \delta$ и существуют $C \geq 1$ и монотонная функция $\omega : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что $\frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ и для любого $j_0 \in \mathbb{Z}_+$

$$C^{-1}(j_0+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\omega(j_0+1) \leq \sup_{j\geq j_0} \overline{u}_j \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{w}_i^q \frac{h(2^{-j})}{h(2^{-i})} \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C(j_0+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\omega(j_0+1).$$

Обозначим $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, g, v, h, a, c_*, C)$, $\mathfrak{Z}_* = (\mathfrak{Z}, R)$, где $R = \operatorname{diam}\Omega$.

Теорема 1. *Выполнено равенство*

$$e_n(I : \hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \max\{\omega(n), \omega(\log n)\}.$$

УДК 517.9

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1]

А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)
vam21@yandex.ru, LukomskiiSF@info.sgu.ru

В работе [1] С. Кзырев построил ортогональные системы всплесков на полях p-адических чисел. В [2] S. Albeverio, С. Евдокимов и М. Скопина доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))$ ступенчатой функции φ ортонормирована и функция φ порождает ортогональный p-адический кратномасштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. То есть два условия на функцию: ортогональность системы сдвигов и маштабирующее уравнение дают в качестве решения только систему Хаара. В 2015 году С. Евдокимов и М. Скопина [3] доказали, что для поля $\mathbb{Q}_p$ любой ортогональный вейвлет-базис в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, который состоит из локально-постоянных (периодических) функций, является модификацией базиса Хаара. В работе [4] С.Евдокимов построил ортогональные базисы всплесков, которые состоят из функций с финтным преобразованием Фурье. Эти базисы также ассоциированы с КМА Хаара.

В связи с работой [2] в [5] было доказано, что при $p = 2$ и $M = 1$ требование «φ порождает КМА» (маштабирующее уравнение), можно

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант (проект № 16-01-00152).

опустить. Поэтому представляет интерес нахождения функций, сдвиги которых образуют ортонормированную систему, но не являются решениями маштабирующего уравнения. В [5] авторы построили функции φ которые имеют большой носитель и постоянны на маленьких смежных классах с ортогональной системой сдвигов для поля $\mathbb{Q}_p$. В работе [6] строятся функции, сдвиги которых образуют ортонормированную систему мы в случае локальных полей нулевой характеристики.

1. Основные понятия. Приведем необходимые свойства локальных полей нулевой характеристики. Пусть F является конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени n. На поле F существует нормирование $\|\cdot\|$ являющееся продолжением p-адического нормирования, которое для элементов $x \in \mathbb{Q}_p$ имеющих разложение

$$x = p^t \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i,$$

где $t \in \mathbb{Z}$ $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ и $a_0 \neq 0$, определяется, как $\|x\|_p = p^{-t}$. Условие продолжимости нормы означает, что для элементов $x \in \mathbb{Q}_p \subset F$ $\|x\| = \|x\|_p$.

Множество

$$\mathbf{O} = \{x \in F \mid \|x\| \leq 1\}$$

является кольцом и называется кольцом целых чисел поля F. Кольцо $\mathbf{O}$ содержит единственный максимальный идеал, который является главным $\mathbf{P} = \pi\mathbf{O} = \{x \in F| \; \|x\| < 1\}$. Фактор-кольцо $\mathbf{k} = \mathbf{O}/\pi\mathbf{O}$ является полем изоморфным $GF(p^s)$. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество представителей смежных классов $\mathbf{O}/\pi\mathbf{O}$, а через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ такие представители, смежные классы которых при изоморфизме являются базисом расширения поля $GF(p^s)$ над полем $GF(p)$. Для любого $a_i \in \mathbf{A}$ существует единственное представление в виде $a_i = a_{i1}\varepsilon_1 + \dots + a_{is}\varepsilon_s$, где $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Каждый элемент $x \in F$ допускает единственное разложение

$$x = \pi^\gamma (a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots),$$

где $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbf{A}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\pi^e = p$ и $es = n$. Норма элемента $\|x\| = p^{-\gamma/e}$. Базисом расширения поля F над $\mathbb{Q}_p$ являются элементы $\varepsilon_i\pi^j$ при $i = 1, \dots, s$ и $j = 0, \dots, e-1$.

Множество $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{F} \, | \|x - a\| \leq p^\gamma\}$ является π-адическим шаром. Дробной частью элемента $x \in F$ называется $\{x\}_F = \pi^\gamma \sum_{k=0}^{-\gamma-1} a_k\pi^k$, множество I_F состоит из чисто дробных чисел $x = \{x\}_F$ и $I_F(N) = I_F \cap B_N(0)$. Обозначим $D_{-N}(M)$, где $N, M \in \mathbb{N}$, множество локально постоянных функций, носитель которых содержится в $B_N(0)$ и являющихся постоянными на множествах $a+\pi^M\mathbf{O}$.

2. Ортогональная система сдвигов. Фактор-группа $G = \pi^{-N}\mathbf{O}/\pi^M\mathbf{O}$ является конечной абелевой группой порядка $p^{s(N+M)} = q$. Пусть χ_0, $\chi_1,\ldots$, χ_{q-1} — множество аддитивных характеров группы G. Они образуют ортонормированный базис в пространстве комплекснозначных функций на G.

Определим функции ψ_i на F следующим образом

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \chi_i(x), & \text{если } x \in \pi^{-N}\mathbf{O}, \\ 0, & \text{если } x \notin \pi^{-N}\mathbf{O}, \end{cases}.$$

Эти функции являются аддитивными на F , $\psi_i(x-y) = \psi_i(x)\overline{\psi_i(y)}$ и образуют ортогональный базис для $D_{-N}(M)$ над $\mathbb{C}$, так как

$$\int_F \psi_i(x)\overline{\psi_j(x)}dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ p^{sN}, & i = j, \end{cases}.$$

и для φ имеем место разложение

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{q-1} c_i\psi_i(x).$$

Обозначим через $H_F(N) = \{h \mid h = a-b, \text{ где } a,b \in I_F(N)\}$.

Теорема 1 [6]. *Для функции $\varphi \in D_{-N}(M)$ система сдвигов $(\varphi(x-a))_{a\in I_F}$ будет ортонормированна тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=0}^{q-1} |c_i|^2\psi_i(h) = \begin{cases} p^{sN}, & \text{если } h = 0, \\ 0, & \text{если } h \neq 0 \text{ и } h \in H_F(N), \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 2 [6]. *Пусть F — локальное поле характеристики ноль. Если $M > \frac{e}{\log_2 p}$, то множество функций $\varphi \in D_{-N}(M)$, сдвиги которых на элементы из I_F образует ортонормированную систему в $L_2(F)$ содержит нетождественную функцию. Количество таких линейно независимых функций в пространстве $D_{-N}(M)$ не менее $p^{s(N+M)} - 2^n p^{sN} + 1$.*

Замечание 1. В [2] для поля $\mathbb{Q}_p$ доказано, что система из теоремы 1 имеет единственное действительное решение при условии, что не более p^N коэффициентов отлично от нуля. Это так, если функция удовлетворяет масштабирующему уравнению. Мы показываем, что если отказаться от этого условия, то появляются другие действительные решения.

Замечание 2. В случае поля $\mathbb{Q}_p$ всегда есть нетождественная функция, обладающая системой ортогональных сдвигов, исключение только $p = 2$ и $M = 1$, что доказано в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козырев С. В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149-–158.

2. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

3. *Evdokimov S., Skopina M.* On orthogonal p-adic wavelet bases // J. Math. Anal. and Appl. 2015. Vol. 424, № 2. P. 952–965.

4. *Evdokimov S.*, On non-compactly supported p-adic wavelets // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 443, № 2. P. 1260–1266

5. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел //Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 14, вып. 3. С. 256–262. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.

6. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* Системы сдвигов в локальных полях нулевой характеристики // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 25-–32.

УДК 517.444

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВЕРТКИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

С. С. Волосивец (Саратов, Россия), Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия)

golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$. Положим $p_{-j} = p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $m_j = p_1...p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому числу $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \le x_n < p_n, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь в первой сумме из (1) присутствует конечное число слагаемых и разложение определяется однозначно, если для чисел вида $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_j \ne 0$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} z_j/m_j$, $z_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j)$, $|j| \in \mathbb{N}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Эта операция не определена, если $z_j = p_j - 1$ для всех $j \ge j_0$, т.е. для счетного множества y при фиксированном $x \in \mathbb{R}_+$. Аналогично определяется обратная операция $x \ominus y$.

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$, записанных в виде (1), определим ядро $\chi(x,y)$ равенством $\chi(x,y) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_j y_{-j} + x_{-j} y_j)/p_j\right)$. Для почти всех пар $(x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ имеем равенство $\chi(x \oplus z, y) = \chi(x,y)\chi(z,y)$ и $\chi(x \ominus z, y) = \chi(x,y)\overline{\chi(z,y)}$. В частности, верно равенство $\chi(x, 0 \ominus y) = \overline{\chi(x,y)}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что $\chi(x,y)$ постоянна по x на всех промежутках $I_j^k = [j/m_k, (j+1)/m_k)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, при $0 \le y < m_k$ (см. [1, § 1.5]). Далее $D_y(x) = \int_0^y \chi(x,t)\,dt$, $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, состоят из измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций, для которых $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty$. При $p = \infty$ для ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций f ($f \in B(\mathbb{R}_+)$) будем использовать равномерную норму $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$. Через $Lip^*(\alpha, p)$ обозначим пространство функций $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, таких что $\|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p = O(h^\alpha)$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$-преобразование Фурье (см. [1] и [2]) задается формулой $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$, где правая часть является интегралом Лебега. Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, $\mathbf{P}$-преобразование Фурье вводится, как предел $\int_0^a f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, при $a \to +\infty$. Согласно [1, гл. 6, теорема 6.1.7], имеет место аналог неравенства Хаусдорфа-Юнга

$$\|\widehat{f}\|_q \le \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}_+), \quad 1 \le p \le 2. \tag{2}$$

Для $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, согласно (2), $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом справедлив аналог равенства Парсеваля – Планшереля $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, который легко выводится из теоремы 6.2.4 в [1].

Наконец для убывающей на $(0, \infty)$ к нулю и нитегрируемой в окрестности нуля функции f мы определим $\widehat{f}(x)$, как несобственный интеграл $\int_0^\infty f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ (см. [3]).

Мультипликативной сверткой функций $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ называется $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus t) g(t)\,dt$, если последний интеграл существует. Пусть G_n — пространство функций, постоянных на всех промежутках I_k^n, $k \in \mathbb{Z}_+$, для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\mathcal{E}_{m_n}(f)_p = \inf\{\|f - g\|_p : g \in G_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p < \infty$. Рассмотрим также модуль непрерывности

$$\omega_n(f)_p := \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_p.$$

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$. Тогда справедливо неравенство А. В. Ефимова [1, § 10.5]

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \le \|f - f * D_{m_n}\|_p \le \omega_n(f)_p \le 2\mathcal{E}_{m_n}(f)_p.$$

Далее мы изучаем условия интегрируемости преобразования Фурье от сверток $h = f * g$ и асимптотическое поведение интегральных норм $\widehat{h}X_{[m_n,\infty)}$. При этом большое внимание уделяется доказательству неулучшаемости этих условий. В случае тригонометрических рядов абсолютная сходимость и ее обобщения для периодических сверток изучались М. и Ш. Изуми [4] и К. Оневиром [5], а для мультипликативных систем — К.Оневиром [6] и одним из авторов [7].

Отметим следующий результат из [5].

Теорема A. 1. *Если $g, h \in L^p_{2\pi}$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, то ряд из модулей коэффициентов Фурье в степени $q/2$ их 2π-периодической свертки $(g * h)_{2\pi}$ сходится.*

2. *Для любого $1 < p \le 2$ найдутся $g, h \in L^p_{2\pi}$,такие что ряд из модулей коэффициентов Фурье в любой степени $\beta < q/2$ их 2π-периодической свертки $(g * h)_{2\pi}$ расходится.*

Величины

$$\rho_n^{(r)}(h) = \left(\sum_{|k| \ge n} |c_k(h)|^r \right)^{1/r},$$

где $\{c_k(h)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных коэффициентов Фурье функции h, являющейся 2π-периодической сверткой функций f и g, и их взаимосвязь с наилучшими приближениями f и g изучались Н. А. Ильясовым [8-10]. Так, в [8] им была установлена

Теорема B. 1. *Пусть $1 < p \le 2$, $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, h — 2π-периодическая свертка f и g, $\gamma = p'/2$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда*

$$\rho_{n+1}^{(\gamma)}(h) \le C(p) E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})},$$

где $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})}$ — наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в $L^p(\mathbb{T})$.

2. *Пусть $1 < p \le 2$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma = p'/2$, где $1/p + 1/p' = 1$. Тогда существуют $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, такие что $E_n(f)_{L^p(\mathbb{T})} \asymp n^{-\alpha}$, $E_n(g)_{L^p(\mathbb{T})} \asymp$ $\asymp n^{-\beta}$ и для 2π-периодической свертки h функций f и g имеем*

$$\rho_{n+1}^{(\gamma)}(h) \asymp n^{-\alpha-\beta}.$$

Здесь $A_n \asymp B_n$, если $A_n = O(B_n)$ и $B_n = O(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

В [10] была доказана

Теорема C. *Множество непрерывных 2π-периодических функций h со свойством $\rho_{n+1}^{(1)}(h) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\lambda_n \downarrow 0$, совпадает с множеством 2π-периодических сверток функций f и g, таких что $E_n(f)_{L^2(\mathbb{T})}, E_n(g)_{L^2(\mathbb{T})} = O(\lambda_n^{1/2})$.*

Основные результаты

Важным средством при доказательстве неулучшаемости условий интегрируемости является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $g(x)$ не возрастает на $(0,\infty)$, $g \in L^1[0,1)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $1 < p \le 2$. Тогда существание $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, такой что $\widehat{f} = g$ п.в. на $\mathbb{R}_+$, равносильно выполнению условия $g(x)x^{1-2/p} \in L^p(\mathbb{R}_+)$. При выполнении этого условия имеют место следующие неравенства*

$$\|f(x)\|_p \le C\|g(x)x^{1-2/p}\|_p, \tag{3}$$

$$\mathcal{E}_{m_n}(f)_p \le C\left(m_n^{p-1}g^p(m_n) + \int_{m_n}^{\infty} g^p(x)x^{p-2}\,dx\right)^{1/p}. \tag{4}$$

При этом константы в неравенствах (3) и (4) не зависят от g и $n \in \in \mathbb{Z}_+$.

Для косинус-преобразования Фурье близкие к теореме 1 результаты принадлежат Харди и Литтлвуду (см. [11, глава 4, теоремы 79, 80, 82]. Оценка (4) является аналогом оценки А. А. Конюшкова для наилучших приближений сумм тригонометрических рядов [12].

Теорема 2 является аналогом теоремы A (см. теоремы 4 и 5 из [5]) для тригонометрических рядов.

Теорема 2. 1. *Пусть $g, h \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le 4/3$, $1/p + 1/q = 1$, $f = g * h$. Тогда $\hat{f} \in L^{q/2}(\mathbb{R}_+)$.*

2. *Если $1 < p \le 4/3$, $1/p + 1/q = 1$, то существуют $g, h \in L^p(\mathbb{R}_+)$, такие что для $f = g * h$ имеем $\hat{f} \notin L^r(\mathbb{R}_+)$ при всех $0 < r < q/2$.*

Теорема 3. 1. *Пусть $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, $1/p + 1/q \ge 3/2$, $\alpha > 0$. Если $g \in Lip^*(\alpha, p)$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $f = g * h$, то*

$$\hat{f} \in L^\beta(\mathbb{R}_+), \quad pq/(\alpha pq + 2pq - p - q) < \beta < pq/(2pq - p - q).$$

2. *Пусть $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, $\alpha > 0$, $3/2 \le 1/p + 1/q < \alpha + 2 - 1/q$. Тогда существуют $g \in Lip^*(\alpha, p)$ и $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, такие что*

$$(g * h)\hat{} \notin L^{\beta_0}(\mathbb{R}_+), \quad \beta_0 = pq/(\alpha pq + 2pq - p - q)).$$

Следствие 1. 1. *Пусть $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, и $\alpha > 1/p + 1/q - 1$. Если $g \in Lip^*(\alpha, p)$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, то для $f = g * h$ имеем $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

2. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $1 < q \le 2$, $0 < \alpha = 1/p + 1/q - 1$. *Тогда существуют* $g \in Lip^*(\alpha, p)$ *и* $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, *такие что* $(g * h)\hat{} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.

Утверждение пункта 1 теоремы 3 и следствие 1 являются аналогами теоремы 6, следствия 5 и теоремы 7 из [6] для мультипликативных систем. Дальнейшие результаты в этом направлении см. в [7]. Теоремы 2, 3 и следствие 1 были опубликованы в [13].

Следующая теорема является аналогом теоремы C.

Теорема 4. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *такова что* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *убывает к нулю. Тогда* f *удовлетворяет соотношению* $\int_{m_n}^{\infty} |\widehat{f}(t)|\, dt = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *в том и только в том случае, когда* $f = g * h$, *где* $g, h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *и при этом*

$$\mathcal{E}_{m_n}(g)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2}), \quad \mathcal{E}_{m_n}(h)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 5. 1. *Пусть* $1 < q_1, q_2 < 2$, $3/2 < 1/q_1 + 1/q_2 < 2$, $1/r = 1/q_1 + 1/q_2 - 1$, $1/r + 1/r' = 1$. *Если* $f \in L^{q_1}(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^{q_2}(\mathbb{R}_+)$, *то* $h = f * g \in L^r(\mathbb{R}_+)$ *и справедливы неравенства*

$$\|\widehat{h}\|_{r'} \le \|f\|_{q_1} \|g\|_{q_2}, \quad \left(\int_{m_n}^{\infty} |\widehat{h}(t)|^{r'}\, dt\right)^{1/r'} \le 4\mathcal{E}_{m_n}(f)_{q_1} \mathcal{E}_{m_n}(g)_{q_2}. \qquad (5)$$

2. *В условиях п. 1 для* $2 \ge \theta > r$ *и* $0 < \gamma < r'$ *найдутся* $f_0 \in L^{q_1}(\mathbb{R}_+)$ *и* $g_0 \in L^{q_2}(\mathbb{R}_+)$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}(\mathbb{R}_+)$ *и* $\widehat{h_0} \notin L^{\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Более общее утверждение, чем существование $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{\theta}(\mathbb{R}_+)$, можно найти в теореме 1.1 (iii) из [14] для локально-компактных, но не компактных групп. Наше доказательство является более простым.

Утверждения части 1 теоремы 5 справедливы при $1 \le q_1, q_2 \le 2$ и $3/2 \le 1/q_1 + 1/q_2 \le 2$. В случае $r' = \infty$ во втором неравенстве (5) в левой части вместо интеграла рассматриваем $\|\widehat{h} X_{[m_n, \infty)}\|_{\infty}$. В теореме 6 устанавливается точность этого утверждения в достаточно общей ситуации.

Теорема 6. *Пусть* $1 \le q_1, q_2 \le 2$, $3/2 \le 1/q_1 + 1/q_2 \le 2$, $1/r = 1/q_1 + 1/q_2 - 1$ *и* $1/r + 1/r' = 1$, *последовательности* $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \nu_k^{q_1} = O(\nu_n^{q_1}), \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k^{q_2} = O(\mu_n^{q_2}), \quad \nu_n \le C\nu_{n+1}, \quad \mu_n \le C\mu_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда существуют функции $f_0 \in L^{q_1}(\mathbb{R}_+)$ *и* $g_0 \in L^{q_2}(\mathbb{R}_+)$, *такие что* $\mathcal{E}_{m_n}(f_0)_{q_1} \asymp \nu_n$, $\mathcal{E}_{m_n}(g_0)_{q_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^r(\mathbb{R}_+)$ *верно соотношение*

$$\left(\int_{m_n}^{\infty} (\widehat{h_0(x)})^{r'}\, dx\right)^{1/r'} \asymp \nu_n \mu_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из теорем 5 и 6, в частности, следует аналог теоремы B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

2. *Виленкин Н. Я.* К теории интегралов Фурье на топологических группах // Матем. сб. 1952. Т. 30, № 2. С. 233–244.

3. *Golubov B. I., Volosivets S. S.* On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transform // Georgian Math. J. 2009. Vol. 16, № 3. P. 533–546.

4. *Izumi M., Izumi S.-I.* Absolute convergence of Fourier series of convolution functions // J. Approx. Theory, 1968. Vol. 1, № 1. P. 103–109.

5. *Onneweer C. W.* On absolutely convergent Fourier series // Arkiv Mat. 1974. Vol. 12, № 1–2. P. 51–58.

6. *Onneweer C. W.* Absolute convergence of Fourier series on certain groops. II // Duke Math. J. 1974. Vol. 41, № 3. P. 679–688.

7. *Волосивец С. С.* О сходимости рядов из коэффициентов Фурье мультипликативных сверток // Изв. вузов. Математика. 2008. № 11. С. 27–39.

8. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

9. *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series (second report) // Transactions of NAS of Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. 2004. Vol. 24, № 4. P. 135–142.

10. *Ильясов Н. А.* Скоростная L_p-версия критерия М.Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 193–202.

11. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 480 с.

12. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения и тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Матем. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.

13. *Голубов Б. И., Волосивец С. С.* Обобщенная весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье // Тр. МФТИ. 2011. Т. 3, № 1. С. 49–56.

14. *Quek T. S., Yap L. Y. H.* Sharpness of Young's inequality for convolution // Math. Scand. 1983. Vol. 53, № 2. P. 221–237.

УДК 517.518

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец, М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$, $x_j \in \mathbb{Z}_j$. Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_j. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде $k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}_j$. Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$ (см. [1, гл. 1,§ 1.5]). Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье задаются формулами

$$\hat{f}(i) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_i(t)}\,dt,\ i \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i)\chi_i(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим наилучшее приближение для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, формулой $E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Система $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$ также ортонормирована и полна в $L^1[0,1)^2$, что позволяет определить для $f \in L^1[0,1)^2$ коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(i,j) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_i(x)\chi_j(y)}\,dx\,dy, \quad i,j \in \mathbb{Z}_+$$

и частичную сумму Фурье

$$S_{mn}(f)(x,y) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(i,j)\chi_i(x)\chi_j(y), \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Пространство $L^p[0,1)^2$ снабжено нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}.$$

Если $\mathcal{P}_{mn} = \{f \in L^1[0,1)^2 : \hat{f}(i,j) = 0 \,\text{при}\, i \ge m \,\text{или}\, j \ge n\}$, то $E_{mn}(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_{mn}\}$, $m,n \in \mathbb{N}$. Через $C^*[0,1)$, соответственно, через $C^*[0,1)^2$ с нормами $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ или $\|f\|_\infty = \sup\limits_{(x,y)\in[0,1)} |f(x,y)|$ мы обозначим замыкание полиномов по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, соответственно, по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ по норме $\|\cdot\|_\infty$.

Введем $\mathbf{P}$-ичное пространство Харди

$$H(\mathbf{P},[0,1)) = \left\{f \in L[0,1) : M(f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(f)(x)| \in L[0,1)\right\}$$

с нормой $\|f\|_H = \|M(f)\|_1$. В двумерном случае пространство Харди $H(\mathbf{P},[0,1))^2$ определяется аналогично с помощью максимальной функции $M(f)(x,y) = \sup\limits_{k,n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_k,m_n}(f)(x,y)|$ (см. [2]). Величины $E_n(f)_\infty$ и $E_{mn}(f)_\infty$, $E_n(f)_H$ и $E_{mn}(f)_H$, определяются так же, как и выше.

Пусть $\alpha \ge 1$. Будем говорить, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит классу $A(\alpha) = A(\mathbf{P},\alpha)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \gamma_k^\alpha\right)^{1/\alpha} \le C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k =: C m_n^{(1-\alpha)/\alpha}\Gamma_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

При $n = 0$ предполагаем, что аналогичное неравенство верно для $\Gamma_0 = = \gamma_0$. Данное определение введено в работе Л. Гоголадзе и Р. Месхиа [3] при $m_n = 2^n$. Будем считать, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ принадлежит классу $A(\infty)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и $\max\limits_{m_n<k\le m_{n+1}} \gamma_k \le C m_n^{-1}\Gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^\infty$ — положительная двойная последовательность, $\alpha \ge 1$. Рассмотрим множества индексов

$$R_l = \{(i,j) : 0 \le i,j < m_l,\ i,j \in \mathbb{Z}\} \setminus \{(i,j) : 0 \le i,j < m_{l-1},\ i,j \in \mathbb{Z}\},$$

где $l \in \mathbb{N}$, $R_0 = \{(0,0)\}$. Если при всех $l \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i,j\in R_l} \gamma_{ij}^\alpha\right)^{1/\alpha} \le C m_l^{2/\alpha-2} \sum_{i,j\in R_{l-1}} \gamma_{ij} =: C m_l^{2/\alpha-2}\Gamma_{l-1}^{(2)}, \quad l\in\mathbb{N},$$

то $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^\infty$ принадлежит классу $A(\alpha,2) = A(\alpha,2,\mathbf{P})$ (см. [4]). Класс $A(\infty,2) = A(\infty,2,\mathbf{P})$ определяется аналогично.

Теорема 1. 1. *Пусть $f \in H(\mathbf{P},[0,1))$, $0 < r \le 1$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty \in \in A(1/(1-r))$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma_k E_k^r(f)_H$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \gamma_k |\hat{f}(k)|^r$ также сходится.*

2. *Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty$ убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари $\sum\limits_{k=n}^\infty \varepsilon_k/k = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon_m \le C\varepsilon_n$ при $n \in [m,2m]$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma_k\varepsilon_k^r$ расходится. Тогда существует функция $f_0 \in H(\mathbf{P},[0,1))$, такая что $E_n(f_0)_H = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \gamma_k|\hat{f}_0(k)|^r$ расходится.*

Теорема 2. 1. *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $2 < p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$, $0 < r \le 2$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=0}^\infty \in A(2/(2-r))$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty \gamma_k k^{-r/2} E_k^r(f)_p$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \gamma_k|\hat{f}(k)|^r$ также сходится.*

2. *Пусть* $p_i \equiv q$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/k = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\varepsilon_m \le C_1 \varepsilon_n$ *при* $n \in [m, 2m]$, *а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varepsilon_k^r$ *расходится. Тогда существует функция* $f_0 \in C^*[0,1)$, *такая что* $E_n(f_0)_\infty = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k |\hat{f}_0(k)|^r$ *расходится.*

Теорема 3. 1. *Пусть* $f \in H(\mathbf{P}, [0,1)^2)$, $0 < r \le 1$, $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty} \in A(1/(1-r), 2)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^{(2)} E_{m_k,m_k}^r(f)_H$, *то ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}(i,j)|^r$ *также сходится.*

2. *Пусть* $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *а* γ *такова, что* $\Gamma_k^{(2)} = O\left(\sum\limits_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} \sum\limits_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} \gamma_{ij}\right)$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{(2)} \omega_k^r$ *расходится, то существует функция* $f_0 \in H(\mathbf{P}, [0,1)^2)$, *такая что* $E_{m_k,m_k}(f_0)_H = O(\omega_k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и ряд* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}_0(i,j)|^r$ *расходится.*

Теорема 4. 1. *Пусть* $f \in L^p[0,1)^2$, $2 < p < \infty$, *или* $f \in C^*[0,1)^2$, $0 < r \le 2$, $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty} \in A(2/(2-r), 2)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k^{(2)} q^{-rk} E_{q^k,q^k}^r(f)_p$, *то ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}(i,j)|^r$ *также сходится.*

2. *Пусть* $p_i \equiv q$, $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю, удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{-kr} \Gamma_k^{(2)} \omega_k^r$ *расходится, то существует функция* $f_0 \in C^*[0,1)^2$, *такая что* $E_{m_k,m_k}(f_0)_\infty = O(\omega_k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} |\hat{f}_0(i,j)|^r$ *расходится.*

Теоремы 1–4 обобщают в некотором смысле результаты из [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

2. *Weisz F.* Martingale Hardy spaces and their application in Fourier analysis. Berlin : Springer, 1994. 228 p.

3. *Gogoladze L., Meskhia R.* On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst. 2008. Vol. 141. P. 29–40.

4. *Golubov B. I., Volosivets S. S.* Generalized absolute convergence of single and double Fourier series with respect to multiplicative systems // Analysis Mathematica. 2012. Vol. 38, № 2. P. 105–122

5. *Волосивец С. С., Голубов Б. И.* Абсолютная сходимость кратных рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. Vol. 36, № 2. P. 155–172.

УДК 517.518.832

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ СОПРЯЖЕННЫХ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru, anantuleneva@mail.ru

Пусть $1 < p < \infty$, f — 2π-периодическая измеримая ограниченная функция, $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода и $\text{æ}_\xi^p(f) := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$. Положим по определению $\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup\{\text{æ}_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i(x_i - x_{i-1}) \le \delta\}$. Для $1 < p < \infty$ введем пространства V_p, содержащее все f со свойством $\|f\|_{V_p} := \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi)) < \infty$, и $C_p = \{f \in V_p : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0\}$.

Далее L^p, $1 \le p < \infty$, — пространство 2π-периодических измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, а для $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, 2\pi]$, рассмотрим $\omega_k(f, \delta)_p := \sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_p : |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$. Известно, что для $f \in L^1$ существует сопряженная функция

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi} (f(x-t) - f(x+t)) ctg(t/2)\, dt.$$

По теореме М. Рисса (см. [2, гл. VIII, § 14] из $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, следует, что $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$. Для пространства T_n тригонометрических полиномов порядка не выше n введем n-е наилучшее приближение в V_p равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводятся $E_n(f)_p$ и $\omega_k(f, \delta)_{V_p}$. Величины $\omega_k(f, \delta)_X$ и $E_n(f)_X$, где $X = V_p$ или $X = p$, $1 < p < \infty$, связаны прямой и обратной теоремами приближения

$$E_n(f)_X \le C\omega_k(f, \frac{1}{n+1})_X, \quad \omega_k(f, \frac{1}{n+1})_X \le \frac{C}{n^k} \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{k-1} E_i(f)_X,$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$ (см. [3, гл. 5, 6]).

Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю. Тогда $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию Бари (B), если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/(k+1) = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, соответственно, удовлетворяет условию Бари – Стечкина (B_m), $m > 0$, если $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{m-1}\varepsilon_{k-1} = O(n^m \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. [4]). По определению, $f \in E_{C_p}(\varepsilon)$, если $E_n(f)_{V_p} \le \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, класс $E_p(\varepsilon)$ задается аналогично.

Пусть $S_n(f)(x) = a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, являются частными суммами ряда Фурье функции $f \in L^1$. Рассмотрим средние Эйлера $e_n^q(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k}(1+q)^{-n} S_k(f)(x)$, $q \ge 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. *Для* $f \in L^p$ *имеем*

$$\|f - e_n^q(f)\|_p \le C_1 \omega_k(f, \frac{1}{n})_p \le \frac{C_2}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} E_{i-1}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1 является обобщением результата Л. Ремпульской и К. Томчака [5] (для $q = 1$).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

1. *Для* $f \in L^p$ *имеем*

$$\|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_p \le C_1 \omega_k(f, \frac{1}{n})_p \le \frac{C_2}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} E_{i-1}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. *Если* $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ *убывает к нулю удовлетворяет условию* (B), $f \in E_{C_p}(\varepsilon)$, *то*

$$\|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_{V_p} \le \frac{C \ln(n+2)}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \varepsilon_{i-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда верны следующие неравенства*

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \le C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{V_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \le C_2 \omega_k(f, 1/n)_{V_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *убывает к нулю,* $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условию* (B) *и* $f \in E_{C_p}(\varepsilon)$, *то*

$$\|\widetilde{f} - e_n^1(\widetilde{f})\|_\infty \le C_3 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon_j.$$

В теореме 3 используются результаты А. П. Терехина [6]. Далее показывается точность некоторых оценок теорем 1–3. Будем писать $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если существуют $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 A_n \le B_n \le C_2 A_n$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю и удовлетворяет условиям* (B) *и* (B_k) *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{f \in E_p(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_p \asymp \sup_{f \in E_p(\varepsilon)} \|\widetilde{f} - e_n^q(\widetilde{f})\|_p \asymp \varepsilon_n \asymp n^{-k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} \varepsilon_{i-1},$$

$n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *убывает к нулю,* $\varepsilon_k \le C\varepsilon_{k+1}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет также двустороннему условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/(k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_\infty \asymp (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|\widetilde{f} - e_n^1(\widetilde{f})\|_\infty \asymp 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients // J. Math. and Phys. 1924. Vol. 3. P. 72–94.

2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.

4. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.

5. *Rempulska L., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.

6. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

УДК 517.9

ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ НА МНОГООБРАЗИИ И ИНСТАНТОНЫ

Б. О. Волков (Москва, Россия)

borisvolkov1986@gmail.com

Лапласианами Леви называют бесконечномерные лапласианы, определенные по аналогии с оператором Лапласа для функций на

$L_2([0,1],\mathbb{R})$, введенным П. Леви (см. [1]). Одна из основных причин интереса к таким операторам заключается в их связи с калибровочными полями (см. [2-3]). В работе [5] было показано, что при некоторых условиях связность на $\mathbb{R}^4$ является инстантоном (решением уравнения автодуальности) тогда и только тогда, когда параллельный перенос, порожденный связностью, является гармоническим для специального лапласиана Леви. В настоящей работе этот результат обобщается для связности на четырехмерном римановом многообразии. В простом частном случае результаты работы были получены в [6].

Пусть (M,g) — это C^∞-гладкое риманово односвязное четырехмерное многообразие с римановой метрикой g. Пусть $\pi_E\colon E\to M$ — векторное расслоение над M со слоем $\mathbb{C}^N$. Пусть A — связность в этом расслоении, ∇ — порожденная этой связностью ковариантное дифференцирование и F — ассоциированная со связностью A кривизна. Уравнения Янга-Миллса на связность A имеют вид:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu}=0.$$

Уравнения автодуальности на связность A имеют вид:

$$F=*F,$$

где $*$ — оператор Ходжа. Если связность является решением уравнений автодуальности, она является и решением уравнений Янга-Миллса.

Пусть $H^1_m([0,1],M)$ — гильбертово многообразие H^1-кривых на M с началом в точке $m\in M$. Для $p\in M$ пусть символ E_p обозначает слой над p в расслоении E. Пусть $\pi_{\mathcal{E}}\colon\mathcal{E}\to H^1_m([0,1],M)$ — векторное расслоение над $H^1_m([0,1],M)$, слоем которого над $\gamma\in H^1_m([0,1],M)$ является пространство линейных операторов из E_m в $E_{\gamma(1)}$. Параллельный перенос U^A, порожденный связностью A, — это гладкое сечение в расслоении $\mathcal{E}$. Пространство гладких сечений в расслоении $\mathcal{E}$ будем обозначать символом $\Gamma(\mathcal{E})$.

Пусть $Q(\gamma,t)$ — параллельный перенос в касательном расслоении TM вдоль $\gamma\in H^1_m([0,1],M)$, порожденный связностью Леви – Чивиты на M. Пусть $Z\in T_mM$ и $h\in C^1([0,1],\mathbb{R})$, причем $h(0)=0$. Пусть $S\in C^1([0,1],SO(4))$. Элемент из группы $SO(4)$ отождествляется с вращением в T_mM. Для кривой $\gamma\in H^1_m([0,1],M)$ кривая $\gamma^{S,Z,h}_s\in H^1_m([0,1],M)$, где $s\in(-\delta,\delta)$ для достаточно малого $\delta>0$, определяется формулой:

$$\gamma^{S,Z,h}_s(t)=exp_{\gamma(t)}(sh(t)Q(\gamma,t)S(t)Z),$$

где exp_p — экспоненциальное отображение в точке $p\in M$.

Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_d\}$ — фиксированный ортонормированный базис в T_mM. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R})$. Мы считаем, что $e_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $e_n(0) = e_n(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и базис $\{e_n\}$ является слабо равномерно плотным, т. е. для любой функции $h \in L_\infty([0,1],\mathbb{R})$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(t) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k^2(t) - 1 \right) dt = 0.$$

В качестве базиса $\{e_n\}$, удовлетворяющего таким свойствам, можно взять $e_n(t) = \sqrt{2}\sin(\pi n t)$.

Следующее определение обобщает определение лапласиана Леви из работ [4] и [5] (для определений лапласиана Леви на многообразии см. также [3] и [7]).

Определение. Пусть $\operatorname{dom} \Delta_L^{S,\{e_n\}}$ — это пространство всех сечений $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E})$, для которых отображение

$$\gamma \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} \varphi(\gamma_s^{S,Z_i,e_k})$$

является сечением из $\Gamma(\mathcal{E})$. *Лапласиан Леви* $\Delta_L^{S,\{e_n\}}$ — это линейное отображение

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}} : \operatorname{dom} \Delta_L^{S,\{e_n\}} \to \Gamma(\mathcal{E}),$$

определенное формулой:

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}}\varphi(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} \varphi(\gamma_s^{S,Z_i,e_k}),$$

Пусть S_R^3 — нормальная подгруппа Ли группы $SO(4)$, состоящая из матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Теорема. *Пусть $S \in C^1([0,1], S_R^3)$, причем выполняется*

$$\dim \operatorname{span}\{\dot S(t) S^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} = 3.$$

Пусть существует точка $x \in M$, в которой $F(x) = *F(x)$. Тогда связность A является решением уравнений автодуальности на всем M тогда и только тогда, когда параллельный перенос U^A является решением уравнения Лапласа для лапласиана $\Delta_L^{S,\{e_n\}}$:

$$\Delta_L^{S,\{e_n\}} U^A = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М. : Наука, 1967. 512 с.

2. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy – Laplacian // Russ. J. Math. Phys. 1994. Vol. 2., No. 2, pp. 235–250.

3. *Leandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. Vol. 2., № 2, pp. 151–172.

4. *Accardi L., Smolyanov O. G.* Feynman formulas for evolution equations with Lévy Laplacians on infinite-dimensional manifolds // Doklady Mathematics. 2006. Vol. 73, № 2. P. 252–257.

5. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви и инстантоны // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 226–238.

6. *Волков Б. О.* Лапласиан Леви на четырехмерном римановом многообразии // Математика и математическое моделирование. 2016. Вып. 6. С. 1–14.

7. *Волков Б. О.* Лапласианы Леви на бесконечномерном многообразии // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. С. 91–94.

УДК 517.95

ПРИМЕРЫ СУПЕРУСТОЙЧИВЫХ ПОЛУГРУПП В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ву Нгуен Шон Тунг (Москва, Россия)
vnsontung@mail.ru

В банаховом пространстве E на отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0, \qquad u(T) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$. Здесь A — линейный замкнутый оператор в E с плотной областью определения $D(A) \subset E$, порождающий полугруппу $U(t)$ класса C_0. Элементы u_0, u_1 заданы в $D(A)$. Решением задачи (1) назовем пару $(u(t), g)$, где $u \in C^1([0, T]; E)$, $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, T]$, и $g \in E$. Задачу (1) называют *обратной задачей с финальным переопределением* (см. [1]).

Предполагаем сейчас, что полугруппа $U(t)$ является *суперустойчивой* (или *квазинильпотентной*). Это означает, что *экспоненциальный тип* полугруппы, определенный по формуле

$$\omega_0 \equiv \lim_{t \to +\infty} \left(t^{-1} \ln \|U(t)\| \right),$$

равен $-\infty$. В таком случае при любом выборе числа $\alpha > 0$ найдется константа $M = M_\alpha \geqslant 1$, для которой $\|U(t)\| \leqslant M e^{-\alpha t}$ при $t \geqslant 0$. Вырожденный класс суперустойчивых полугрупп вызвал интерес в последние десятилетия (см. [2–5]).

Согласно схеме [6] справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает суперустойчивую полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда при любом выборе элементов u_0, $u_1 \in D(A)$ обратная задача (1) имеет и притом единственное решение $(u(t), g)$. При этом элемент $g \in E$ представим рядом Неймана*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} U(kT) f, \qquad f = A\,(U(T)u_0 - u_1), \tag{2}$$

сходящимся по норме пространства E, а первый компонент решения находится по формуле

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s) g \, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Обсудим типичные примеры суперустойчивых полугрупп, раскрывающие возможности данной теоремы.

Введем весовое банахово пространство $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\, dx\big)$ с монотонно неубывающей функцией $\gamma(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Пусть оператор A задан в E по формуле

$$A = -\frac{d}{dx} - \sigma(x), \tag{4}$$

где $\sigma(x)$ — измеримая, неотрицательная и локально ограниченная при $x \geqslant 0$ функция. Положим

$$D(A) = \{\, f \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \quad Af \in E, \quad f(0) = 0 \,\}. \tag{5}$$

Тогда оператор (4) порождает в $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\, dx\big)$ полугруппу $U(t)$ класса C_0 по правилу

$$U(t)f(x) = \begin{cases} f(x-t) \exp\left(-\int\limits_0^t \sigma(x-s) ds \right), & x > t, \\ 0, & x \leqslant t. \end{cases} \tag{6}$$

Укажем типичные случаи, при которых полугруппа (6) является суперустойчивой.

Случай 1. Пусть $\gamma(x) = ax^p$ при $x \geqslant 0$ с некоторыми константами $a > 0$ и $p > 1$. Тогда при любом выборе измеримой, локально ограниченной функции $\sigma(x) \geqslant 0$ полугруппа (6) является суперустойчивой в пространстве $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\,dx\big)$.

Случай 2. Пусть $\sigma(x) \geqslant bx^q$ при $x \geqslant 0$ с некоторыми константами $b > 0$ и $q > 0$. Тогда при любом выборе монотонно неубывающей функции $\gamma(x) \geqslant 0$ полугруппа (6) является суперустойчивой в пространстве $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\,dx\big)$.

В качестве простой модели для «абстрактной» задачи (1) рассмотрим обратную задачу для уравнения переноса с поглощением на полуоси

$$\begin{cases} u_t + u_x + \sigma(x)u = g(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_1(x). \end{cases} \tag{7}$$

Случаи 1 и 2 дают широкий спектр возможностей для выбора коэффициента $\sigma(x) \geqslant 0$ и базового пространства $E \equiv L^1\big(\mathbb{R}_+,\, e^{-\gamma(x)}\,dx\big)$, при которых гарантирована корректность задачи (7).

Например, пусть $\gamma(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$. Определим в пространстве $E = L^1(\mathbb{R}_+)$ область $D(A)$, построенную для оператора (4) по правилу (5). Тогда, по теореме 1 и согласно отмеченному выше случаю 2, обратная задача (7) при любом выборе функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ из $D(A)$ имеет и притом единственное решение $(u(x,t), g(x))$, согласованное с выбором пространства $L^1(\mathbb{R}_+)$. Для нахождения решения используются аналоги формул (2), (3). Подобный подход можно распространить на многомерное уравнение переноса в неограниченной области без интеграла столкновений.

Автор благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.Y.; Basel : Marcel Dekker, 2000. 723 p.

2. *Balakrishnan A. V.* On superstability of semigroups // In: M. P. Polis et al (eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. Chapman and Hall. 1999. P. 12–19.

3. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164, iss. 2. P. 321–326.

4. *Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu.* Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Appl. Math. Letters. 2011. Vol. 24. P. 1698–1701.

5. *Creutz D., Mazo M., Preda C.* Superstability and finite time extinction for C_0-Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted 2013. P. 1–12.

6. *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Метод решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 51–58.

УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СУММ ФУРЬЕ – МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)
ramis3004@gmail.com

Пусть $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, где $\delta = \frac{1}{N}$, $N > 0$. В настоящей работе для произвольной функции, заданной на множестве Ω_δ построены ряды Фурье по полиномам Мейкснера и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В частности, получена оценка сверху для функции Лебега частичных сумм ряда Фурье по полиномам Мейкснера $M_{n,N}^\alpha(x)$.

Отметим некоторые сведения о полиномах Мейкснера.

Для $q \neq 0$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ классические полиномы Мейкснера [1–3] можно определить с помощью равенства

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $x^{[k]} = x(x-1)\ldots(x-k+1)$, $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$. Хорошо известно [1–3], что при $\alpha > -1$ и $0 < q < 1$ полиномы Мейкснера $M_n^\alpha(x)$ образуют ортогональную систему на сетке $\{0, 1, \ldots\}$ с весом $\rho(x) = \rho(x, \alpha, q) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}(1-q)^{\alpha+1}$, а более точно имеет место следующее равенство

$$\sum_{x=0}^{\infty} m_n^\alpha(x) m_k^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{nk}, \quad 0 < q < 1, \alpha > -1,$$

где $m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x, q) = \{h_n^\alpha(q)\}^{-1/2} M_n^\alpha(x)$, $h_n^\alpha(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1)$.

Пусть $N > 0$, $\delta = 1/N$, $q = e^{-\delta}$. Многочлены $M_{n,N}^\alpha(x) = M_n^\alpha(Nx, e^{-\delta})$ и $m_{n,N}^\alpha(x) = m_n^\alpha(Nx, e^{-\delta}) = \left\{h_n^\alpha(e^{-\delta})\right\}^{-1/2} M_{n,N}^\alpha(x)$ в случае $\alpha > -1$ образуют ортогональную и ортонормированную на Ω_δ системы с весом $\rho_N(x) = \rho(Nx; \alpha, e^{-\delta})$.

В дальнейшем, при оценке функции Лебега, важную роль играет следующая формула Кристоффеля – Дарбу

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,x)=\sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^{\alpha}(t)m_{k,N}^{\alpha}(x).$$

Неравенство Лебега для частичных сумм Фурье – Мейкснера

Обозначим через $C(\Omega_\delta)$ пространство дискретных функций $f(x)$ вида $f:\Omega_\delta\to\mathbb{R}$ и таких, что

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)|e^{-x/2}=0. \tag{1}$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|f\|_{C(\Omega_\delta)}=\sup_{x\in\Omega_\delta} e^{-x/2}|f(x)|. \tag{2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha>-1$, $1<p<2$, $\rho_N(x)=e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}$, $l^p_{\rho_N}$ *— пространство функций, заданных на* Ω_δ *и таких, что*

$$\|f\|_{l^p_{\rho_N}}=\left(\sum_{x\in\Omega_\delta}|f(x)|^p\rho_N(x)\right)^{1/p}<\infty.$$

Тогда $C(\Omega_\delta)\subset l^p_{\rho_N}$.

Далее пусть $f\in l^p_{\rho_N}$. Тогда для f мы можем определить коэффициенты Фурье – Мейкснера

$$f_k^\alpha=\sum_{t\in\Omega_\delta} f(t)m_{k,N}^{\alpha}(t)\rho_N(t)$$

и ряд Фурье – Мейкснера

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_{k,N}^{\alpha}(x). \tag{3}$$

Через $S_{n,N}^{\alpha}(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (3):

$$S_{n,N}^{\alpha}(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha m_{k,N}^{\alpha}(x). \tag{4}$$

Будем рассматривать $S^{\alpha}_{n,N}(f,x)$ как аппарат приближения функций, принадлежащих $l^p_{\rho_N}$. Поскольку $C(\Omega_\delta) \subset l^p_{\rho_N}$ при $1 < p < 2$, поэтому для функции $f \in C(\Omega_\delta)$ мы можем определить ряд Фурье – Мейкснера (3) и частичную сумму (4). Через $p_n(f,x)$ обозначим алгебраический полином степени n наилучшего приближения к функции f в метрике (2):

$$E_n(f) = \|f - p_n\|_{C(\Omega_\delta)}.$$

Тогда

$$\left|f(x) - S^{\alpha}_{n,N}(f,x)\right| = \left|f(x) - p_n(f,x) + p_n(f,x) - S^{\alpha}_{n,N}(f,x)\right| \le$$
$$\le |f(x) - p_n(f,x)| + \left|S^{\alpha}_{n,N}(p_n - f, x)\right|.$$

Отсюда

$$e^{-\frac{x}{2}}\left|f(x) - S^{\alpha}_{n,N}(f,x)\right| \le e^{-\frac{x}{2}}|f(x) - p_n(f,x)| + e^{-\frac{x}{2}}\left|S^{\alpha}_{n,N}(p_n - f,x)\right| \le$$
$$\le E_n(f)(1 + \lambda^{\alpha}_{n,N}(x)), \tag{5}$$

где

$$\lambda^{\alpha}_{n,N}(x) = \sum_{t\in\Omega_\delta} e^{-\frac{t+x}{2}} \frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\left|\mathcal{K}^{\alpha}_{n,N}(t,x)\right|.$$

В связи с неравенством (5) возникает задача об оценке функции Лебега $\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)$ на $[0,\infty)$ при $n \le \lambda N$, $\lambda > 0$. В настоящей работе мы ограничимся исследованием величины $\lambda^{\alpha}_{n,N}(x)$ на множествах $G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$ и $G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$, $\lambda > 0$, $1 \le n \le \lambda N$. *Тогда имеют место следующие оценки:*

1) если $x \in G_1 = [0, \frac{3}{\theta_n}]$, *то*

$$\lambda^{\alpha}_{n,N}(x) \le c(\alpha,\lambda)\begin{cases} 1, & -1 < \alpha < -\frac{1}{2}, \\ \ln(n+1), & \alpha = -\frac{1}{2}, \\ n^{\alpha+\frac{1}{2}}, & \alpha > -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

2) если $x \in G_2 = [\frac{3}{\theta_n}, \frac{\theta_n}{2}]$, *то*

$$\lambda^{\alpha}_{n,N}(x) \le c(\alpha,\lambda)\begin{cases} \ln(nx+1), & -1 < \alpha \le -\frac{1}{2}, \\ \ln(n+1) + \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 297 с.

2. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные многочлены дискретной переменной. М. : Наука, 1985. 216 с.

3. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 255 с.

УДК 517.518.3

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий
(Москва, Россия)
vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Орторекурсивные разложения [1, 2] являются естественным обобщением классических ортогональных разложений. При этом в случае определенных классов переполненных систем орторекурсивные разложения обеспечивают абсолютную устойчивость как к ошибкам в вычислении коэффициентов, так и к малым изменениям системы [3].

Напомним определение орторекурсивных разложений. Пусть H — пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ (для определенности будем рассматривать пространства над $\mathbb{R}$), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ — произвольная система ненулевых элементов, $f \in H$ — раскладываемый элемент. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f;$$

$$\widehat{f}_{n+1} = \frac{(r_n, e_{n+1})}{\|e_{n+1}\|^2}, \qquad r_{n+1} = r_n - \widehat{f}_{n+1} e_{n+1}.$$

Орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$.

Легко видеть, что если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с классическим рядом Фурье. Даже при нарушении ортогональности системы для орторекурсивных разложений выполняются классические свойства ортогональных разложений,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

такие как равенство Бесселя

$$\|r_N\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2,$$

неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

и эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу равенству Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \|e_n\|^2 = \|f\|^2$$

(см., например, [2]).

Для случая $H = L^2[0,1]$ было показано, что орторекурсивные разложения по системе характеристических функций двоичных промежутков и по обобщениям этой системы [2, 4], а также по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям [5–7], гарантированно сходятся к разлагаемому элементу в метрике L^2 (более того, сходимость сохраняется, если коэффициенты вычисляются с некоторой погрешностью). В случае систем характеристических функций и их обобщений параллельно с результатами о сходимости в метрике L^2 были получены и результаты о сходимости почти всюду. Для систем сжатий и сдвигов утверждения о сходимости почти всюду удалось получить лишь сравнительно недавно [8].

Оказывается, оба эти результата о сходимости почти всюду являются (по модулю ограничений на разлагаемую функцию) частными случаями более общей теоремы, применимой к широкому классу функциональных систем специального вида. Речь идет о системах, носители функций которых являются подмножествами соответствующих двоичных отрезков.

Чтобы сформулировать теорему, приведем сначала необходимые определения. Для натурального n через $k(n)$ и $j(n)$ обозначим такие целые неотрицательные числа, что $n = 2^{k(n)} + j(n)$ и $j(n) < 2^{k(n)}$ (легко видеть, что по n значения $k(n)$ и $j(n)$ определяются однозначно). Через Δ_n обозначим двоичный отрезок $\left[\frac{j(n)}{2^{k(n)}}, \frac{j(n)+1}{2^{k(n)}}\right]$. Значение $k(n)$ часто называют номером пачки двоичного отрезка Δ_n.

Рассмотрим систему функций $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих при всех $n \in \mathbb{N}$ следующим ограничениям:

(1) $\operatorname{supp} e_n(x) \subset \Delta_n$ (через supp здесь обозначен носитель);

(2) $\|e_n\|_2 = 1$;

(3) $e_n(x) \geqslant 0$ на Δ_n;

(4) e_n удовлетворяет на Δ_n условию Липшица с константой C_n.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L^2[0,1]$ и непрерывна почти всюду на этом отрезке, а константы C_n удовлетворяют условию*

$$C_n = O\left(n^{3/2}\right).$$

Тогда орторекурсивное разложение $f(x)$ по системе $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на отрезке $[0,1]$.

В естественных терминах номеров пачек двоичных отрезков условие на C_n в приведенной теореме может быть переформулировано следующим образом:

$$C_n = O\left(2^{3k(n)/2}\right).$$

В терминах длин отрезков условие принимает вид

$$C_n = O\left(|\Delta_n|^{-3/2}\right).$$

Условие Липшица может быть ослаблено до условия Гёльдера с произвольным (но единым для всех функций системы) положительным показателем α. В этом случае условие на C_n запишется в виде

$$C_n = O\left(n^{\alpha+1/2}\right).$$

Возможны и другие обобщения, связанные с ослаблением требований как на систему $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, так и на разлагаемую функцию $f(x)$.

Также с двоичных отрезков теорема может быть перенесена на другие системы отрезков, покрывающие $[0,1]$ в смысле Витали и удовлетворяющие дополнительному ограничению на неперекрывание (если пара отрезков перекрывается, то отрезок с меньшим номером содержит отрезок с большим номером — см., в частности, Теорему 3 работы [2], а также условие (Ξ2) работы [4]). Однако при этом условие на константы C_n (которое в этом случае наиболее естественно формулируется в терминах длин отрезков системы) при сохранении общности результата становится несколько громоздким.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Саратовской зимней шк. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.

2. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.

3. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 1. С. 3–16.

4. *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 7. С. 21–36.

5. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез. докл. Воронежской зимней матем. шк. Воронеж : ВГУ, 2001. С. 161–162.

6. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 11-й Саратовской зимней шк. Саратов : Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. С. 106–108.

7. *Политов В. А.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 3. С. 3–7.

8. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов // Теория функций, её приложения и смежные вопросы : материалы 13-й международной Казанской летней научной шк.-конф. Казань : Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2017. С. 99–101.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ

А. А. Голубков (Москва, Россия)
andrej2501@yandex.ru

Обратная задача для уравнения Штурма – Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

хорошо изучена только для случая вещественной переменной [1–2]. В докладе впервые поставлена обратная спектральная задача для уравнения (1) с потенциалом Q, кусочно-целым на лежащей в $\mathbf{C}$ спрямляемой кривой, и доказана единственность её решения. Показано, что хотя эта задача и может быть сведена к частично исследованной в [3] обратной задаче для уравнения Штурма – Лиувилля обобщенного вида с комплекснозначными коэффициентами на отрезке действительной оси, её непосредственное исследование более эффективно.

Определение. Функцию Q будем называть *кусочно-целой* на кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, соединяющей точки z_0, z_f и допускающей параметрическое задание непрерывной функцией $z = z(t)$ $(t \in [t_0, t_f], z(t_0) = z_0, z(t_f) = z_f)$, если Q ограничена на этой кривой и совпадает на ней с конечным числом целых функций. Т.е. существуют такие целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$, что

$$Q(z(t)) = Q_i(z), \text{ если } t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (i = \overline{0, N}), \tag{2}$$

где все Q_i — целые функции. Причём, если $N \geq 1$, то для любого $n \in \in \{1, \ldots, N\}$ функции Q_n и Q_{n-1} различны.

В докладе рассматриваются решения (1) вдоль спрямляемых кривых $\gamma \subset \mathbf{C}$, на которых функция Q является кусочно-целой. При этом под решениями (1) вдоль γ понимаются решения, непрерывно дифференцируемые вдоль γ. В силу (2) функция Q и все её производные вдоль кривой γ имеют конечные односторонние пределы в точках $z_j := z(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$. Если $N \geq 1$, то по определению для всех $n \in \{1, \ldots, N\}$ функции Q_n и Q_{n-1} различны. Поэтому односторонние пределы функции Q или хотя бы одной её производной конечного порядка вдоль кривой γ различны при подходе к z_n «слева» и «справа». Будем называть такие точки *точками обобщенного скачка* функции Q на кривой γ.

Определение. Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — непрерывно-дифференцируемые решения (1) вдоль спрямляемой кривой γ, проходящей через точку z_b, удовлетворяющие условиям $u_1(z_b) = 1$, $u_1'(z_b) = 0$, $u_2(z_b) = 0$, $u_2'(z_b) = 1$. Будем называть матрицу $\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}$ *передаточной матрицей уравнения (1) между точками z_b и z кривой γ.*

Определение. Назовём $W := \{N, \{z_j\}_0^{N+1}, \{Q_i\}_0^N\}$ набором ключевых данных кривой γ, на которой (2) задаёт функцию Q.

Лемма. *Если функция Q является кусочно-целой на спрямляемой кривой γ, соединяющей точки z_0 и z_f, то передаточная матрица $\hat{P}(\gamma, z_f, z_0)$ уравнения* (1) *существует и однозначно определяется заданием λ и набора ключевых данных W.*

Следствие. *Пусть функция Q задана на спрямляемой кривой γ с помощью* (2), *$z^{(d)} \in \gamma_i$ (γ_i — участок γ, соединяющий точки z_i и z_{i+1}, $i \in \{0, \ldots, N\}$), $\gamma^{(d)}$ — спрямляемая кривая с началом и концом в $z^{(d)}$ и $Q(z) = F(z)$, если $z \in \gamma^{(d)} \backslash z^{(d)}$. Здесь $F(z)$ — целая функция, причем $F \neq Q_i$, а также $F \neq Q_{i-1}$, если $z^{(d)} = z_i$, $i \neq 0$, и $F \neq Q_{i+1}$, если $z^{(d)} = z_{i+1}$, $i \neq N$. Тогда вставка в γ участка $\gamma^{(d)}$ не меняет передаточную матрицу, положения конечной и начальной точек кривой и увеличивает число точек обобщенного скачка функции Q на кривой. Участок $\gamma^{(d)}$ описанного типа будем назвать «невидимой петлей».*

Определение. Спрямляемая кривая (с заданной на ней кусочно-целой функцией) без «невидимых петель» называется *простой.*

Определение. Набор ключевых данных W называется *простым*, если $\Delta z_i := z_{i+1} - z_i \neq 0$ для всех $n \in \{1, \dots, N\}$.

Любая спрямляемая кривая с простым набором ключевых данных, будет простой и наоборот.

Итак, при заданной точке z_0 передаточная матрица уравнения (1) с кусочно-целым потенциалом может соответствовать бесконечно большому числу различных спрямляемых кривых, отличающихся количеством и расположением «невидимых петель», и, следовательно, наборами ключевых данных. Из кривой с «невидимыми петлями» всегда можно выделить кривую без таких петель с той же передаточной матрицей. Поэтому, если передаточной матрице соответствует хотя бы одна кривая, то ей соответствует и хотя бы один простой набор ключевых данных. Оказывается, что этот простой набор данных является единственным.

Теорема. *Пусть функция Q — кусочно-целая на некоторой (не заданной) спрямляемой кривой γ. Тогда задание точки z_0 и столбца или строки передаточной матрицы уравнения* (1) *между z_0 и не заданной конечной точкой кривой γ на имеющем хотя бы одну конечную предельную точку множестве точек комплексной плоскости параметра $\rho = \lambda^2$ однозначно определяет набор ключевых данных W простой кривой, выделенной из γ.*

Доказательство теоремы основано на свойствах полученной в докладе асимптотики передаточной матрицы, элементы которой при больших значениях $|\lambda|$ могут быть записаны в виде:

$$p_{\alpha\beta} = \left(\sum_{j=1}^{2^N} d_{\alpha 1}^{(j)} \exp\{\lambda h_{j+}\} \right) a_{1\beta}^{(0)} + \left(\sum_{j=1}^{2^N} d_{\alpha 2}^{(j)} \exp\{\lambda h_{j-}\} \right) a_{2\beta}^{(0)}. \qquad (3)$$

Здесь $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, $h_{j\pm} = \pm\Delta z_0 + \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \Delta z_i$, $\alpha_i \in \{\pm 1\} (i = \overline{1, N})$, $j = 1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(1+\alpha_i)}{2} 2^{i-1}$ (т.е. $j \in \{1, \dots, 2^N\}$), $d_{\alpha\beta}^{(j)} = (1/\lambda)^{m_{\alpha\beta}^{(j)}} \delta_{\alpha\beta}^{(j)} (1 + O(1)/\lambda)$ $(j = \overline{1, 2^N})$, где конечные целые $m_{\alpha\beta}^{(j)} \geq 0$ и комплексные $\delta_{\alpha\beta}^{(j)} \neq 0$ не зависят от λ, а $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ при больших значениях $|\lambda|$ отличны от нуля и представимы в виде асимптотического ряда по $1/\lambda$, коэффициенты которого зависят от значений функции Q и её производных в точке z_0. При этом в случае простых кривых существует как минимум два противоположно направленных луча, исходящих из нуля комплексной плоскости параметра λ, и два узких сектора, содержащих эти лучи, таких, что для каждого такого сектора и каждого элемента передаточной матрицы среди 2^{N+1}

слагаемых в (3) существует ровно одно, имеющее наибольший экспоненциальный рост при $\lambda \to \infty$ в этом секторе.

В докладе подробно рассмотрена взаимная связь исследованной задачи с обратной задачей для простейшего обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с кусочно-целыми коэффициентами на отрезке действительной оси: $(r^{-1}(x)u'(x))' + (\widetilde{Q}(x) - r(x)\lambda^2)u(x) = 0$, где $r(x)$ — отличная от нуля и ограниченная кусочно-постоянная функция, а $\widetilde{Q}$ — произвольная кусочно-целая функция. На этом примере показаны возникающие при переходе к комплексной переменной дополнительные возможности по сравнению с существующими методами исследования обратных задач для обобщенных уравнений Штурма – Лиувилля на отрезке действительной оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 331 с.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

3. *Голубков А. А., Макаров В. А.* Обратная спектральная задача для обобщенного уравнения Штурма – Лиувилля с комплекснозначными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1498–1502.

УДК 517.9

РАСХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФРАКТАЛЬНОСТЬ ИХ ГРАФИКОВ[1]

М. Л. Гриднев (Екатеринбург, Россия)

coraxcoraxg@gmail.com

В работе [1] были введены классы непрерывных функций с ограничением на фрактальность их графиков и исследовалась задача о взаимосвязи этих классов с классами функций обобщенной ограниченной вариации. В докладе планируется обсудить результаты работы [1] и полученные результаты о поведении рядов Фурье функций из введенных классов[2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриднев М. Л.* О классах функций с ограничением на фрактальность их графика // Modern Problems in Mathematics and its Applications : Proc. 48th Intern. Youth School-Conf. Yekaterinburg, Russia, February 5-11, 2017. P. 167–173. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr5.pdf.

2. *Gridnev M. L.* Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs // Ural Math. J. Vol. 3, № 2. P. 46–50.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

УДК 517.958:[537.84:537.86]

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ[1]

Л. А. Грюнвальд, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)

lfb_o@yahoo.co.uk, orlov_sergey@inbox.ru

Пусть $\Delta_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — лапласиан по трем пространственным переменным, заданным на кубе $\Pi = [0;\, h]^3$, где $h > 0$, и $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция Эйлера параметра $\mu > 0$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta_3 v - \vartheta^2 v + \frac{\omega^2}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\mu-1} v_{zz}(\mathbf{r},\tau)\,d\tau = f(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{r}\in\Pi, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$v(\mathbf{r},t)\big|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0, \quad (2)$$

которая при $\mu = 2$ моделирует электронные (ионные) магнитозвуковые колебания [1, с. 40], описываемые потенциалом $v : \Pi \times \big[0;\, +\infty\big) \to \mathbb{R}$ электрического поля. В этом случае $\vartheta^2 = \frac{1}{\alpha^2 r_D^2}$, $f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\alpha^2}\mathrm{div}\mathbf{F_0}(\mathbf{r},t)$, причем вектор $\mathbf{F_0}$ задает распределение поляризации и намагниченности среды, а скалярные параметры — базовые характеристики электронно-ионной плазмы, а именно: $\alpha^2 = 1 + \frac{u_A^2}{c^2}$, где u_A — альфвеновская скорость, c — скорость света, r_D — радиус П. Дебая, ω — частота И. Ленгмюра.

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса существования и единственности решения краевой задачи (1), (2). Применяется редукция к уравнению в абстрактных пространствах. Рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$Bu(t) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int\limits_0^t (t-s)^{\mu-1} Au(s)\,ds = f(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $u = u(t)$ и $f = f(t)$ — неизвестная и заданная функции аргумента $t \geq 0$ со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, B и A — замкнутые линейные операторы с плотными в E_1 областями определения и $D(B) \subseteq D(A)$. Предполагается, что B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$. При $0 < \mu < 1$ уравнение (3) имеет слабую особенность. За скалярными уравнениями

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00291).

с таким ядром в научной литературе (см., например, [2]) закрепилось название *обобщенных интегральных уравнений Абеля.*

Определение 1. Под *классическим решением уравнения* (3) будем понимать функцию $u(t) \in \mathcal{C}(t \geq 0;\ E_1)$, обращающую данное уравнение в тождество.

Проблема разрешимости интегрального уравнения (3) с необратимым оператором B в главной части изучена авторами в [3], откуда может быть извлечена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — замкнутый, а B — непрерывно обратимый операторы такие, что $D(B) \subseteq D(A)$, и $f(t) \in \mathcal{C}(t \geq 0; E_2)$, тогда уравнение* (3) *имеет единственное классическое решение*

$$u(t) = B^{-1}\left(f(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} E_\mu\big((t-s)^\mu AB^{-1}\big) f(s)ds\right),$$

где $E_\mu(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k\mu+1)}$ — функция Г. М. Миттаг-Лефплера.

По теореме о замкнутом графике $AB^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$. Нетрудно убедиться, что операторно функциональный ряд $\dfrac{\partial E_\mu(t^\alpha AB^{-1})}{\partial t}$ сходится равномерно в топологии $\mathcal{L}(E_2)$ на любом отрезке $\big[0;\ T\big]$, $T > 0$.

При выборе пространств

$$E_1 = \overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Pi) = \big\{w \in W_2^{l+2}(\Pi) :\ w(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0\big\}, \quad E_2 = H^{\,l}(\Pi),$$

где $W_2^{l+2}(\Pi)$ — пространтсво С. Л. Соболева, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (причем $H^{\,0}(\Pi)$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_2(\Pi)$ функций с суммируемым по А. Лебегу на Π квадратом), и задании операторов $B = \Delta_3 - \vartheta^2$, $A = -\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, уравнение (3) становится задачей (1), (2). Рассмотрим далее однородную граничную задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \lambda w = 0,\ w(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in\partial\Pi} = 0.$$

Спектр $\sigma(\Delta_3)$ состоит из $\lambda_{k,\,m,\,n} = -\frac{\pi^2}{h^2}(k^2+m^2+n^2)$, $k,\ m,\ n \in \mathbb{N}$, т. е. за необходимостью $\lambda_{k,\,m,\,n} = -\frac{\pi^2}{h^2}s$, $s \in \mathbb{N}$, при этом кратность $d(\lambda_{k,\,m,\,n})$ собственного числа $\lambda_{k,\,m,\,n}$ совпадает с количеством различных решений $(k, m, n) \in \mathbb{N}^3$ уравнения $k^2 + m^2 + n^2 = s$ при данном $s \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание классическую теоретико-числовую теорему о представлении натурального числа в виде суммы квадратов целых чисел [4, с. 344], можно получить точную формулу

$$d(\lambda_{k,\,m,\,n}) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k^2<s}}\biggl(\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\\ s-k^2|d}}\chi_4(d) - \sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_{s-k^2\,i^2}\biggr),$$

в которой $\chi_4(d)$ — характер Дирихле по модулю 4 натурального числа d, δ_{ij} — символ Кронекера. Система собственных функций оператора Δ_3, ортонормированная в смысле скалярного произведения $(\cdot,\,\cdot)$ в $H^l(\Pi)$, имеет следующий вид:

$$w_{k,\,m,\,n}(\mathbf{r}) = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{2}{h\nu_{k,\,m,\,n}}}\,\sin\frac{\pi k}{h}x\,\sin\frac{\pi m}{h}y\,\sin\frac{\pi n}{h}z,$$

где $\nu_{k,\,m,\,n} = \sum\limits_{0\le|\alpha|\le l}\left(\frac{\pi}{h}\right)^{2|\alpha|}k^{2\alpha_1}m^{2\alpha_2}n^{2\alpha_3}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $k,\,m,\,n\in\mathbb{N}$. Заметим, что $\vartheta^2\notin\sigma(\Delta_3)$ ни при каком значении $\vartheta\in\mathbb{R}$, значит, оператор $B = \Delta_3-\vartheta^2$ непрерывно обратим, также он является самосопряженным и, следовательно, фредгольмовым с $\dim N(B) = 0$. Из приведенной выше теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f(\mathbf{r},t)\in\mathcal{C}(t\ge 0; H^l(\Pi))$, *тогда граничная задача* (1), (2) *имеет в классе* $\mathcal{C}(t\ge 0; \overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Pi))$ *единственное решение*

$$v(\mathbf{r},t) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\vartheta^2-\lambda_{k,\,m,\,n}}\biggl[(f,\,w_{k,\,m,\,n})+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{\partial}{\partial t}E_\mu\bigl(-\frac{\pi^2n^2\omega^2(t-\tau)^\mu}{h^2(\vartheta^2-\lambda_{k,\,m,\,n})}\bigr)(f,\,w_{k,\,m,\,n})d\tau\biggr]w_{k,\,m,\,n}(\mathbf{r}).$$

Справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}E_2\bigl(-\frac{\pi^2n^2\omega^2}{h^2(\vartheta^2-\lambda_{k,\,m,\,n})}t^2\bigr) = -\frac{\pi n\omega}{h\sqrt{\vartheta^2-\lambda_{k,\,m,\,n}}}\sin\frac{\pi n\omega t}{h\sqrt{\vartheta^2-\lambda_{k,\,m,\,n}}},$$

которое согласуется со случаем $\mu = 2$, рассмотренным ранее в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007. 736 с.

2. *Gorenflo R., Vessella S.* Abel Integral Equations. Analysis and Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. 217 p.

3. *Грюнвальд Л. А., Орлов С. С.* Уравнение типа Абеля с вырождением в банаховых пространствах // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2016 : материалы междунар. конф. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2016. С. 239–241.

4. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М. : Мир, 1987. 416 с.

5. *Орлов С. С.* Краевая задача для интегро-дифференциального уравнения магнитозвуковых волн // Тр. Десятой Всерос. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Т. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара : СамГТУ, 2016. С. 65–69.

УДК 517.9

АЛГОРИТМ ТИПА АЛГОРИТМА ФРАНКА – ВУЛЬФА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ РЕГРЕССИИ[1]

А. А. Гудков, А. Р. Файзлиев, С. В. Миронов, С. П. Сидоров (Саратов, Россия)
alex-good96@mail.ru

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, и обозначим Δ^k оператор взятия конечной разности порядка k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, определенный через рекуррентные соотношения

$$\Delta^k z_i = \Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i, \quad \Delta^0 z_i = z_i, \quad 1 \le i \le n-k.$$

Вектор $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ называется k-монотонным, если $\Delta^k z_i \ge 0$ для всех $1 \le i \le n-k$. Так, вектор $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ будет 1-монотонным (или просто монотонным), если $z_{i+1} - z_i \ge 0$, $i = 1, \dots, n-1$, и 2-монотонные вектора являются выпуклыми.

Обозначим Δ_k^n множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$, которые являются k-монотонными. Задача построения k-монотонной регрессии состоит в нахождении вектора $z \in \mathbb{R}^n$ с наименьшей ошибкой приближения к заданному вектору $y \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно являющимся k-монотонным), при условии k-монотонности вектора z:

$$(z-y)^T(z-y) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \to \min_{z \in \Delta_k^n}. \tag{1}$$

Обзор результатов по задаче построения монотонной регрессии можно найти в книге Т. Робертсона, Ф. Райта и Р. Декстры [1], а также в статье [2]. В статье предлагается метод для нахождения решения задачи построения k-монотонной регрессии. Следуя работам [3] и [4], мы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-37-00060).

рассмотрим алгоритм, который основан на методе Франка – Вульфа. Мы показываем, что алгоритм должен выполнить $O(n^{2k})$ итераций для того, чтобы найти решение с точностью $O(n^{-1/2})$.

Перейдем от точек z_i к скачкам $x_i = \Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i$, $i = 1, \dots, n-k$. В работе [5] показано, что $z \in \Delta_n^k$ тогда и только тогда, когда существует $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ такой, что z_i, $1 \le i \le n-k$, может быть записан в виде

$$z_i = \sum_{j_1=1}^{i} \sum_{j_2=1}^{j_1} \dots \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} x_{j_k}, \tag{2}$$

где $x_j \ge 0$ для всех $k+1 \le j \le n$. Тогда задача (1) может быть записана в виде

$$E(x) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_1=1}^{i} \sum_{j_2=1}^{j_1} \dots \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} x_{j_k} - y_i \right)^2 \to \min_{x \in S}, \tag{3}$$

где S означает множество всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n-k}$ и

$$\sum_{j=k+1}^{n} x_j \le \max \Delta^{k-1} y_i - \min \Delta^{k-1} y_i.$$

Обозначим $\nabla E(x) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial x_n} \right)^T$ градиент функции E в точке x. Как показано в статье [5], если $z \in \Delta_k^n$, то найдется вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x_j \ge 0$ для $j = k+1, \dots, n$, такой, что $z_i = \sum\limits_{j=1}^{i} c_{ik}(j) x_j$, $1 \le i \le n$, где $c_{ik}(j)$ определены следующим образом

$$c_{ik}(j) := \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{если } \ 1 \le i \le k-1, \\ \binom{k-1}{j-1}, & \text{если } \ k \le i \le n \ \text{ и } \ 1 \le j \le k-1, \\ \binom{i+k-j-1}{k-1}, & \text{если } \ k \le i \le n \ \text{ и } \ k \le j \le i. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\partial E}{\partial x_s} = 2 \sum_{i=s}^{n} c_{ik}(s) \left(\sum_{j=1}^{i} c_{ik}(j) x_j - y_i \right). \tag{4}$$

Возможно, метод Франка – Вульфа [6], который также известен как метод условного градиента [7], является одним из наиболее известных алгоритмов для нахождения оптимальных решений задач условной выпуклой оптимизации. Мы предлагаем следующий алгоритм типа алгоритма

Франка – Вульфа (алгоритм 1) для нахождения приближенного решения задачи (3). Скорость сходимости алгоритма 1 находится в теореме 1.

Обозначим $\mathrm{reg}_m(\xi)$ полиномиальную регрессию порядка m для $\xi = (\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_2})$ в точках $s_1, \ldots, s_2$, и we будем писать

$$z = \mathrm{reg}_m(\xi), \qquad (5)$$

где $z = (z_{s_1}, \ldots, z_{s_2})$ есть значения, предсказанные этой регрессией в тех же точках $s_1, \ldots, s_2$.

Algorithm 1: Алгоритм типа алгоритма Франка – Вульфа

· Пусть N есть число итераций и пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ есть входной вектор;

begin

  · Найти $z^0 = \mathrm{reg}_{k-1}(y)$ и пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^T$ есть начальная точка, найденная с использованием (2) из z^0;

  · Пусть $t = 0$;

  · **while** $t < N$ **do**

    · Вычислить градиент $\nabla E(x^t)$ в текущей точке x^t, используя (4);

    · Пусть $\widetilde{x}^t$ есть решение задачи $\langle \nabla E(x^t)^T, x\rangle \to \min\limits_{x \in S}$;

    · Найти $x^{t+1} = x^t + \alpha_t(\widetilde{x}^t - x^t)$, $\alpha_t = \frac{2}{t+2}$, $t := t+1$;

  · Восстановить k-монотонную последовательность $z = (z_1, \ldots, z_n)$ из x^N;

end

Теорема. *Пусть* $\{x^t\}$ *найдены в соответствии с алгоритмом 1. Найдется положительное число* $c(k, y)$*, не зависящее от* n*, такое, что для всех* $t \geq 2$

$$E(x^t) - E^* \leq \frac{c(k, y) n^{2k - \frac{1}{2}}}{t + 2}, \qquad (6)$$

где E^* *есть оптимальное решение* (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robertson T., Wright F., Dykstra R.* Order Restricted Statistical Inference. N.Y. : John Wiley & Sons, 1988. 544 p.

2. *De Leeuw J., Hornik K., Mair P.* Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods // Journal of Statistical Software. 2009. Vol. 32, № 5. P. 1–24.

3. *Gudkov A. A., Mironov S. V., Faizliev A. R.* Greedy algorithm for sparse monotone regression // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 2018. P. 23–31.

4. *Гудков А. А., Миронов С. В., Файзлиев А. Р.* О сходимости жадного алгоритма для решения задачи построения монотонной регрессии // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 17, вып. 4. 2017. С. 431–440.

5. *Toader G.* The representation of n-convex sequences // L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation. 1981. Vol. 10, № 1. P. 113–118.

6. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1-–2. P. 95–110.

7. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787-–823.

УДК 517.5

NIKOLSKII CONSTANTS FOR SPHERICAL POLYNOMIALS[1]

F. Dai (Edmonton, Canada), D. Gorbachev (Tula, Russia), S. Tikhonov (Barcelona, Spain)

fdai@ualberta.ca, dvgmail@mail.ru, stikhonov@crm.cat

We study the asymptotic behavior of sharp Nikolskii constant

$$C(n,d,p,q) := \sup_{f\in\Pi_n^d,\ \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}=1} \|f\|_{L^q(\mathbb{S}^d)}$$

for $0 < p < q \le \infty$ as $n \to \infty$, where Π_n^d denotes the space of all spherical polynomials f of degree at most n on the unit sphere $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

1. *We prove that for* $0 < p < \infty$ *and* $q = \infty$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n,d,p,\infty)}{n^{d/p}} = \mathcal{L}(d,p,\infty),$$

and for $0 < p < q < \infty$*,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{C(n,d,p,q)}{n^{d\,(1/p-1/q)}} \ge \mathcal{L}(d,p,q),$$

where the constant $\mathcal{L}(d,p,q)$ *is defined for* $0 < p < q \le \infty$ *by*

$$\mathcal{L}(d,p,q) := \sup_{f\in\mathcal{E}_p^d,\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}=1} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

with $\mathcal{E}_p^d$ *denoting the set of all entire functions* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *of spherical exponential type at most* 1.

These results extend the recent results of Levin and Lubinsky for trigonometric polynomials on the unit circle.

[1]F. D. was supported by NSERC Canada under the grant RGPIN 04702 Dai. D. G. was supported by the RFBR (no. 16-01-00308). S. T. was partially supported by MTM 2014-59174-P and 2014 SGR 289.

2. *We find the following sharp constant in the Nikolskii inequality for nonnegative functions*

$$\sup_{f\in\mathcal{E}_1^d,\, f\ge 0}\frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}=\frac{1}{2^{d-1}|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)}.$$

We estimate the normalized Nikolskii constant

$$L_d:=\frac{|\mathbb{S}^d|\Gamma(d+1)}{2}\,\mathcal{L}(d,1,\infty).$$

It was known that $e^{-d}\le L_d\le 1$.

3. *We prove the following lower and upper estimates:*

$$2^{-d}\le L_d\le {}_1F_2\Big(\frac{d}{2};\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}+1;-\frac{\beta_d^2}{4}\Big),$$

where ${}_1F_2$ *and* β_d *denote the hypergeometric function, and the smallest positive zero of the Bessel function* $J_{d/2}$, *respectively. In particular, this implies that the constant* L_d *decays exponentially fast as* $d\to\infty$:

$$2^{-d}\le L_d\le(\sqrt{2/e})^{d\left(1+O(d^{-2/3})\right)},$$

where $\sqrt{2/e}=0.85776\cdots$.

УДК 517.53

О ЗАДАЧЕ ГОРИНА ДЛЯ ПОЛУОСИ[1]

В. И. Данченко, П. В. Чунаев (Владимир, Россия)
vdanch2012@yandex.ru, chunayev@mail.ru

Пусть все полюсы z_k *наипростейшей дроби*

$$\rho_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-z_k}$$

лежат в остром угле с биссектрисой на отрицательной полуоси $\mathbb{R}^-$:

$$z_k=r_ke^{i\varphi_k},\qquad \varphi_k\in(\pi-\alpha,\pi+\alpha),\qquad \alpha\in(0,\pi/2). \tag{1}$$

[1]Работа В. И. Данченко выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание № 1.574.2016/1.4). Работа П. В. Чунаева выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00252 мол_а.

В работе [1] с использованием новых параметрических квадратурных формул для рациональных функций получено следующее неравенство:

$$S^{2m-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\cos^{2m}\alpha}\frac{2m}{\pi}\|\rho_n\|^{2m}_{L_{2m}(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}, \qquad S := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Применим его для оценки величины

$$d(\rho_n) := \min_{k=1,\dots,n} \operatorname{dist}(z_k, \mathbb{R}^+)$$

при определенной нормировке L_p-нормы наипростейшей дроби ρ_n (это один из вариантов задачи Горина для полуоси). Заметим сначала, что при $2(m-1) < p \leqslant 2m$ имеем

$$\|\rho_n\|^{2m}_{L_{2m}(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})} = \int_{\mathbb{R}^+} |\rho_n(x)|^{2m-p}\frac{|\rho_n(x)|^p}{\sqrt{x}}\,dx \leqslant \|\rho_n\|^{2m-p}_{L_\infty(\mathbb{R}^+)}\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}.$$

Из (1), очевидно, следует, что $\|\rho_n\|^{2m-p}_{L_\infty(\mathbb{R}^+)} \leqslant S^{2m-p}$. Отсюда и из (2) находим

$$S^{2m-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\cos^{2m}\alpha}\frac{2m}{\pi}S^{2m-p}\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}, \qquad 2(m-1) < p \leqslant 2m,$$

так что

$$S^{p-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\cos^{p+2}\alpha}\frac{p+2}{\pi}\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})}, \qquad p > 0.$$

С учетом $S \leqslant d^{-1}(\rho_n)$ отсюда получается

Теорема. *При нормировке* $\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R}^+;\frac{1}{\sqrt{x}})} \leqslant 1$, $p > 1/2$, *справедливо неравенство*

$$d(\rho_n) \geqslant S^{-1} \geqslant \left(\frac{\pi\cos^{p+2}\alpha}{p+2}\right)^{1/(p-1/2)}\frac{1}{n^{1/(2p-1)}}.$$

В частности, если все $z_k \in \mathbb{R}^-$ (*т.е.* $\alpha = 0$), *то*

$$d(\rho_n) \geqslant \left(\frac{\pi}{p+2}\right)^{1/(p-1/2)}\frac{1}{n^{1/(2p-1)}} \geqslant \frac{4}{5n^{1/(2p-1)}}.$$

Эту теорему интересно сравнить со следующими результатами (без каких-либо условий на полюсы). При $1 < p < 2$ полюсы ρ_n, расположенные на полуоси $\mathbb{R}^-$ (если такие имеются), при нормировке $\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R}^+)} \leqslant 1$ отделены от нуля некоторой величиной $A(p) > 0$ (см. [2, Теорема 6]).

В [2] также высказана гипотеза, что при $p \geqslant 2$ такие полюсы могут сколь угодно близко подступать к нулю.

При нормировке $\|\rho_n\|_{L_2(\mathbb{R}^+)} \leqslant 1$ и достаточно больших n полюсы ρ_n отделены от всей полуоси $\mathbb{R}^+$ величиной порядка $1/\ln n$ (см. [3, Следствие 3.1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Chunaev and V. Danchenko.* Sharp inequalities of Jackson-Nikolskii type for rational functions // arXiv:1611.03485. 2016.

2. *Бородин П. А.* Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 803—810.

3. *Бородин П. А.* Приближение наипростейшими дробями на полуоси // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 8. С. 25–44.

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО МЕЖДУ РАВНОМЕРНОЙ НОРМОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ q-НОРМОЙ С ВЕСОМ БЕССЕЛЯ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА НА ПОЛУОСИ[1]

М. В. Дейкалова (Екатеринбург, Россия)
marina.deikalova@urfu.ru

Обозначим через $L^q_\alpha = L^q((0,\infty), x^{2\alpha+1})$ при $1 \le q < \infty$ и $\alpha > -1$ пространство комплекснозначных измеримых на $(0,\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^q_\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^q \, x^{2\alpha+1} dx\right)^{1/q}.$$

Пусть $\mathcal{E}(\sigma, q, \alpha)$ есть множество четных целых функций экспоненциального типа (не выше) $\sigma > 0$, сужение которых на полуось $[0,\infty)$ принадлежит пространству L^q_α.

В докладе будет обсуждаться точное неравенство

$$\|f\|_C \le M \, \|f\|_{L^q_\alpha}, \quad f \in \mathcal{E}(\sigma, q, \alpha), \tag{1}$$

между равномерной нормой и L^q_α-нормой функций класса $\mathcal{E}(\sigma, q, \alpha)$ при $1 \le q < \infty$ и $\alpha > -1/2$. Будет охарактеризована экстремальная функция, на которой это неравенство обращается в равенство. В частности, будет доказано, что экстремальная функция, достигает равномерной нормы только в концевой точке $x = 0$ полуоси. Для обоснования результатов применяется оператор обобщенного сдвига Бесселя.

[1]Исследования выполнены при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

Аппроксимативным и экстремальным свойствам пространства $\mathcal{E}(\sigma, q, \alpha)$ посвящена статья С. С. Платонова [1], где, в частности, доказано существование неравенства (1) с конечной константой.

Исследования выполнены совместно с В. В. Арестовым, А. Г. Бабенко, и А. Хорват [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Известия РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

2. *Arestov V., Babenko A., Deikalova M., and Horváth Á.* Nikol'skii inequality between the uniform norm and the integral q-norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Analysis Math. В печати.

УДК 519.853

О МИНИМАЛЬНОМ ПО ПЛОЩАДИ КОЛЬЦЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ГРАНИЦУ ДВУМЕРНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

С. И. Дудов, М. А. Осипцев (Саратов, Россия)

dudovsi@info.sgu.ru, osipcevma@gmail.com

1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое тело, не являющееся кругом, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^2 \backslash D}$, $\| \cdot \|$ — евклидова норма.

Рассматривается задача

$$\varkappa(x) \equiv R^2(x) - \rho^2(x) \to \min_{x \in D}. \tag{1}$$

Здесь функции

$$R(x) = \max_{y \in D} \|x - y\|, \quad \rho(x) = \min_{y \in \Omega} \|x - y\|$$

выражают, соответственно, расстояния от точки x до самой удаленной точки тела D и до ближайшей точки множества Ω. Поэтому величина $\pi\varkappa(x)$ является площадью кольца с центром в точке x, содержащем границу тела D.

Известно, что функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^2$, а функция $\rho(x)$ — вогнутой на D. Соответствующие формулы субдифференциала $\underline{\partial R}(x)$ функции $R(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^2$ и супердифференциала $\overline{\partial \rho}(x)$ функции $\rho(x)$ в точках $x \in intD$ можно найти в [2–4].

Обозначим далее через

$$Q^R(x) = \{z \in D : R(x) = \|x - z\|\}, \quad Q^\rho(x) = \{z \in \Omega : \rho(x) = \|x - z\|\},$$

$co\, A$ — выпуклая оболочка множества A.

Теорема 1. *Функция $\varkappa(x)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^2$. Формулу ее субдифференциала можно выразить следующем виде*

$$\underline{\partial\varkappa}(x) = \begin{cases} 2(R(x)\underline{\partial R}(x) - \rho(x)\overline{\partial\rho}(x)), & \text{если } x \in intD, \\ 2R(x)\underline{\partial R}(x), & \text{если } x \in \Omega. \end{cases}$$

Кроме того, если D — строго выпуклое тело, то $\varkappa(x)$ является строго квазивыпуклой функцией на D.

Теорема 2. *Для того, чтобы точка $x^* \in D$ доставляла минимальное значение функции $\varkappa(x)$ на выпуклом теле D необходимо и достаточно, чтобы*

$$coQ^R(x^*) \cap coQ^\rho(x^*) \neq \emptyset.$$

Теорема 3. *Если D — строго выпуклое тело, то задача (1) имеет единственное решение.*

2. Авторам неизвестно, рассматривалась ли задача (1) кем-либо ранее. В качестве близких по постановке можно привести задачу

$$\varphi(x) \equiv R(x) - \rho(x) \to \min_{x \in D} \tag{2}$$

— о кольце наименьшей ширины, содержащем границу выпуклого тела D (см. [1] и ссылки на др. работы, а также [5]), и задачу об асферичности тела D ([6])

$$\psi(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \to \min_{x \in D}. \tag{3}$$

Известно, что задача (2) имеет единственное решение ([5]), которое является, в то же время, одним из решений задачи (3) (см. [6]). Примеры показывают, что задачи (1) и (3) могут иметь неединственное решение. Обозначим через $C_\varkappa, C_\varphi, C_\psi$ — множества точек минимума целевых функций в задачах (1), (2) и (3) соответственно.

Теорема 4. *Имеет место соотношение*

$$C_\varphi = C_\varkappa \cap C_\psi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002. 210 с.

2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.:Наука, 1981. 384 с.

4. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.

5. *Дудов С. И.* Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 64–75.

6. *Дудов С. И., Мещерякова Е. А.* Об асферичности выпуклого тела // Изв. вузов. Сер. Матем. 2015. № 2. С. 45–58.

УДК 517.52

ТЕОРЕМА ХАРДИ – ЛИТТЛЬВУДА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ОБОБЩЕННО-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

М. И. Дьяченко (Москва, Россия),
А. Муканов (Астана, Казахстан),
С. Ю. Тихонов (Барселона, Испания)
dyach@mail.ru

Хорошо известен следующий результат Г. Харди – Дж. Литтльвуда [1].

Теорема А. *Пусть $f(x)$ есть сумма ряда*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

коэффициенты которого $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремятся к нулю. Тогда для любого $1<p<\infty$ имеем

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)}\asymp\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}(a_n^p+b_n^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Результаты такого типа весьма важны и неудивительно, что теорема А обобщалась в различных направлениях многими авторами. В частности, можно упомянуть работы [2–7]. Отметим еще, что первый аналог теоремы А для пространств Лоренца был установлен в работе [2].

Напомним определение весовых пространств Лебега и пространств Лоренца. Пусть μ — мера Лебега на $[0,2\pi]$, f — μ-измеримая функция на $[0,2\pi]$. Тогда обозначим через f^* невозрастающую перестановку f, т.е.

$$f^*(t)=\inf\{\sigma:\ \mu\{x\in[0,2\pi]:\ |f(x)|>\sigma\}\le t\}.$$

Определение 1. Пусть $0<p\le\infty$ и $0<q\le\infty$. Тогда *пространство Лоренца $L_{p,q}([0,2\pi])$* — это множество всех μ-измеримых функций,

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ ((проект N 18-01-00281).

для которых величина

$$\|f\|_{L_{p,q}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0 < p < \infty \text{ и } 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{t \in [0,2\pi]} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{при } 0 < p \le \infty \text{ и } q = \infty \end{cases}$$

конечна.

Определение 2. Пусть $0 < p \le \infty$ и $0 < q \le \infty$. Тогда *весовым пространством Лебега* $L^q_{w(p,q)}([0, 2\pi])$ называется множество μ-измеримых функций f, для которых величина

$$\|f\|_{L^q_{w(p,q)}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0 < p < \infty \text{ и } 0 < q < \infty, \\ \mathop{ess\ sup}\limits_{t \in [0,2\pi]} t^{\frac{1}{p}} |f(t)| & \text{при } 0 < p \le \infty \text{ при } q = \infty, \end{cases}$$

конечна. Здесь через $w(p,q)(t)$ обозначается весовая функция $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

Будем также обозначать через $l_{p,q}$ и $l^q_{w(p,q)}$ аналогичным образом определенные пространства Лоренца и весовые пространства Лебега последовательностей, соответственно.

Замечание . Отметим, что $\|f\|_{L_{p,p}} = \|f\|_{L^p_{w(p,p)}} = \|f\|_{L_p}$. Более того,

$$\|f\|_{L_{p,q}} \ge \|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \quad \text{при} \quad q \le p$$

и

$$\|f\|_{L_{p,q}} \le \|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \quad \text{при} \quad q \ge p\,.$$

Введем класс обобщенно-монотонных последовательностей.

Определение 3. Назовем последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *обобщенно-монотонной* ($\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM$), если существуют постоянные $C > 0$ и $\lambda > 1$ такие, что при любом $n \ge 1$ имеем

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \le C \sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n} \frac{|a_k|}{k}.$$

Нами установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда*

$$\|f\|_{L_{p,q}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l_{p'q}} + \|\mathbf{b}\|_{l_{p',q}}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le q \le \infty.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда*

$$\|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l^q_{w(p',q)}} + \|\mathbf{b}\|_{l^q_{w(p',q)}}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le q \le \infty.$$

Здесь через p' *обозначено число, сопряженное к* p, *т.е.*, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Справедлив, также, и нижеследующий результат.

Следствие 1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда при* $1 < p < \infty$ *и* $1 \le q \le \infty$ *имеем*

$$\|f\|_{L^q_{w(p,q)}} \asymp \|f\|_{L_{p,q}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l^q_{w(p',q)}} + \|\mathbf{b}\|_{l^q_{w(p',q)}} \asymp \|\mathbf{a}\|_{l_{p',q}} + \|\mathbf{b}\|_{l_{p',q}}.$$

Отметим, что теорема 1 была ранее доказана в работе [8] для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in GM$ такова, что для всех $n \ge 0$ числа $c_n \in S_{\alpha,\beta}$, где

$$S_{\alpha,\beta} = \{re^{i\varphi} : |\varphi - \alpha| \le \beta, r \ge 0\}, \quad 0 \le \alpha < 2\pi, \quad 0 \le \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Ясно, что при $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ множество $S_{0,\beta}$ содержит положительную полуось $\mathbf{R}_+$, но при любых $0 \le \alpha < 2\pi$ и $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ множество $S_{\alpha,\beta}$ не покрывает всю действительную прямую $\mathbf{R}$.

Теорема 2 также была ранее доказана для неотрицательных последовательностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$ в работах [5] и [4].

Метод, разработанный при доказательстве теорем 1 и 2 позволяет установить и теоремы о взаимосвязи модуля гладкости функции со скоростью убывания ее коэффициентов Фурье, когда эти коэффициенты обобщенно-монотонны.

Для интегрируемой функции f с тригонометрическим рядом Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

в статье [9] Г. Лоренц показал, что если при $2 \leq p \leq \infty$ и $0 < \alpha < 1$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^{p'} + |b_k|^{p'}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha p'}}\right),$$

то $f \in Lip\ (\alpha, p)$. Здесь через $Lip\ (\alpha, p)$ обозначено пространство Липшица:

$$Lip\ (\alpha, p) := \{f \in L_p([0, 2\pi]) : \omega(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)\},$$

где $\omega(f, \delta)_p := \sup\limits_{|h|\leq\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p$ – модуль гладкости первого порядка в L_p функции f.

Этот результат обобщался многими математиками. Упомянем здесь работы [10–14].

Обозначим через

$$\omega_l(f, \delta)_p := \sup_{|h|\leq\delta} \left\|\Delta_h^l f(\cdot)\right\|_p,$$

модуль гладкости l-го порядка ($l \geq 1$) в L_p функции f, где

$$\Delta_h^l f(x) := \Delta_h(\Delta_h^l f(x)), \quad \Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x).$$

Сформулируем результат А. А. Конюшкова [12].

Теорема Б. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, *и функция* $f(x)$ *обладает рядом Фурье (1), причем* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— невозрастающие последовательности. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $f \in Lip\ (\alpha, p)$;

2) $|a_n|, |b_n| = O\left(n^{\frac{1}{p} - \alpha - 1}\right)$;

3) $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(|a_k|^{p'} + |b_k|^{p'}) = O\left(n^{-\alpha p'}\right)$.

Нами в этом направлении получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in L_p([0, 2\pi])$, $1 < p < \infty$ *функция*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM$. *Тогда для* $l \in \mathbf{N}$ *имеем*

$$\omega_l\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \sim \frac{1}{n^l}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{lp+p-2}\left(|a_k|^p + |b_k|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{p-2}\left(|a_k|^p + |b_k|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants // J. Lond. Math. Soc. 1931. Vol. 1–6, № 1. P. 3–9.

2. *Sagher Y.* An application of interpolation theory to Fourier series // Stud. Math. 1972. Vol. 41. P. 169–181.

3. *Tikhonov S.Yu.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 326, № 1. P. 721–735.

4. *Dyachenko M., Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. 2009. Vol. 193, № 3. P. 285–306.

5. *Yu D.S., Zhou P., Zhou S.P.* On L^p integrability and convergence of trigonometric series // Stud. Math. 2007. Vol. 182, № 3. P. 215–226.

6. *Dyachenko M.I.* The Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with generalized monotone coefficients // Russ Math. 2008. Vol. 52, № 5. P. 32–40.

7. *Dyachenko M., Nursultanov E., Kankenova A.* On summability of Fourier coefficients of functions from Lebesgue space // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 419, № 2. P. 959–971.

8. *Grigoriev S., Sagher Y., Savage T.* General monotonicity and interpolation of operators // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 435, № 2. P. 1296–1320.

9. *Lorentz G.G.* Fourier-koeffizienten und funktionenklassen // Math. Z. 1948. Vol. 51. P. 135–149.

10. *Тиман А. Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. С. 17–20.

11. *Gorbachev D., Tikhonov S.* Moduli of smoothness and growth properties of Fourier transforms: two-sided estimates // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164. P. 1283–1312.

12. *Конюшков А.А.* О классах Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, № 3. С. 423–448.

13. *Aljančić S.* On the integral moduli of continuity in $L_p, (1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficents // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, № 2. P. 287–294.

14. *Askey R.* Smoothness conditions for Fourier series with monotone coefficients // Acta Sci. Math. (Szeged). 1967. Vol. 28. P. 169–171.

УДК 517.9

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С ОБОБЩЕННО МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. И. Дьяченко (Москва, Россия),
А. Б. Муканов (Астана, Казахстан),
С. Ю. Тихонов (Барселона, Испания)
mukanov.askhat@gmail.com

В этой работе мы рассматриваем синус ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{1}$$

с обобщенно монотонными коэффициентами $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В работе [1] Т. В. Чоунди и А. Е. Джоллиффе доказали следующую теорему о равномерной сходимости тригонометрических синус рядов.

Теорема A. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неотрицательная, невозрастающая последовательность. Тогда ряд* (1) *сходится равномерно на* $[0, 2\pi]$ *тогда и только тогда, когда* $na_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Недавно различные обобщения этой теоремы были доказаны для различных ослаблений условия монотонности (см., например [2–5] и их библиографии). Многие обобщения включают рассмотрение обобщенно монотонных последовательностей. Напомним определение $GM(\beta)$ последовательностей (см. [3]).

Определение 1. Пусть $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности комплексных и неотрицательных чисел соответственно. Пара (a, β) определяет обобщенно монотонную последовательность **a** с мажорантой β, обозначается $a \in GM(\beta)$, если существует $C > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \le C\beta_n. \tag{2}$$

Приведем примеры некоторых мажорант β, используемых в изучении тригонометрических рядов:

1) $\beta_n^1 = |a_n|$;

2) $\beta_n^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{s=n/\lambda}^{\lambda n} |a_s|$, $\lambda > 1$;

3) $\beta_n^3 = \frac{1}{n}\max\limits_{k\ge n}\sum\limits_{s=k}^{2k}|a_s|$, $\lambda > 1$.

Известно, что $GM(\beta^1) \subset GM(\beta^2) \subset GM(\beta^3)$ (см. [5, 6].) Более того, если $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM(\beta^i)$, $i = 1, 2, 3$, и $a_n \ge 0$, тогда ряд (1) сходится равномерно на $[0, 2\pi]$ тогда и только тогда, когда $na_n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. [3–6). Недавно в статье [7] авторы доказали аналог теоремы A для $\{a_n\} \in GM(\beta^2)$ без условия неотрицательности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Мы, следуя идеям из [7], изучаем равномерную сходимость синус рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами, которые не обязательно являются неотрицательными. При этом мы рассматриваем последовательности $GM(\beta)$ для некоторого класса мажорант β. Приведем определения некоторых понятий.

Пусть S — множество числовых последовательностей.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность функционалов, заданных на S, т.е., $F_n : S \to \mathbb{R}_+$, *допустима* если:

1) $F_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любой последовательности $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ стремящейся к нулю;

2) последовательность $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ограничена для ограниченной $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$.

Примеры таких $F = \{F_n\}_{n=1}^\infty$:

1) $F_n^1(x) = |x_n|^\alpha$, $\alpha > 0$;

2) $F_n^2(x) = \sum\limits_{k=n/\lambda}^{\lambda n}\frac{|x_k|}{k}$, $\lambda > 1$;

3) $F_n^3(x) = \max\limits_{k\ge n/\lambda}|x_k|$, $\lambda > 1$;

4) $F_n^4(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$.

Для заданной последовательности $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, обозначим через $\widetilde{a}$ следующую последовательность: $\widetilde{a}_n = \sum\limits_{k=n}^{2n}|a_k|$. Мы рассматриваем класс обобщенно монотонных последовательностей $GM(\beta)$ с

$$\beta_n = \frac{1}{n}F_n(\widetilde{a}).$$

В частности, класс $GM(\beta^3)$ это класс $GM(\beta)$ с $\beta_n = \frac{1}{n}F_n^3(\widetilde{a})$. Более того, $GM(\beta^2)$ совпадает с $GM(\beta)$, где $\beta_n = \frac{1}{n}F_n^2(\widetilde{a})$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательность функционалов* $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ *допустима. Пусть также* $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM(\beta)$, *где* $\beta_n = \frac{1}{n}F_n(\widetilde{a})$ *и* $\widetilde{a}$ *– огра-*

ниченная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *ряд (1) сходится равномерно на* $[0, 2\pi]$*;*
2) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$;
3 $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{a}_n = 0$.

Замечание 1. Вообще говоря, утверждение теоремы 1 неверно без допущения условия ограниченности последовательности $\{\widetilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 2. Мы показали, что существует последовательность $a \in \in GM(\beta^3) \setminus GM(\beta^2)$ такая, что $\widetilde{a}$ неограничена. Это показывает, что теорема 1 обобщает результат из [7].

Также мы получили необходимые и достаточные условия равномерной сходимости косинус рядов с незнакопостоянными обобщенно монотонными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chaundy T. W., Jolliffe A. E.*, The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series // Proc. London Math. Soc. 1916. Vol. 2, № 15. P. 214–216.
2. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. 2001. Iss. 27. P. 279–285.
3. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2007. Iss. 326. P. 721–735.
4. *Zhou S. P., Zhou P., Yu D. S.* Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series // Sci. China, Math. 2010. Iss. 53. P. 1853–1862.
5. *Dyachenko M., Tikhonov S.* Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. 2009. Vol. 193, № 3. P. 285–306.
6. *Tikhonov S.* Best approximation and moduli smoothness: computation and equivalence theorems // J. Approx. Theory. 2008. Iss. 153. P. 19–39.
7. *Feng L., Totik V., Zhou S. P.* Trigonometric series with a generalized monotonicity condition // Acta Math. Sinica, English Ser. 2014. Vol. 30, № 8. P. 1289–1296.

УДК 517.984

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ОТРЕЗКЕ[1]

Л. С. Ефремова (Саратов, Россия)
liubov.efremova@gmail.com

Данная работа посвящена построению эффективного численного алгоритма решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке.

Рассмотрим уравнение:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты № 15-01-04864, 16-01-00015, 17-51-53180).

на отрезке $x \in [0,\pi]$. Определим функцию Вейля следующим равенством:

$$M(\lambda) = -\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где $\Delta^0(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ — характеристические функции краевых задач для уравнения (1) с условиями $y(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$ и $y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$ соответственно.

Задача 1. *По заданной функции Вейля $M(\lambda)$ восстановить потенциал $q(x)$.*

Предлагаемый алгоритм использует идеи и конструкции метода спектральных отображений. Известно, что [1]:

$$q(x) = \sigma'(x),$$

$$\sigma(x) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \left(\tilde{\varphi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) - \frac{1}{2}\right)\hat{M}(\lambda)d\lambda, \tag{2}$$

где $\varphi(x,\lambda)$ является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = y^{[1]}(x) + \sigma(x)y(x), \\ (y^{[1]}(x))' = -\sigma(x)y^{[1]}(x) - (\sigma^2(x) + \lambda)y(x), \\ y(0) = 1, \\ y^{[1]}(0) = \tilde{h}, \end{cases}$$

$\hat{M}(\lambda) = M(\lambda) - \tilde{M}(\lambda)$. Здесь $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\tilde{M}(\lambda)$, $\tilde{h}$ — объекты, относящиеся к модельной задаче с потенциалом $\tilde{q}(x) = 0$.

Перепишем формулу восстановления (2) в виде:

$$\sigma(x) = F(x) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \tilde{\varphi}(x,\lambda)\left(\varphi(x,\lambda) - \tilde{\varphi}(x,\lambda)\right)\hat{M}(\lambda)d\lambda, \tag{3}$$

где функция $F(x)$ может быть найдена из входных данных задачи с помощью следующего соотношения:

$$F(x) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \left(\tilde{\varphi}^2(x,\lambda) - \frac{1}{2}\right)\hat{M}(\lambda)d\lambda.$$

Заменяя в (3) интеграл квадратурной формулой:

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\lambda)d\lambda \approx \sum_{k=1}^{n} b_k f(\lambda_k),$$

получаем следующее приближенное равенство:

$$\sigma(x) \approx u(x, \varphi(x, \lambda_1), ..., \varphi(x, \lambda_n)),$$

где

$$u(x, y_1, y_2, ..., y_n) := F(x) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\varphi}(x, \lambda_k) \left(y_k - \tilde{\varphi}(x, \lambda_k)\right) \hat{M}(\lambda_k).$$

Основная идея предлагаемого подхода состоит в том, чтобы трактовать процесс восстановления потенциала как решение следующей задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1^{[1]}(x) + u(x, y_1, ..., y_n) y_1(x), \\ ... \\ y_n'(x) = y_n^{[1]}(x) + u(x, y_1, ..., y_n) y_n(x), \\ (y_1^{[1]}(x))' = -u(x, y_1, ..., y_n) y_1^{[1]}(x) - (u^2(x, y_1, ..., y_n) + \lambda_1) y_1(x), \\ ... \\ (y_n^{[1]}(x))' = -u(x, y_1, ..., y_n) y_n^{[1]}(x) - (u^2(x, y_1, ..., y_n) + \lambda_n) y_n(x), \\ y_k(0) = 1, \quad k = \overline{1, n}, \\ y_k^{[1]}(0) = \tilde{h}, \quad k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Для решения данной задачи Коши могут использоваться классические численные методы (Адамса, Гира и т.д.). Окончательно в качестве приближенного решения обратной задачи принимается функция $u(x, y_1(x), ..., y_n(x))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

УДК 517.54

О СООТНОШЕНИИ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ ДВУХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ[1]

А. В. Жердев (Саратов, Петрозаводск, Россия)
jerdevandrey@gmail.com

Обозначим $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$, $F : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ — конформные отображения, где Ω —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

область, ограниченная замкнутой жордановой кривой Γ, Ω^* — неограниченная компонента дополнения Γ. Пусть $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, а F имеет следующее разложение в ряд Лорана в окрестности точки ∞: $F(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + \ldots$, $b_1 > 0$. Тогда $f'(0) = r(\Omega, 0)$ называется конформным радиусом области Ω в точке 0, а $b_1^{-1} = r(\Omega^*, \infty)$ — конформным радиусом области Ω^* в точке ∞. Справедливо неравенство, полученное методом площадей Н. А. Лебедевым как частный случай более общей теоремы для неналегающих областей [1]:

$$r(\Omega, 0) r(\Omega^*, \infty) \leq 1,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда Γ — окружность с центром в начале координат.

Другим подходом к рассмотрению задачи о соотношении конформных радиусов двух неналегающих областей может служить параметрический метод, разработанный в работах К. Левнера [2], П. П. Куфарева [3], К. Поммеренке [4]. Будем называть однопараметрическое семейство областей $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$, убывающим, если $\Omega(t_2) \subset \Omega(t_1)$, $0 \leq t_1 < t_2 < T$; возрастающим — если $\Omega(t_1) \subset \Omega(t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2 < T$; монотонным — если оно убывающее или возрастающее. Пусть $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$ — монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, функция $f(z, t) = a(t) z + \ldots$ — при каждом t конформно отображает единичный круг на $\Omega(t)$, где $a(t)$ — положительная непрерывная функция. Тогда [3, 5] $f(z, t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = z \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} q(z, t), \quad 0 \leq t < T, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $q(z, t)$ — голоморфная в $\mathbb{D}$ функция при каждом фиксированном t. Заметим, что если $\Omega(t)$ — возрастающее семейство областей и переменная t выбрана таким образом, что $a(t) = e^t$, то $q(z, t)$ принадлежит классу Каратеодори (приведенное уравнение в этом случае обычно называют уравнением Левнера–Куфарева). Следующая теорема дает интегральное представление функции $q(z, t)$ для семейств областей $\Omega(t)$ ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах.

Теорема 1. *Пусть $\Omega(t)$, $0 \leq t < T$, — монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей, $0 \in \Omega(t)$, $0 \leq t < T$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, ограниченных кривыми $\Gamma(t)$, заданными в полярных координатах (r, ψ) уравнением $r = \gamma(\psi, t) = 1 + \delta(\psi, t)$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq t < T$, где $\delta \in C^{3+\alpha}([0, 2\pi] \times [0, T))$, $0 < \alpha < 1$. Функция $f(z, t) = a(t) z + \ldots$, $a(t) > 0$, — конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на $\Omega(t)$. Тогда $\dot{f}(z, t)$ существует для всех $0 \leq t < T$, $z \in \mathbb{D}$ и $f(z, t)$ удовлетворяет* *уравнению*

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} q(z,t), \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \le t < T,$$

причем

$$q(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{|f'(e^{i\varphi},t)|} \dot{\delta}(\psi(\varphi,t),t) \cos(\beta(\psi(\varphi,t),t)) \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\varphi,$$

$$z \in \mathbb{D}, \quad 0 \le t < T,$$

где $\psi(\varphi,t) = \arg f(e^{i\varphi},t)$, $\beta(\psi,t) = -\arctan(\frac{\gamma'(\psi,t)}{\gamma(\psi,t)})$ *— угол между нормалью к* $\Gamma(t)$ *в точке* $\gamma(\psi,t)$ *и радиальным вектором, проходящим через эту точку.*

Вместе с семейством областей $\Omega(t)$, будем рассматривать семейство областей $G(t)$, границы которых заданы в полярных координатах уравнением $r = \gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. Следующая теорема дает асимптотическую формулу, связывающую конформные радиусы этих семейств в точке 0.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega(t)$, $0 \le t < T$, *— монотонное однопараметрическое семейство односвязных областей,* $0 \in \Omega(t)$, $0 \le t < T$, $\Omega(0) = \mathbb{D}$, *ограниченных кривыми* $\Gamma(t)$, *заданными в полярных координатах* (r,ψ) *уравнением* $r = \gamma(\psi,t) = 1 + \delta(\psi,t)$, $0 \le \psi \le 2\pi$, $0 \le t < T$, *где* $\delta \in C^{3+\alpha}([0,2\pi] \times [0,T))$, $0 < \alpha < 1$. *При этом, пусть конформный радиус* $r(\Omega(t),0) = e^t$, *если* $\Omega(t)$ *— возрастающее семейство областей и* $r(\Omega(t),0) = e^{-t}$, *если* $\Omega(t)$ *— убывающее семейство областей. Пусть* $G(t)$ *— семейство областей, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах уравнением* $r = \gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. *Тогда справедлива формула*

$$\log r(G(t),0) = ct + \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\dot{\delta}(\varphi,0))^2 - \ddot{\delta}(\varphi,0)\, d\varphi \right) t^2 + o(t^2), \quad t \to +0,$$

где $r(G(t),0)$ *— конформный радиус области* $G(t)$, $c = 1$, *если* $\Omega(t)$ *— убывающее семейство,* $c = -1$, *если* $\Omega(t)$ *— возрастающее семейство.*

Доказательство теоремы 2 основано на результате предыдущей теоремы и соотношении $\gamma^*(\psi,t) = (\gamma(\psi,t))^{-1}$. Несложно показать, что $r(\Omega^*(t),\infty) = r(G(t),0)$, $0 \le t < T$, где $\Omega^*(t)$ — неограниченная компонента дополнения $\Gamma(t)$. Таким образом теорема 2 дает асимптотическую формулу, связывающую конформные радиусы семейств областей $\Omega(t)$ и $\Omega^*(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М. : Наука, 1975. 336 с.

2. *Lowner K.* Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. Bd. 89, S. 103–121.

3. *Куфарев П. П.* Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. 1996. Т. 13(55), вып. 1. С. 87-118.

4. *Pommerenke Ch.* Uber die Subordination analytischer Funktionen // J. Reine Angew. Math. 1965. Bd. 218, S. 159—173.

5. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Gottingen : Vandenhoeck and Ruprecht. 1975.

УДК 517.9

ЛОКАЛЬНЫЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИЛЬНО И СЛАБО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ[1]

Г. Е. Иванов (Долгопрудный, Россия)
g.e.ivanov@mail.ru

Различные классы множеств, обладающих усиленными или ослабленными свойствами выпуклости, рассматривались многими авторами в связи с приложениями в оптимизации, оптимальном управлении, теории и методах решения уравнения Гамильтона – Якоби, многозначном анализе, теории аппроксимаций и других разделах математики. Впервые понятие слабой выпуклости появилось в работе Ю. Г. Решетняка [1]. Затем Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [2] рассматривали a-выпуклые множества, представимые в виде пересечения дополнений к шарам фиксированного радиуса. Е. Майкл [3] ввел понятие паравыпуклых множеств и доказал теорему о существовании непрерывного селектора для многозначного отображения с паравыпуклыми значениями. Г. Федерер [4] ввел понятие множества положительной достижимости, как множества A, для которого точки из некоторой окрестности A обладают чебышевским свойством, т.е. имеют единственную ближайшую точку из множества A. Ж.-Ф. Виаль [5] рассматривал слабо выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, т.е. такие, что для любых двух достаточно близких точек этого множества, сильно выпуклый отрезок с концами в этих точках имеет еще хотя бы одну общую точку с множеством. Ф. Кларк, Р. Штерн и П. Воленски [6] ввели понятие проксимально гладкого множества, т.е. множества, для которого функция расстояния непрерывно дифференцируема в окрестности этого множества. В работах Р. Поликвина и Р.-Т. Рокафеллара [7], а затем в работах Ф. Бернарда, Л. Тибо и Н. Златевой [8, 9] рассматрились прокс-регулярные множества, т.е. множества, допускающих касание сферой в граничных точках.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00259-а).

В настоящем докладе приведены различные характеризации классов сильно и слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве, установлены взаимосвязи между перечисленными выше типами ослабленной и усиленной выпуклости множеств. Вводится понятие радиуса кривизны как локальной количественной характеристики параметров выпуклости множества в его граничной точке. Установлена связь глобальных и локальных характеристик сильной и слабой выпуклости множеств.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со сколярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Через $B_R(c)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса $R>0$ с центром $c\in H$. Пусть $\operatorname{int} A$, $\overline{A}$ и ∂A — внутренность, замыкание и граница множества $A\subset H$. Для множества $A\subset H$ будем использовать следующие обозначения:

- $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y\in A}\|x-y\|$;
- $\sigma(p,A)=\sup\limits_{a\in A}\langle p,a\rangle$, $p\in H$ — опорная функция множества A;
- $d_A(x)=\inf_{a\in A}\|x-a\|$ — расстояние от точки x до множества A;
- $U_A(r)=\{x\in H:\ d_A(x)<r\}$ — r-окрестность множества A;
- $P_A(x)=\{a\in A:\|x-a\|=d_A(x)\}$ – метрическая проекция точки $x\in H$ на множество A;
- $N^P(a,A)=\{p\in H:\ \exists t>0:\ a\in P_A(a+tp)\}$ — конус проксимальных нормалей в точке $a\in\partial A$;
- $\delta_A(\varepsilon)=\sup\left\{\delta>0: B_\delta\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\subset A\quad\forall a_1,a_2\in A:\ \|a_1-a_2\|=\varepsilon\right\}$ – модуль выпуклости множества A;
- $\gamma_A(\varepsilon)=\inf\left\{\gamma\geq 0: B_\gamma\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\cap A\neq\emptyset\ \forall a_1,a_2\in A:\ \|a_1-a_2\|\leq\varepsilon\right\}$ — модуль невыпуклости множества A.

Определение 1. Множество $A\subset H$ называется *R-сильно выпуклым*, если существует множество $C\subset H$ такое, что $A=\bigcap\limits_{c\in C}B_R(c)$.

Определение 2. Множество $A\subset H$ называется *локально R-сильно выпуклым* в точке $a\in\partial A$, если существует $\varepsilon\in(0,R)$ такое, что множество $A\cap B_\varepsilon(a)$ является R-сильно выпуклым.

Определение 3. Для точек $x,y\in H$: $\|x-y\|\leq 2R$ множество $D_R(x,y)=\bigcap\limits_{c:\ x,y\in B_R(c)}B_R(c)$ называется *R-сильно выпуклым отрезком.*

Теорема 1. *Для выпуклого замкнутого множества $A\subset H$ и числа $R>0$ следующие условия эквивалентны:*

1) A является R-сильно выпуклым;

2) $\operatorname{diam} A \leq 2R$ *и* $D_R(a_1, a_2) \subset A \quad \forall a_1, a_2 \subset A$*;*

3) $\operatorname{diam} A \leq 2R$ *и* $\omega \subset A$ *для каждой дуги* ω *окружности радиуса* R *длины* $\leq \pi R$ *с концами из множества* A*;*

4) опорный принцип: $A \subset B_R(a - Rp)\ \forall a \in \partial A\ \forall p \in N^P(a, A) : \|p\| = 1$*;*

5) $\langle p_1, a_1 - a_2 \rangle \geq \frac{1}{2R} \|a_1 - a_2\|^2\ \ \forall a_1, a_2 \in A\ \forall p_1 \in N^P(a_1, A) :\ \|p_1\| = 1$*;*

6) $\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2 \rangle \geq \frac{1}{R} \|a_1 - a_2\|^2\ \ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N^P(a_i, A) : \|p_i\| = 1$*,* $i = 1, 2$*;*

7) $\|a_1 - a_2\| \leq R\|p_1 - p_2\|\ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N(a_i, A) : \|p_i\| = 1,\ i = 1, 2$*;*

другими словами, градиент опорной функции $\nabla \sigma(\cdot, A)$ *существует на единичной сфере и удовлетворяет условию Липшица:* $\|\nabla \sigma(p_1, A) - \nabla \sigma(p_2, A)\| \leq R\|p_1 - p_2\| \quad \forall p_1, p_2 \in \partial B_1(0)$*;*

8) $\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2 \rangle \leq R\|p_1 - p_2\|^2\ \ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N^P(a_i, A) : \|p_i| = 1$*,* $i = 1, 2$*;*

9) для любого $a \in \partial A$ *множество* A *локально* R*-сильно выпукло в точке* a*;*

10) локальный опорный принцип: $\forall a \in \partial A\ \exists \varepsilon \in (0, R)\ \ \exists p \in \partial B_1(0) : A \cap B_\varepsilon(a) \subset B_R(a - Rp)$*;*

11) $\operatorname{diam} A \leq 2R$ *и* $\delta_A(\varepsilon) \geq R - \sqrt{R^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \quad \forall \varepsilon \in (0, \operatorname{diam} A)$*;*

12) $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{R\sqrt{\|x_1 - x_2\|^2 - (d_A(x_1) - d_A(x_2))^2}}{\sqrt{(R + d_A(x_1))(R + d_A(x_2))}}\ \forall x_i \in H,\ a_i \in P_A(x_i),\ i = 1, 2.$

Исследованию сильно выпуклых множеств посвящены работы [10–13]. На основе свойств метрической проекции на сильно выпуклое множество в работе [13] получены эффективные оценки сходимости для метода проекции градиента в задаче оптимизации выпуклой функции на сильно выпуклом множестве.

Определение 4. Множество $A \subset H$ называется R-слабо выпуклым, если для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$ найдется точка $z \in D_R(x, y) \cap A$, отличная от x, y.

Кривой в H называется непрерывная функция $\Gamma : [0, 1] \to H$. Будем говорить, что кривая Γ *соединяет точки* $\Gamma(0)$ and $\Gamma(1)$. *Носителем* кривой Γ называется множество $\Gamma([0, 1]) = \{\Gamma(t) :\ t \in [0, 1]\}$. *Длина* кривой

Γ определяется формулой $|\Gamma| = \sup \sum\limits_{i=1}^{I} \|\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})\|$, где супремум берется по всем разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = 1$ отрезка $[0, 1]$. Для множества $A \subset H$ и точек $x, y \in A$ кривая $\Gamma : [0, 1] \to A$ такая, что $\Gamma(0) = x$, $\Gamma(1) = y$ называется *кратчайшей*, соединяющей x и y, если длина кривой Γ минимальна среди всех таких кривых.

Теорема 2. *Для замкнутого множества $A \subset H$ и числа $R > 0$ следующие условия эквивалентны:*

1) A является R-слабо выпуклым;

2) $A \cap \operatorname{int} B_R(a + Rp) = \emptyset \ \ \forall a \in \partial A\ \forall p \in N^P(a, A) : \ \|p\| = 1$;

3) $\langle p_1, a_1 - a_2 \rangle \geq -\frac{1}{2R}\|a_1 - a_2\|^2 \ \ \forall a_1, a_2 \in A\ \forall p_1 \in N^P(a_1, A) : \ \|p_1\| = 1$;

4) $\langle p_1 - p_2, a_1 - a_2 \rangle \geq -\frac{1}{R}\|a_1 - a_2\|^2 \ \ \forall a_i \in \partial A\ \forall p_i \in N^P(a_i, A) : \|p_i\| \leq 1$, $i = 1, 2$;

5) если $x \in U_A(R)$ и последовательность $\{a_k\} \subset A$ удовлетворяет условию $\|x - a_k\| \to d_A(x)$, то $\{a_k\}$ сходится;

6) оператор метрической проекции $x \mapsto P_A(x)$ однозначен и непрерывен в окрестности $U_A(R)$;

7) функция расстояния $d_A(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_A(R) \setminus A$;

8) функция расстояния $d_A(\cdot)$ дифференцируема по Фреше на множестве $U_A(R) \setminus A$;

9) $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{R}{R - \max\{d_A(x_1), d_A(x_2)\}}\|x_1 - x_2\| \ \ \forall x_i \in U_A(R)\ \forall a_i \in P_A(x_i)$, $i = 1, 2$;

10) $\gamma_A(\varepsilon) \leq R - \sqrt{R^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \ \ \forall \varepsilon \in (0, R)$;

11) для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$ существует единственная кратчайшая кривая $\Gamma : [0, 1] \to A$, соединяющая точки x и y, причем $\Gamma([0, 1]) \subset D_R(x, y)$;

12) для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$ существует $\Gamma : [0, 1] \to A$, соединяющая точки x и y и такая, что $|\Gamma| \leq 2R \arcsin\left(\frac{\|x - y\|}{2R}\right)$.

В монографии [14] исследованы свойства слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве, а в работе [15] — в банаховом пространстве. Работы [16, 17] посвящены исследованию свойств метрической проекции на слабо выпуклые множества. На основе этих свойств в работе [17] получены оценки сходимости для метода проекции градиента в задаче оптимизации сильно выпуклой функции на слабо выпуклом (проксимально гладком) множестве. Работы [18, 19] посвящены исследованию свойств слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой.

Определение 5. Множество $A \subset H$ называется *локально R-слабо выпуклым* в точке $a \in \partial A$, если существует $\delta > 0$ такое, что множество $A \cap B_\delta(a)$ является R-слабо выпуклым.

Теорема 3. *Пусть множество $A \subset H$ замкнуто, связно и локально R-слабо выпукло в каждой точке $a \in \partial A$, причем $\operatorname{diam} A < 2R$. Тогда множество A является R-слабо выпуклым.*

Заметим, что условие $\operatorname{diam} A < 2R$ существенно в теореме 3. Например, дуга $A = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \ \varphi \in [0, 2\pi - \delta]\}$, $\delta \in (0, \pi)$ в каждой точке $a \in \partial A$ является локально R-слабо выпуклым множеством при $R = 1$, но не является R-слабо выпуклым множеством.

Определение 6. *Радиусом кривизны* множества $A \subset H$ в точке $a \in \partial A$ в направлении $p \in N^P(x, A) \cap \partial B_1(0)$ называется

$$\mathfrak{R}_A(a,p) = \liminf_{\substack{(x,v)\to(a,p) \\ x\in\partial A,\ v\in N^P(x,A)\cap\partial B_1(0)}} \sup\left\{r > 0 : A \cap \operatorname{int} B_r\left(x + rv\right) = \emptyset\right\}.$$

Теорема 4. *Замкнутое множество $A \subset H$ является R-слабо выпуклым тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{R}_A(a,p) \geq R \qquad \forall a \in \partial A \qquad \forall p \in N^P(a, A) \cap \partial B_1(0).$$

Будем говорить, что множества $A, C \subset H$ *отделимы сферой радиуса* $\rho > 0$, если существует точка $x \in H$ такая, что $A \cap \operatorname{int} B_\rho(x) = \emptyset$ и $C \subset B_\rho(x)$.

Рассмотрим *задачу поиска ближайших точек* для множеств $A, C \subset H$, состоящую в отыскании точек $a \in A$ и $c \in C$ таких, что $\|a - c\| = \varrho(A, C) := \inf\limits_{x\in A,\ y\in C} \|x - y\|$. Эта задача называется *корректной по Тихонову*, если любые последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{c_k\} \subset C$ такие, что $\|a_k - c_k\| \to \varrho(A, C)$, сходятся.

Теорема 5. *Пусть множество $C \subset H$ является r-сильно выпуклым,* $\operatorname{int} C \neq \emptyset$*, а множество $A \subset H$ замкнуто и R-слабо замкнуто, причем $R > r$ и $A \cap \operatorname{int} C = \emptyset$. Тогда*

1) множества A и C можно отделить сферой любого радиуса $\rho \in [r, R]$;

2) если дополнительно $\varrho(A, C) < R - r$, то задача поиска ближайших точек для множеств A и C корректна по Тихонову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Решетняк Ю. Г.* Об одном обобщении выпуклых поверхностей // Матем. сб. 1956. Т. 40. С. 381–398.

2. *Стечкин С. Б., Ефимов Н. В.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.

3. *Michael E.* Paraconvex sets // Math. Scand. 1959. Vol. 7. P. 372–376.

4. *Federer H.* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 93. P. 418–491.

5. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. 1983. Vol. 8. P. 231–259.

6. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal smoothness and lower–C^2 propoerty // J. Convex Anal. 1995. Vol. 2. P. 117–144.

7. *Poliquin R. A., Rockafellar R. T.* Prox-regular functions in variational analysis // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348. P. 1805–1838.

8. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. 2006. Vol. 13. P. 525–559.

9. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces: various regularity and other properties // Trans. Amer. Math. Soc. 2011. Vol. 363. P. 2211–2247.

10. *Половинкин Е. С.* Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187, № 2. С. 103–130.

11. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с.

12. *Goncharov V. V., Ivanov G. E.* Strong and Weak Convexity of Closed Sets in a Hilbert Space // In: Operations research, engineering, and cyber security. Vol. 113 of the series Springer optimization and its applications. P. 259–297.

13. *Balashov M. V., Golubev M. O.* About the Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 394. P. 545–551.

14. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения М. : Физматлит, 2006. 352 с.

15. *Ivanov G. E.* Weak convexity of sets and functions in a Banach space // J. Convex Anal. 2015. Vol. 22. P. 365–398.

16. *Balashov M. V.* Proximal smoothness of a set with the Lipschitz metric projection // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 406. P. 360–363.

17. *Balashov M. V.* About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set // J. Convex Anal. 2017. Vol. 24. P. 493–500.

18. *Ivanov G. E., Lopushanski M.S.* Well-posedness of approximation and optimization problems for weakly convex sets and functions // J. Math. Sciences 2015. Vol. 209. P. 66–87.

19. *Ivanov G. E., Lopushanski M.S.* Separation theorems for nonconvex sets in spaces with non-symmetric seminorm // Math. Ineq. and Appl. 2017. Vol. 20, № 3. P. 737–754.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
IgnatievMU@info.sgu.ru

Обозначим через J^α оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля:

$$J^\alpha f(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt,$$

через D^α, $\alpha = n - \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ — соответствующий оператор дробного дифференцирования:

$$D^\alpha f = \frac{d^n}{dx^n} J^\varepsilon f(x).$$

Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ – спектр краевой задачи:

$$\begin{cases} Ly = \lambda y, \\ D^{\alpha-\nu} y(0) = 0, \ \nu = \overline{2, [\alpha]+1}, \\ D^{\alpha-1} y(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где L — интегро-дифференциальный оператор вида:

$$L = D^\alpha + MD^{\alpha-1}, \ Mf(x) = \int\limits_0^x M(x-t)f(t)dt,$$

$\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. *По заданному спектру* $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ *найти* $M(x), x \in (0,1)$.

Основной результат настоящей работы содержит следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $M, \tilde{M} \in L_2(0,1)$ *таковы, что* $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2 \ldots$ *Тогда* $M(x) = \tilde{M}(x)$ *п.в. Таким образом, задание спектра краевой задачи (1) однозначно определяет оператор* L.

Доказательство теоремы носит конструктивный характер, процедура восстановления функции $M(x)$ сводится к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения второго рода.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

Для целых α аналогичные результаты были получены ранее в [1], сверточные возмущения оператора Штурма – Лиувилля исследовались в работах [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buterin S.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results Math. 2007. Vol. 50, № 3–4. P. 173–181.

2. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.

2. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма – Лиувилля по спектру // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

УДК 517.98

СИСТЕМЫ РИССА – ФИШЕРА В НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. И. Исмайлов (Баку, Азербайджан)

miqdadismailov1@rambler.ru

Пусть X — несепарабельное банахово пространство, I — некоторое несчетное множество индексов, I^a — множество не более чем счетных подмножеств I. Рассмотрим минимальную систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset X$ с биортогональной системой $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I} \subset X^*$. Пусть K — несепарабельное банахово пространство систем $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ скаляров таких, что $\{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} \in I^a$. Пространство K назовем CB-пространством, если система $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset K$, $\delta_\alpha = \{\delta_{\alpha\beta}\}_{\beta\in I}$ является несчетным безусловным базисом в K, т.е. $\forall\ \lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in K$ имеет место

$$\lambda = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha \delta_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\alpha_i} \delta_{\alpha_i},$$

где $\{\lambda_{\alpha_i}\}_{i\in N}$ — произвольная перестоновка элементов $\lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$. K называется монотонным, если из $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in K$ следует, что $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I'} \in K$, $\forall\ I' \subset I$ и $\left\|\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I'}\right\|_K \leq \left\|\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\right\|_K$.

Определение 1. Пару $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}$ назовем *K-бесселевым*, если выполняется условие: $\forall\, x \in X$ $\{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I} \in K$. В случае, когда система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ полна в X и пара $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}$ — K-бесселева в X, то систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем *K-бесселевой в X.*

Пару $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}$ назовем *K-гильбертовым в X*, если выполняется условие: $\forall\ \lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I} \in K$ $\exists\ x \in X$: $\lambda = \{x_\alpha^*(x)\}_{\alpha\in I}$. В случае, когда система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ полна в X и пара $\{x_\alpha; x_\alpha^*\}$ — K-гильбертова в X, то систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем *K-гильбертовой в X*.

Систему $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем *системой K-Рисса – Фишера в X*, если она является K-бесселевой и K-гильбертовой в X одновременно.

Получены следующие критерии для систем K-Рисса – Фишера.

Теорема 1. *Пусть K-монотонное CB-пространство с несчетным безусловным каноническим базисом $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset K$, биортогональные системы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ полны. Для того, чтобы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была системой K-Рисса-Фишера, необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченно обратимый оператор $T\in L(X,K)$, что $Tx_\alpha=\delta_\alpha, \forall\ \alpha\in I$.*

Следствие 1. *Пусть K-монотонное CB-пространство с несчетным безусловным каноническим базисом $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset K$, биортогональные системы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ полны. Для того, чтобы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была системой K-Рисса-Фишера, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные $M>0$ и $m>0$, что для любого конечного набора $\{\lambda_\alpha\}$ имеет место*

$$m\left\|\{\lambda_\alpha\}\right\|_K\le\left\|\sum_\alpha\lambda_\alpha x_\alpha\right\|_X\le M\left\|\{\lambda_\alpha\}\right\|_K.$$

Пусть пространство X имеет несчетный безусловный базис $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ с пространством последовательностей коэффициентов K_φ. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть биортогональные системы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ полны. Тогда для того, чтобы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ была системой K_φ-Рисса-Фишера, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A_\lambda: K_\varphi\to K_\varphi$ определенный выражением $A_\lambda(\lambda)=\left\{\sum_{\alpha\in I}x_\beta^*(\varphi_\alpha)\lambda_\alpha\right\}_{\beta\in I}$, $\lambda=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}\in$ $\in K_\varphi$ был ограниченно обратим в K_φ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Ученые записки МГУ. 1951. Т. 4, вып. 148. С. 69–107.

2. *Билалов Б. Т., Гусейнов З. Г.* K-бесселевы и K-гильбертовы системы. K-базисы // Докл. РАН. 2009. Т. 429, № 3. С. 298–300.

УДК 517.575

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА НА СФЕРЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. В. Карачик (Челябинск, Россия)

karachik@susu.ru

Хорошо известно, что для гармонической в единичном шаре $S\subset\mathbb{R}^n$ функции $u\in C^m(\bar S)$ верно равенство

$$\int_{\partial S}\frac{\partial^m u}{\partial\nu^m}\,ds_x=0,$$

где $m \in \mathbb{N}$ (см., например, [1]). В настоящей работе выясняется какие еще равенства такого вида могут иметь место для нормальных производных от k-гармонических в S функций $u(x)$, т.е. таких функций, что $\Delta^k u = 0$ в S. В работе [2] исследовано свойство среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование.

Пусть полиномы $P_n(t)$ находятся из рекуррентного равенства

$$P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) = t^2 P_{n-2}(t), \quad n \geq 2,$$

где следует считать, что $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$.

Нетрудно вычислить, что $P_2(t) = -t + t^2$ и $P_3(t) = 3t - 3t^2 + t^3$.

Теорема 1. *Для всякой m-гармонической в S функции $u \in C^k(\bar{S})$ при $k \geq m$ верны равенства*

$$\int_{\partial S} P_{m-i}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\frac{\partial^{2i} u}{\partial \nu^{2i}}\, ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\, ds_x = 0,$$

где $0 \leq i \leq m-1$ и $2m \leq j \leq k$ при $2m \leq k$.

В работе [3] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения был получен арифметический треугольник, похожий на арифметический треугольник, который составляют коэффициенты полиномов $P_n(t)$.

Пример 1. Если k-гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_{\partial S} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, k,$$

т.е. $u(x)$ – решение однородной задачи Неймана для полигармонического уравнения в S, то для функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$ необходимо выполнение условия (это условие также было найдено в [4])

$$\int_{\partial S} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+k} \binom{2k-j-1}{j-1} (2k-2j-1)!!\, \varphi_j(x)\, ds_x = 0.$$

Пример 2. Пусть бигармоническая в S функция $u \in C^3(\bar{S})$ удовлетворяет на единичной сфере ∂S равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_1(s) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3}|_{\partial S} = \varphi_2(s).$$

В этом случае в результате вычислений получаем условие

$$\int_{\partial S} \varphi_2(s)\, ds_x = 0.$$

Других тождеств определяемых из теоремы для бигармонических функций, кроме указанного выше нет. Заметим, что это необходимое условие существования решения задачи типа Неймана было получено в [5]. Оно является также и достаточным условием существования такой бигармонической функции.

Другие тождества для нормальных производных полигармонических функций получены в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карачик В. В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Матем. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 69–88.

2. *Karachik V. V.* On the mean-value property for polyharmonic functions // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2013. Т. 6, № 3. С. 59–66.

3. *Карачик В. В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 228–238.

4. *Карачик В. В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. XVI, № 4(56). С. 61–74.

5. *Карачик В. В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Матем. тр. 2016. № 2. С. 86–108.

6. *Карачик В. В.* Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 533–551.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ СПЕЦИАЛЬНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

А. В. Карев (Москва, Россия)
alexander.karev.30@mail.com

Недавно проведено подробное исследование [1, 2] специальной обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве E с областью определения $D(A) \subset E$. Элемент $g \in E$ неизвестен. Для одновременного нахождения функции $u(t)$ и элемента g возьмем условия

$$u(0) = u_0, \qquad \frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)\,dt = u_1. \tag{2}$$

Элементы $u_0, u_1 \in D(A)$ считаем заданными. Решением задачи (1), (2) назовем пару $(u(t), g)$, где $u\colon [0,T] \to E$, $g \in E$. Предполагаем, что $u \in C^1([0,T]; E)$, причем $u(t) \in D(A)$ при любом $t \in [0,T]$.

Обратная задача (1), (2) является частным примером к общей теории, разработанной в [3, 4]. По схеме, развитой в [4], свойство корректности обратной задачи (1), (2) должно выражаться в терминах характеристической функции

$$L_T(\lambda) \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}\,ds \;=\; \frac{e^{\lambda T} - 1 - \lambda T}{\lambda^2\,T}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Как выяснилось, справедлив следующий критерий единственности решения обратной задачи (1), (2), действующий без каких-либо дополнительных предположений об операторе A, кроме линейности и замкнутости (см. [1, 2]).

Теорема 1. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E. Для того чтобы обратная задача* (1), (2) *при любом выборе элементов $u_0, u_1 \in D(A)$ имела не более одного решения $(u(t), g)$ необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции $L_T(\lambda)$ из формулы* (3) *не являлся собственным значением оператора A.*

Для последующих применений теоремы 1 было изучено распределение нулей функции (3) на комплексной плоскости (см. [1, 2]). В частности доказано, что нули лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 2/T$ и не принадлежат полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant 7\pi/(3T)$.

Возникает вопрос о различных примерах операторов A, имеющих ту или иную конфигурацию спектра на комплексной плоскости. Интересные примеры, в частности, встречаются в теории эллиптических операторов с нелокальными условиями по пространственным переменным (см. [5]). Следуя [6], рассмотрим простой одномерный оператор $A = d^2/dx^2$ в пространстве $L_2[0,2]$ с областью определения

$$D(A) = \bigl\{u \in H^2[0,2]: \quad u(0) = b_1 u(1), \quad u(2) = b_2 u(1)\bigr\}\,, \tag{4}$$

где b_1, b_2 — вещественные параметры.

Спектр оператора A зависит от величины $b = (b_1 + b_2)/2$. Так, при любом $b \in \mathbb{R}$ оператор A имеет серию вещественных собственных значений

$$z_{1,k} = -(\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

при $-1 \leqslant b < 1$ имеется еще одна вещественная серия

$$z_{2,k}^{(\pm)} = -\left(\pm \arccos b + 2\pi k\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

при $b \geqslant 1$ появляется комплексная серия

$$z_{3,k}^{(\pm)} = \ln^2\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right) - (2\pi k)^2 \pm 4k\pi i \ln\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и при $b < -1$ появляется комплексная серия

$$z_{4,k}^{(\pm)} = \ln^2\left(-b + \sqrt{b^2 - 1}\right) - (2k+1)^2\pi^2 \pm (4k+2)\pi i \ln\left(-b + \sqrt{b^2 - 1}\right),$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, а i — мнимая единица.

Обратим внимание, что в зависимости от параметра b спектр оператора A может быть как вещественным, так и отчасти комплексным. Возможны также комплексные собственные значения, выходящие в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > 0$, где встречаются нули характеристической функции $L_T(\lambda)$.

Используя изложенные соображения, рассмотрим обратную задачу

$$u_t = u_{xx} + g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$u(0, t) = b_1 u(1, t), \quad u(2, t) = b_2 u(1, t), \tag{6}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \frac{1}{T}\int_0^T u(x, t)\, dt = u_1(x), \tag{7}$$

с заданными функциями $u_0(x)$, $u_1(x)$ и неизвестными $u(x, t)$, $g(x)$. Справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$-2 \operatorname{ch} \pi \leqslant b_1 + b_2 \leqslant 2 \operatorname{ch} 2\pi. \tag{8}$$

Тогда при любом выборе функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ *из множества* (4) *обратная задача* (5)–(7) *имеет не более одного решения* $\left(u(x, t), g(x)\right)$.

Как видим, условие (8) является несимметричным. Отдельно показано, что при его нарушении можно подобрать счетное множество значений $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, при которых единственность решения в обратной задаче (5)–(7) будет отсутствовать.

Автор благодарит научного руководителя профессора И. В. Тихонова за постановку и обсуждение задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карев А. В., Тихонов И. В.* О распределении нулей одной целой функции типа Миттаг–Леффлера, важной для теории обратных задач // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2017 : материалы науч. конф., 10–14 апреля 2017. С. 122–128.

2. *Карев А. В., Тихонов И. В.* Распределение нулей одной целой функции типа Миттаг–Леффлера с приложениями в теории обратных задач // Челяб. физ.-матем. журн. 2017. Т. 2, вып. 4. С. 430–446.

3. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 167–188.

4. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113.

5. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. матем. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

6. *Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р.* Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений // Соврем. матем. Фундам. направл. 2016. Т. 62. С. 140–151.

УДК 517.518.22

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОСТОЯННЫМИ И УСЛОВИЯ КОМПАКТНОСТИ В L^p, $p > 0$

И. Н. Катковская, В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)

inkatkovskaya@bntu.by, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ. Будем обозначать открытый шар и сферу с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ соответственно как

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad C(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}.$$

Если $p > 0$ и функция $f \in L^p(X)$, то для любого шара $B \subset X$ существует такое число $I_B^{(p)} f \in \mathbb{R}$, что

$$\inf_{I \in \mathbb{R}} \int\limits_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y) = \int\limits_B |f(y) - I_B^{(p)} f|^p \, d\mu(y).$$

При $p > 1$ такое число $I_B^{(p)} f$ единственно. Если же $0 < p \le 1$, то постоянная наилучшего приближения $I_B^{(p)} f$ может определяться неоднозначно. Легко убедиться в том, множество таких чисел ограничено и замкнуто, поэтому определены следующие величины:

$$\mathbb{I}_B^{(p)} f = \inf I_B^{(p)} f, \quad \mathbf{I}_B^{(p)} f = \sup I_B^{(p)} f.$$

В следующих двух теоремах рассматриваются их свойства непрерывности.

Теорема 1. *Если $p > 0$, то для любого шара $B \subset X$*

1) функция $f \mapsto \mathbb{I}_B^{(p)} f$, $f \in L^p(B)$, полунепрерывна снизу на $L^p(B)$;

2) функция $f \mapsto \mathbf{I}_B^{(p)} f$, $f \in L^p(B)$, полунепрерывна сверху на $L^p(B)$.

Далее всюду ниже предполагается выполненным условие удвоения: существует такая постоянная $a_\mu \geq 1$, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ r > 0.$$

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $x_0 \in X$, $r > 0$ и*

$$\mu(C(x_0, r)) = 0. \tag{1}$$

Тогда

1) функция

$$x \mapsto \mathbb{I}_{B(x,r)}^{(p)} f, \quad x \in X, \tag{2}$$

полунепрерывна снизу в точке x_0;

2) функция

$$x \mapsto \mathbf{I}_{B(x,r)}^{(p)} f, \quad x \in X,$$

полунепрерывна сверху в точке x_0.

Отметим, что наличие условия (1) в теореме 2 существенно для ее справедливости. Без него утверждение теоремы 2 теряет силу.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие*

$$\mu(C(x, r)) = 0, \quad r > 0,\ x \in X. \tag{3}$$

Пусть еще $p \geq q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество.

Тогда условие

$$\lim_{r \to +0} \sup_{f \in S} \int\limits_X |f(x) - \mathbb{I}_{B(x,r)}^{(q)} f|^p \, d\mu(x) = 0. \tag{4}$$

необходимо и достаточно для полной ограниченности S.

Рассмотрение условий компактности такого рода и было поводом для изучения свойств наилучших приближений $\mathbb{I}_B^{(p)} f$ и $\mathbf{I}_B^{(p)} f$. Благодаря теореме 2 формулировка теоремы 3 корректна, так как функция (2) измерима на X.

Утверждение теоремы 2 является аналогом классического критерия компактности Колмогорова [1] для пространств L^p, $p \geq 1$, на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^n$, в котором на месте наилучших приближений $\mathbb{I}_{B(x,r)}^{(q)} f$ находятся интегральные средние функции f по шару $B(x, r)$

(случай $p = 1$ рассмотрен в работе [2]). Однако интегральные средние можно использовать только при $p \geq 1$. Отметим еще работу [4], в которой также обсуждается критерий Колмогорова.

В случае метрических пространств с мерой в работе [3] указаны весьма широкие условия, при которых справедлив критерий компактности Колмогорова.

Для неограниченных X критерий Колмогорова теряет силу и условие (3) (с интегральными средними на месте $\mathbb{I}^{(q)}_{B(x,r)}f$) уже не является достаточным для полной ограниченности множества S. Это впервые обнаружил Тамаркин [5], который также указал необходимое дополнительное условие для справедливости критерия Колмогорова для L^p, $p > 1$. В случае $p = 1$ аналогичный результат был получен в [2]. Для метрических пространств с мерой этот вопрос изучался в [6].

Аналог теоремы 3 для случая неограниченных пространств X формулируется в следующем утверждении.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (3), $p \geq q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество.*

Тогда S вполне ограничено в том и только том случае, если выполнено (4) и для некоторого $x_0 \in X$

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} |f(x)|^p \, d\mu(x) = 0.$$

Другие условия компактности в пространствах L^p при $p > 0$ имеются в [7], где также подробно изложениа история вопроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A. N.* Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1931. Vol. 9, iss. 1. P. 60–63.

2. *Tulajkov A.* Zur Kompaktheit im Raum L^p für $p = 1$ // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1933. Vol. 39. P. 167–170.

3. *Kałamajska A.* On compactness of embedding for Sobolev spaces defined on metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. Vol. 24, № 1. P. 123–132.

4. *Hanche-Olsen H., Holden H.* The Kolmogorov – Riesz compactness theorem // Expo. Math. 2010. Vol. 28, № 4. P. 385–394.

5. *Tamarkin J. D.* On the compactness of the space L^p // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 38, № 2. P. 79–84.

6. *Gorka P., Macios A.* The Riesz – Kolmogorov theorem on metric spaces // Miskolc Math. Notes. 2014. Vol. 15, № 2. P. 459–465.

7. *Кротов В. Г.* Критерии компактности в пространствах L^p, $p > 0$ // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 7. P. 129–148.

UDC 517.5

THE CAUCHY SINGULAR INTEGRAL ON NON-SMOOTH CURVE

B. A. Kats, S. R. Mironova, A. Yu. Pogodina (Kazan, Russia)
katsboris877@gmail.com, srmironova@yandex.ru,
apogodina@yandex.ru

Let Γ be a simple Jordan curve on the complex plane $\mathbb{C}$. The original definition of the Cauchy singular integral over this curve is

$$\mathcal{S}_\Gamma f(t) := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus\{|\tau-t|\leq\epsilon\}}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}, \quad t\in\Gamma. \tag{1}$$

This integral operator has a lot of applications. In particular, it is of importance for theory of boundary value problems for analytic functions, for aero and hydrodynamics, and for theory of elasticity, see [1–3]. There exists a great body of publications on this subject. Here we restrict our references by the classical monograph [4] and recent survey [5].

It is well known [1–3], that $\mathcal{S}_\Gamma f$ exists if the curve Γ is smooth or piecewise-smooth, and the density f satisfies the Hölder condition with an exponent $\nu\in(0;1]$. We denote the class of all that functions $H_\nu(\Gamma)$.

If $f\in H_\nu(\Gamma)$ and Γ is smooth, then the function $\mathcal{S}_\Gamma f(t)$ is continuous and satisfies the Hölder condition with the same exponent ν for $\nu<1$, and with arbitrarily close to unit exponent for $\nu=1$. But this result is not valid at the corners of a piecewise-smooth curve. For example, if Γ is boundary of a square with counterclockwise circuit and $f\equiv 1$, then the function $\mathcal{S}_\Gamma f$ equals 1 at all points of Γ excluding the vertices, where it is equal to $3/2$.

In this connection there arises another definition of the Cauchy singular integral:

$$\mathcal{S}^*_\Gamma f(t) := f(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}d\tau, \quad t\in\Gamma, \tag{2}$$

where the integral is understood as improper. At the points of smoothness of the curve the functions $\mathcal{S}_\Gamma f(t)$ and $\mathcal{S}^*_\Gamma f(t)$ coincide, but at the corners the second one keeps continuity. For instancee, $\mathcal{S}^*_\Gamma 1(t)=1$ at all points of the boundary of the square, including its vertices.

The formula (2) keeps validity for certain non-smooth rectifiable curves. For instance, the integral (2) converges if $f\in H_\nu(\Gamma)$ for $\nu>0$, and rectifiable curve Γ is AD-regular, i.e. the sum of lengths of its arcs covered by any disc of radius r does not exceed Cr, where positive constant C does not depend on the center of the disk and on r.

There exists one more approach to the definition of the singular integral. Let us consider the jump problem, i.e., the problem on reconstruction of analytic in $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ function $\Phi(z)$ such that it vanishes at the point at infinity, and has at every point $t \in \Gamma$ continuous limit values $\Phi^{\pm}(t)$ from domains $D^{\pm}$ satisfying relation

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = f(t), \tag{3}$$

where f ia a given function defined on Γ. If curve Γ is smooth and $f \in H_{\nu}(\Gamma)$, then a unique solution of this problem (see [1–3]) is the Cauchy type integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \tag{4}$$

and $\Phi^{\pm}(t) = \frac{1}{2}(\pm f(t) + \mathcal{S}_{\Gamma} f(t))$. For piecewise-smooth curves the last formula keeps its validity at the angular points if we replace there $\mathcal{S}_{\Gamma} f(t)$ by $\mathcal{S}^{*}_{\Gamma} f(t)$. A solution of the jump problem is unique for any rectifiable curve. This fact follows from the following Painleve theorem (see [6]): if a function is continuous in domain D and analytic in $D \setminus \Gamma$, where a curve Γ is rectifiable, then this function is analytic in D, too. Therefore, we are able to define an analog of the singular integral for non-smooth rectifiable curve as sum

$$\mathcal{S}^{\Gamma} f(t) = \Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{5}$$

where Φ is a unique solution of the jump problem (3), if it exists.

This definition is expandable on non-rectifiable curves of the following class. Let a curve Γ contain a finite set of points E such that for any its neighborhood $N(E)$ the difference $\Gamma \setminus N(E)$ is the union of a finite number of rectifiable arcs. We call that curve E^{c}-rectifiable. For example, the arc

$$\{z = x + iy : -1 \leq x \leq +1, y = x \sin x^{-p}\}$$

is 0^{c}-rectifiable, but it is not rectifiable for $p \geq 1$. Clearly, the Painleve theorem is valid for E^{c}-rectifiable curves, what enables us to apply the last definition of the Cauchy integral to that curves.

All three definitions lead to the same result at the points of smoothness of the curve. Here we study the singular integral (5) for non-smooth and non-rectifiable curves Γ.

Let us describe our class of curves. Let Γ' and Γ be simple closed curves bounding finite domains D' and D relatively. The set $D' \triangle \overline{D}$ consists of a finite or infinite set of mutually disjoint domains Δ_j, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Each of these domains has signature s_j equaling $+1$ for $\Delta_j \subset D'$, and -1 for $\Delta_j \subset D$. We say that the curve Γ is a perturbation of Γ' of type $A(t_0)$ if
(1) all boundaries γ_j of domains Δ_j are simple piecewise-smooth curves;

(2) the family of domains Δ_j is infinite and has a unique condensation point t_0.

Theorem 1. *Let a t_0^c-rectifiable curve Γ be a perturbation of type $A(t_0)$ of a smooth curve Γ', and $f \in H_\nu(\Gamma)$. Then singular integral $\mathcal{S}^\Gamma f$ exists at all points of the curve including the condensation points t_0 if the series*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \frac{dx\,dy}{\operatorname{dist}^q(x+iy;\Gamma)}, \quad \sum_{j=-1}^{-\infty} \iint\limits_{\Delta_j} \frac{dx\,dy}{\operatorname{dist}^q(x+iy;\Gamma)} \tag{6}$$

converge for certain $q > 2(1-\nu)$.

Note that the integral

$$\iint\limits_{\Delta_j} \frac{dx\,dy}{\operatorname{dist}^q(x+iy;\Gamma)}$$

diverges for $q \geq 1$ if the set $\Gamma \cap \gamma_j$ contains a continuum. Therefore, the assumptions of Theorem imply the inequality $\nu > 1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gakhov F. D.* Boundary value problems. M. : Nauka, 1977.
2. *Muskhelishvili N. I.* Singular integral equations. Groningen : Wolters-Noordhoff Publ., 1967.
3. *Lu Jian-Ke* Boundary value problems for analytic functions. Singapore : World Scientific, 1993.
4. *Stein E. M.* Singular integrals and differential properties of functions. Princeton : Princeton Univ. Press, 1970.
5. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A.* The Cauchy type integral and singular integral operator over closed Jordan curves // Monatshefte fur Mathematik. 2015. Vol. 176, № 1. P. 1–15.
6. *Markushevitch A. I.* Selected chapters of theory of analytic functions. M. : Nauka, 1976.

УДК 517.53

НАИЛУЧШИЕ РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОШИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ МЕР

Е. В. Ковалевская (Гродно, Беларусь),
А. А. Пекарский (Минск, Беларусь)
lenchik.kovalevskaya@gmail.com, pekarskii@gmail.com

Пусть μ — комплексная борелевская мера с компактным носителем, принадлежащим $\mathbb{R}$. Тогда функцию

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t-z} dt, z \in \mathbb{C},$$

называют преобразованием Коши меры μ. Если, дополнительно, мера μ положительна, то $\hat{\mu}$ называют функцией Маркова.

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ и функция f непрерывна на K $(f \in C(K))$. Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество рациональных функций степени не выше n, $n \in \mathbb{N}$. Для $f \in C(K)$ введем наилучшее равномерное приближение посредством множества $\mathcal{R}_n$, т.е.

$$R_n(f, K) = \inf\{\|f - r\|_{C(K)} : r \in \mathcal{R}_n\}.$$

Далее считаем $I = [-1, 1]$ и $\Delta = \{z : |z| \le 1\}$.

В работе [1] было получено обобщение леммы Н.С.Вячеславова (см. [2], лемма 4) для логарифмических и степенно-логарифмических весов. Это позволило нам получить новые результаты о наилучших рациональных приближениях преобразований Коши и, в частности, функций Маркова. Сформулируем некоторые из этих результатов.

Теорема 1. *Пусть комплексная борелевская мера μ с носителем на отрезке $[1, a]$, $1 < a < \infty$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существуют постоянные $c_1 > 0$ и $\beta < -1$ такие, что*

$$\left|\frac{d\mu(t)}{dt}\right| \le c_1 \ln^{\beta} \frac{2a}{t-1}, 1 < t \le a. \tag{1}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$R_n(\hat{\mu}, I) \le c_2 n^{\beta}, \tag{2}$$

$$R_n(\hat{\mu}, \Delta) \le c_3 n^{\beta}. \tag{3}$$

Здесь c_2, c_3 — положительные величины, зависящие лишь от c_1, a и β.

Отметим, что оценки (2) и (3) являются точными в смысле порядка. Именно, если мера μ является положительной и вместе с (1) имеет место обратное неравенство (возможно с другой постоянной $c_1 > 0$), то в (2) и (3) также выполняются обратные неравенства.

Теорема 2. *Пусть комплексная борелевская мера μ с носителем на отрезке $[1, a], 1 < a < \infty$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существуют постоянные $c_4 > 0$, $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\left|\frac{d\mu(t)}{dt}\right| \le c_4 (t-1)^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{2a}{t-1}, 1 < t \le a.$$

Тогда для $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$R_n(\hat{\mu}, I) \le c_5 n^{\frac{\beta}{2}} \exp(-\pi\sqrt{2\alpha n}),$$

$$R_n(\hat{\mu}, \Delta) \le c_6 n^{\frac{\beta}{2}} \exp(-\pi\sqrt{\alpha n}).$$

где c_5, c_6 — положительные величины, зависящие лишь от c_4, α, β.

Теорема 3. *Пусть комплексная борелевская мера μ с носителем на отрезке $[1, a]$, $1 < a < \infty$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$\frac{d\mu(t)}{dt} \asymp (t-1)^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{2a}{t-1}, 1 < t \le a.$$

Тогда для $n \in \mathbb{N}$ выполняются порядковые соотношения

$$R_n(\hat{\mu}, I) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} \exp(-2\pi\sqrt{\alpha n}),$$

$$R_n(\hat{\mu}, \Delta) \asymp n^{\frac{\beta}{2}} \exp(-\pi\sqrt{2\alpha n}).$$

Отметим, что теорема 3 для $\beta = 0$ получена ранее вторым из авторов в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалевская Е. В., Пекарский А. А.* Построение экстремальных произведений Бляшке // Веснік ГрГУ ім. Я. Купалы. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7, сер. 2, № 1. С. 6–14.

2. *Вячеславов Н. С.* О наименьших уклонениях функции $\operatorname{sign} x$ и её первообразных от рациональных функций в метриках L_p, $0 < p < \infty$ // Матем. сб. 1977. Т. 103(145), № 1(5). С. 24–36.

3. *Пекарский А. А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 2. С. 121–132.

УДК 517.518.28

НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ[1]

А. И. Козко (Москва, Россия)

prozerpi@yahoo.co.uk

Несимметричные нормы изучались в работах Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянова [1], А. И. Козко [2, 3], А. -Р. К. Рамазанова, Б. М. Ибрагимовой [4], Бабенко В.Ф. и многих других. Ссылки на литературу см. в работах [5, 6]. В этих работах рассматривались различные вопросы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

теории приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом. Одно из важнейших наблюдений состояло в том, что односторонние приближения являются частным случаем несимметричных приближений со знакочувствительными весами.

В пространстве $L_p[-\pi;\pi]$, $p \in [1;+\infty]$ известно неравенство Минковского $\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,\cdot)\,dx\|_p \le C \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|f(x,\cdot)\|_p\,dx$, здесь $C = 1$.

В работе исследуется аналоги данных неравенств в пространствах с несимметричной нормой и со знакочувствительным весом. Исследован вопрос о том, когда в аналоге неравенства Минковского в пространствах с несимметричной нормой и со знакочувствительным весом константа C также равна единице, как и в классическом случае неравенства Минковского в пространстве $L_p[-\pi;\pi]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долженко Е. ,П., Севастьянов Е. ,А.* Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, вып. 6. С. 59–102.

2. *Козко А. И.* Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, вып. 6. С. 125–142.

3. *Козко А. И.* Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // Матем. сб. 1998. Т. 189, вып. 9. С. 85–106.

4. *Рамазанов А. -Р. К., Ибрагимова Б. М.* Несимметричный интегральный модуль непрерывности и аналог первой теоремы Джексона // Вестн. ДГУ. 2010. вып. 6. С. 51–54.

5. *Козко А. И.* Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 24. С. 135–147.

6. *Козко А. И.* О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 103–132.

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Н. Н. Конечная, Р. Н. Тагирова (Архангельск, Россия)
n.konechnaya@narfu.ru, tagirova rena@mail.ru

Пусть вещественнозначные функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\sigma(x)$, определенные на $I := [1, +\infty)$, такие, что $p(x) \ne 0$ п.в. на I и $p^{-1}(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $\sigma^2(x) \in L^1_{loc}(I)$. Определим матрицы F_1 и F_2 типа Шина–Зеттла равенствами

$$F_1 = \begin{pmatrix} r & p^{-1} \\ q & -r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad F_2 = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ \sigma^2 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Матрица F_1 известным образом порождает квазипроизводные $y^{[0]}_{F_1} := = y$, $y^{[1]}_{F_1} := p(y' - ry)$ и симметрическое в смысле Лагранжа (формально самосопряженное) квазидифференциальное выражение второго порядка $l_{F_1}[y] := -(y^{[1]}_{F_1})' - ry^{[1]}_{F_1} + qy$ при условии, что $y^{[0]}_{F_1}$, $y^{[1]}_{F_1} \in AC_{loc}(I)$.

Матрица F_2 также порождает квазипроизводные $y^{[0]}_{F_2} := y$, $y^{[1]}_{F_2} := = y' - \sigma y$ и симметрическое в смысле Лагранжа квазидифференциальное выражение $l_{F_2}[y] := -(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]}(x) - \sigma^2(x)y(x)$ при условии, что $y^{[0]}_{F_2}, y^{[1]}_{F_2} \in AC_{loc}(I)$.

Определим матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} F_1 & M & O \\ O & F_1 & M \\ O & O & F_1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} F_2 & M & O \\ O & F_2 & M \\ O & O & F_2 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} F_1 & M & O \\ O & F_2 & M \\ O & O & F_1 \end{pmatrix}, \qquad G_4 = \begin{pmatrix} F_2 & M & O \\ O & F_1 & M \\ O & O & F_2 \end{pmatrix},$$

где O – нулевая матрица второго порядка, а M – матрица второго порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1. Легко показать, что матрицы G_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ также являются матрицами типа Шина-Зеттла и, следовательно, порождают квазипроизводные $y^{[0]}_{G_i}$, $y^{[1]}_{G_i}$, $y^{[2]}_{G_i}$, $y^{[3]}_{G_i}$, $y^{[4]}_{G_i}$, $y^{[5]}_{G_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ и симметрические квазидифференциальные выражения шестого порядка

$$\tau_1[y] = l^3_{F_1}[y], \quad \tau_2[y] = l^3_{F_2}[y], \quad \tau_3[y] = l_{F_1}l_{F_2}l_{F_1}[y], \quad \tau_4[y] = l_{F_2}l_{F_1}l_{F_2}[y]$$

соответственно (подробности см. [1]).

Доклад посвящен изучению асимптотического поведения на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений каждого из уравнений

$$\tau_i[y] = \lambda y,$$

где $\lambda \in C$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Полученные асимптотические формулы применяются к решению задачи об индексе дефекта и характере спектра минимального замкнутого симметрического оператора L_0, порожденного выражением $\tau_i[y]$

$(i = 1, 2, 3, 4)$ в пространстве $\mathcal{L}^2(I)$ интегрируемых по Лебегу с квадратом модуля функций на I.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Everitt W. N.* Linear ordinary quasi-differential expressions // Lecture notes for the Fourth International Symposium on Differential equations and Differential Geometry, Beijing, Peoples' Republic of China Department of Mathematics, University of Peking. 1986. P. 1–28.

УДК 517.53

О ПОРЯДКЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ НАИПРОСТЕЙШЕЙ ДРОБИ. СВЯЗЬ С МНОГОЧЛЕНАМИ ЛАГРАНЖА[1]

Е. Н. Кондакова, П. В. Чунаев (Владимир, Россия)

kebox@mail.ru, chunayev@mail.ru

Рассматриваются вопросы, связанные с интерполяцией таблиц $T_n := = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ с простыми узлами x_k посредством наипростейших дробей (н.д.) порядка n:

$$R_n(x) = Q_n'(x)/Q_n(x), \qquad Q_n(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_0. \tag{1}$$

В [1] изучены вопросы разрешимости задачи интерполяции с унитарным многочленом Q_n, т.е. $q_n = 1$, $\deg Q_n = n$, обоснованы способы построения н.д. порядка n вида (1).

Пусть порядок Q_n не фиксирован. Рассмотрим однородную систему $\mathcal{S}$ вида $\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = 0$, где

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} y_1 & y_1x_1 - 1 & \ldots & y_1x_1^{n-1} - (n-1)x_1^{n-2} & y_1x_1^n - nx_1^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_n & y_nx_n - 1 & \ldots & y_nx_n^{n-1} - (n-1)x_n^{n-2} & y_nx_n^n - nx_n^{n-1} \\ y & yx - 1 & \ldots & yx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} & yx^n - nx^{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} q_0 & \ldots & q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}^T.$$

Если $\det \mathbf{A} \neq 0$, то система $\mathcal{S}$ имеет единственное тривиальное решение $\mathbf{q} = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Если $\det \mathbf{A} = 0$, т.е. $\mathbf{A}$ — сингулярная, то рассматриваемая система имеет бесконечно много решений. Возникает задача нахождения решения $Q = Q_m$, имеющего наименьшую степень.

Пусть $\mathbf{B}$ — подматрица $\mathbf{A}$ из первых n строк и $r := \operatorname{rank} \mathbf{B}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00252 мол_а).

Теорема 1. *Минимальный порядок m интерполяционной н.д. не превосходит r.*

Приведем пример. Пусть $T_2 := \{(-1,-1);(1,1)\}$. Легко видеть, что $r=1$ и система $\mathcal{S}$ имеет два линейно независимых решения $\mathbf{q}=(0,1,0)$ и $\mathbf{q}=(1,0,1)$ (их можно домножать на константы и складывать), т.е. $Q(z)=z$ и $Q(z)=z^2+1$, соответственно. При этом $m=r=1$.

Интересно рассмотреть связь разрешимости системы $\mathcal{S}$ и степени многочлена Лагранжа P_l степени $l\le n-1$, интерполирующего таблицу T_n. Можно показать, что при этом

$$r=n-l.$$

Отсюда и из теоремы 1 получается

Теорема 2. *Минимальный порядок m интерполяционной н.д. не превосходит $n-l$.*

Рассмотрим таблицу T_2 из предыдущего примера. Она интерполируется многочленом $P_1(x)=x$, и потому, согласно теореме 2, $m\le 1$. Это вполне согласуется с тем, что $m=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данченко В. И., Кондакова Е. Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 49–58.

УДК 517.984

ОБ ОБОБЩЕННОМ ФОРМАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ПО МЕТОДУ ФУРЬЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)

kornevvv@info.sgu.ru, khromovap@info.sgu.ru

1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t)+f(x,t),\ x\in[0,1],\ t\in[0,T], \qquad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u'_t(x,0)=\psi(x), \qquad (2)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad (3)$$

где $q(x)\in L[0,1]$, $\varphi(x)\in L[0,1]$, $\psi(x)\in L[0,1]$, $f(x,t)\in L(Q_T)$, $Q_T = [0,1]\times[0,T]$.

В [1] на основе резольвентного подхода была изучена сходимость формального решения метода Фурье для задачи (1)–(3) в случае $q(x)\in L[0,1]$, $\psi(x)\equiv 0$ и $f(x,t)\in L_2(Q_T)$. Теперь мы изучаем случай

$f(x,t) \in L(Q_T)$ и $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение по методу Фурье берем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right]d\lambda, \tag{4}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ — спектральыйй параметр, E — единичный оператор, $R_\lambda f$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x,$\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, γ_n — образ окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho|\ |\rho - n\pi| = \delta\}$ в λ-плоскости, $\delta > 0$ и достаточно мало, r и n_0 выбраны так, чтобы при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится только одно собственное значение оператора L. При любых $x,t \in Q_T$ формальный ряд (4) предста́вим в виде:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{5}$$

где $u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\varphi)\cos\rho t\,d\lambda$.

Ряд $u_0(x,t)$ есть $\frac{1}{2}(\Sigma_+ + \Sigma_-)$, где $\Sigma_\pm$ — тригонометрический ряд Фурье функции $\tilde{\varphi}(x)$ в точке $x \pm t$ ($\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ на всю ось), R_λ^0 — резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) = 0$.

Лемма. *Ряд $u_1(x,t)$ сходится при любых $x,t \in Q_T$ и его сумма непрерывна по x и t.*

Назовем ряд

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + u_1(x,t) \tag{6}$$

обобщенным формальным решением по методу Фурье. Таким образом, (6) есть (5), где ряд $u_0(x,t)$ заменяется на его сумму (схожее обобщенное формальное решение вводилось в [2]).

Теперь $\tilde{u}(x,t)$ уже есть почти везде конечная функция для произвольных суммируемых $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$. Обозначим через $u_h(x,t)$ классическое решение задачи (1)–(3) при следующих условиях: $\varphi_h(x)$, $\varphi_h'(x)$, $\psi_h(x)$ — абсолютно непрерывные, $L\varphi_h \in L_p[0,1]$ и $\psi_h'(x) \in L_p[0,1]$, $p > 1$, $\varphi_h(0) = \varphi_h(1) = \psi_h(0) = \psi_h(1) = 0$, $f_h(x,t)$ и $f_{h,t}'(x,t)$ непрерывны в Q_T,

$f_h(0,t) = f_h(1,t) = 0$ (по поводу существования таких классических решений см., например, [1, 3]).

Теорема 1. *Если* $\lim \|\varphi_h(x) - \varphi(x)\|_{L[0,1]} = 0$, $\lim \|\psi_h(x) - \psi(x)\|_{L[0,1]} = 0$, $\lim \|f_h(x,t) - f(x,t)\|_{L(Q_T)} = 0$ *при* $h \to 0$, *то* $\lim \|u_h(x,t) - \tilde{u}(x,t)\|_{L(Q_T)} = 0$.

Таким образом, обобщенное формальное решение есть обобщенное решение задачи (1)–(3) в указанном в теореме смысле.

2. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \ x \in [0,1], \ t \in [0,T], \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{9}$$

Считаем, что $q(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначная.

Обозначим через $\tilde{f}(x)$ ($\tilde{f}(x,t)$) 2-периодическую и нечетную по x функцию, причем $\tilde{f}(x) = f(x)$ ($\tilde{f}(x,t) = f(x,t)$) при $x \in [0,1]$.

Введем ряд

$$A(x,t) = a_0(x,t) + a_1(x,t) + a_2(x,t) + \cdots ,$$

где $a_0(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t))$, $a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta$ $(n \geq 1)$, $f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t)$.

Теорема 2. *Если* $u(x,t)$ — *классическое решение задачи* (7)–(9) *и* $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L(Q_T)$, *то имеет место формула*

$$u(x,t) = A(x,t),$$

где ряд $A(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно по* $x,t \in Q_T$ *при любом* $T > 0$.

Ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно также и при $\varphi(x) \in L[0,1]$ и представляет собой обобщенное решение задачи (7)–(9).

Аналогичные результаты имеют место и для двух других случаев задачи (1)–(3) при $q(x) \in L[0,1]$: когда $\varphi(x) = 0$, $f(x,t) = 0$ и когда $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ (при условии $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L(Q_T)$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 5. С. 505–507.

2. *Хромов А. П.* Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Современные методы теории краевых задач «Понтрягинские чтения XXVII». Воронеж, 2016. С. 277–281.

3. *Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравннеия с суммируемым потенциалом и с ненулевой начальной скоростью // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 668–670.

УДК 517.984, 517.958

О РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ И НУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
kornevvv@info.sgu.ru, khromovap@info.sgu.ru

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где почти при всех x функция $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t и

$$f(x,t),\ f'_t(x,t) \in L(Q_T), \quad Q_T = [0,1] \times [0,T]. \tag{4}$$

Формальное решение задачи (1)–(3) возьмем в виде (см. [1])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left[\int\limits_0^t (R_\lambda f)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\right]d\lambda. \tag{5}$$

Продолжим $f(x,t)$ нечетным образом с периодом 2 на все $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если $f(x,t) \in L(Q_T)$, то при любых $x,t \in Q_T$ ряд* (5) *сходится к функции*

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\eta,\tau)\,d\eta.$$

Теорема 2. *При выплнении условий* (4) *функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям:*

– $v(x,t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и t в Q_T;

– *функции* $v'_x(x,t)$ *и* $v'_t(x,t)$ *абсолютно непрерывны по* x *и* t *соответсвенно;*

– $v(x,t)$ *удовлетворяет условиям* (2)–(3);

– $v(x,t)$ *удовлетворяет уравненияю* (1) *почти всюду, т. е.* $v(x,t)$ *является решением задачи* (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Об обобщенном формальном решении по методу Фурье смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимней шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов, 2018. С. 156–159.

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА СТОРОНАХ КВАДРАТА, ВПИСАННОГО В ЕДИНИЧНЫЙ КВАДРАТ

О. А. Королева (Саратов, Россия)
korolevaoart@yandex.ru

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A\,(x,t)\ f(t)\,dt.$$

Обозначим:

$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t)$, $\quad (i = 1,...,5)$ непрерывны в своих областях, ($k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1$). $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t)$, $\quad (i = 1,...,5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем

$$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a,$$

$$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b,$$

$$A_5(x,-\frac{1}{2}+x+0)-A_3(x,-\frac{1}{2}+x-0)=c,$$
$$A_5(x,\frac{3}{2}-x-0)-A_4(x,\frac{3}{2}-x+0)=d,$$

где a, b, c, d — постоянные.

То есть ядро $A\,(x,t)$ имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Для этого оператора доказывается аналог теоремы Жордана – Дирихле:

Теорема. *Если $f(x)\in\bar{\Delta}_A$, где $\bar{\Delta}_A$ – замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x)\in V[0,1]$, то*

$$\|f(x)-S_r\,(f,x)\|_\infty\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королева О. А.* Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 6–13.

УДК 517.52

ОСОБЫЕ ТОЧКИ СУММЫ РЯДА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

О. А. Кривошеева (Уфа, Россия)
kriolesya2006@yandex.ru

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,m_k\}_{k=1}^\infty$ — кратная последовательность, где λ_k — комплексные числа, которые пронумерованы по неубыванию модулей, $|\lambda_k|\to\infty$, и m_k — натуральные числа. В работе рассматриваются ряды экспоненциальных мономов, построенные по последовательности Λ, т.е. ряды вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n}z^n\exp(\lambda_k z). \tag{1}$$

Изучается задача распределения особых точек суммы этого ряда на границе области его сходимости.

Пусть $d=\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ — последовательность комплексных чисел. Через $g_d(z)$ и $D(\Lambda,d)$ обозначим соответственно сумму этого ряда и открытое ядро множества всех точек $z\in\mathbb{C}$, в которых он сходится. В общем случае множество $D(\Lambda,d)$ может быть невыпуклым (см. [1]) и не является даже связным (см. [2]). Если же выполнены условия

$$m(\Lambda)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{m_k}{|\lambda_k|}=0,\qquad \sigma(\Lambda)=\overline{\lim_{j\to\infty}}\,\frac{\ln j}{\xi_j}=0,$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно m_k раз, то по теореме Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов (см. [2]) $D(\Lambda, d)$ будет выпуклой областью (возможно пустой), которая описывается при помощи коэффициентов $\{d_{k,n}\}$. Более того, при этих же условиях по теореме Абеля [2] для подобных рядов в области $D(\Lambda, d)$ ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. В частности это означает, что его сумма $g_d(z)$ есть аналитическая функция в $D(\Lambda, d)$.

Символом $\mathfrak{U}(\Lambda)$ будем обозначать множество всех последовательностей коэффициентов $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ ряда (1), для которых множество $D(\Lambda, d)$ не пусто, а функция $g_d(z)$ — аналитическая в $D(\Lambda, d)$. Пусть $d \in \mathfrak{U}(\Lambda)$. Будем говорить, что точка $z \in \partial D(\Lambda, d)$ особая для функции $g_d(z)$, если она аналитически не продолжается ни в какую окрестность этой точки.

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть правильной, если она является частью правильно распределенной последовательности при порядке один. Это равносильно тому, что (см., [3],[4]) Λ является частью нулевого множества (с учетом кратностей m_k) целой функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста. Пусть Λ — правильная последовательность. Через $F(\Lambda)$ обозначим множество всех целых функций экспоненциального типа и вполне регулярного роста, для каждой из которых Λ является частью ее нулевого множества.

Для открытого множества D и выпуклого компакта K символом $\Omega(D, K)$ обозначим совокупность всех точек $z \in \mathbb{C}$ таких, что $K + z$ (сдвиг компакта K) лежит в D. Если D — выпуклая область, то нетрудно видеть, что множество $\Omega(D, K)$ также является выпуклой областью (возможно пустой).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следуя работе [5] введем величину, которая является аналогом индекса конденсации Бернштейна. Рассмотрим функцию

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В случае, когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной точки λ_k, полагаем $q_\Lambda(z, w, \delta) \equiv 1$. Модуль функции $q_\Lambda(z, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ около z. Величина $\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ до z. Если $\delta \in (0, 1)$, то модуль каждого сомножителя из определения q_Λ в круге $B(w, \delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1 - \delta))^{-1}$. Поэтому для $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Положим

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = q_\Lambda(z,\lambda_m,\delta)\left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{-n_m}, \qquad S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{m\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Из определения величины S_Λ следует неравенство $S_\Lambda \leq 0$. Равенство $S_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Примеры вычисления характеристики S_Λ для различных последовательностей можно найти в книге [6].

Теорема. *Пусть Λ — правильная последовательность, $f \in F(\Lambda)$ и K — сопряженная диаграмма функции f. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. Для каждой последовательности $d \in \mathfrak{U}(\Lambda)$ такой, что множество $\Omega(D(\Lambda,d),K)$ не пусто и отлично от плоскости, и любой точки $w \in \partial\Omega(D(\Lambda,d),K)$ функция $g_d(z)$ имеет хотя бы одну особую точку на множестве $(w+K)\cap\partial D(\Lambda,d)$.

2. Имеет место равенство $S_\Lambda = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Братищев А. В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.

2. *Кривошеева О. А.* Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, вып. 3 (21). С. 96–103.

3. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956.

4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976.

5. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, вып. 2. С. 71–136.

6. *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С., Абдулнагимов А. И.* Целые функции экспоненциального типа. Ряды Дирихле. Уфа : РИЦ БашГУ, 2015. 196 с.

УДК 517.986.62

ГРАФЫ В АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ СТУПЕНЧАТОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, Россия)
KrussUS@gmail.com

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей, где лишь конечное число членов с отрицательными номерами имеют ненулевое значение: $(\ldots,\mathbf{0}_{i-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\ldots)$, $\mathbf{x}_i \in GF(p^s)$, $GF(p^s)$ — конечное поле [1]. Нулевой элемент поля $GF(p^s)$ имеет вид $\mathbf{0} = (0_0,0_1,\ldots,0_{s-1})$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Окрестностями нулевого элемента поля $F^{(s)}$ — $0 = (\dots,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\dots)$, являются множества $F_n^{(s)}$ ($F_n^{(s)} \subset F_{n-1}^{(s)}$)

$$F_n^{(s)} = \{a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : \ \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Масштабирующая функция φ удовлетворяет следующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} c_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |c_h|^2 < +\infty, \tag{1}$$

где $c_h \in \mathbb{C}$. Уравнение (1) называется масштабирующим уравнением.

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ множество ступенчатых функций $f \in L_2(F^{(s)})$ таких, что $\operatorname{supp} f \subset F_{-N}^{(s)}$ и f постоянна на множествах вида $F_M^{(s)} \dot{+} g$.

Для функций с компактным носителем, масштабирующее уравнение (1) содержит сумму с конечным числом слагаемых:

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} c_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \tag{2}$$

где $H_0^{(N)} = \{x \in F^{(s)} : x = \mathbf{a}_{-1} g_{-1} \dot{+} \mathbf{a}_{-2} g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{a}_{-N} g_{-N}, \ N \in \mathbb{N}, \ \mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s)\}$.

Уравнение (2) может быть записано в виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m^{(\mathbf{0})}(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}),$$

где $m^{(\mathbf{0})}(\chi) = \sum\limits_{h \in H_0^{(N+1)}} c_h \overline{(\chi \mathcal{A}^{-1}, h)}$ — маска уравнения (2).

В работе [1] был предложен алгоритм построения масштабирующей функции из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-1}^{(s)})$, с дополнительным ограничением: абсолютные значения преобразования Фурье масштабирующей функции это 0 либо 1. В 2016 году в работе [2] данный алгоритм был обобщен для функций из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, кроме того удалось избавиться от ограничения на абсолютные значения преобразования Фурье, которые теперь могут принимать значения из [0,1]. Изложим данный алгоритм.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Выберем простое число p и зафиксируем. Построим N-валидное дерево T.

Шаг 2. По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$. Каждая вершина дерева $\tilde{T}$ представляет собой N-мерный вектор элементов поля $GF(p^s)$: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Строятся эти вершины следующим образом: если в дереве T с вершины $\mathbf{a}_N$ начинался путь из N элементов в направлении к корню $\mathbf{a}_N \to \mathbf{a}_{N-1} \to \cdots \to \mathbf{a}_1$, то в новом дереве $\tilde{T}$ образуем вершину, которая имеет значение равное N-мерному вектору $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Таким образом, корнем дерева $\tilde{T}$ является N-мерный вектор, составленный из нулевых элементов поля $GF(p^s)$ $\mathbf{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$. Вершины 1-го уровня дерева $\tilde{T}$ представляют собой N-мерные векторы, у которых на всех местах, кроме первого, стоят нулевые элементы поля $GF(p^s)$: $(\mathbf{a}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, $\mathbf{a}_i$ - какая-то вершина N-го уровня дерева T. Вершины 2-го уровня дерева $\tilde{T}$ представляют собой N-мерные векторы: $(\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, $\mathbf{a}_{i_2}$ и $\mathbf{a}_{i_1}$ какие-то связанные друг с другом вершины дерева T уровней $N+1$ и N соответственно. Причем в данном примере $\mathbf{a}_{i_1} \neq \mathbf{0}$, а $\mathbf{a}_{i_2}$ уже может быть нулевым элементом поля $GF(p^s)$. Если мы обозначим через H высоту дерева T, а через $\tilde{H}$ высоту дерева $\tilde{T}$, то очевидно $\tilde{H} = H - N + 1$.

Шаг 3. Теперь преобразуем дерево $\tilde{T}$ к графу Γ добавив некоторое количество новых ребер по следующим правилам:

1) достраивать ребра можно только из вершин более высокого уровня к вершинам более низкого уровня,

2) вершину $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ дерева $\tilde{T}$ можно связывать только с вершинами вида $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$, то есть первые $(N-1)$ элементов которых совпадают с последними $(N-1)$ элементами вершины $\mathbf{A}$.

Вершины, с которыми вершина $\mathbf{A}_N$ связана, мы будем обозначать $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$. То есть $\mathbf{a}_0 \in \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина $\mathbf{A}_N$ связана с вершиной $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$ в графе Γ.

Шаг 4. Если вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ в графе Γ связана с вершинами $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2} \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$ то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} |m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\tilde{\mathbf{a}}_0})|^2 = 1 \text{ и}$$

$$m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{a}_0 \notin \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}. \quad (3)$$

Также, определим $m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}) = 1$.

Теорема 3 [2]. *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m^{(\mathbf{0})}(\chi)$ так, как указано в равенствах* (3). *Пусть Пусть $\tilde{H}$– высота дерева $\tilde{T}$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m^{(\mathbf{0})}(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}({F_M^{(s)}}^{\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, порождающую кратномасштабный анализ, причем M не превышает $\tilde{H} - N$.

Рассмотрим теперь задачу построения графа по заданной функции. Аналогичная задача для групп Виленкина изложена в работе [3]. Пусть функция $\varphi(x)$ - масштабирующая функция из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$. По преобразованию Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ функции $\varphi(x)$ построим граф по алгоритму 2.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Рассмотрим ненулевые значения функции $\hat{\varphi}$.

$\hat{\varphi}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}\dots\mathbf{r}_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})\cdot m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N+1}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+2}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_0}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_1})\dots m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{M-1}})\cdot m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp})$.

Шаг 2. Так как мы выбрали ненулевое значение $\hat{\varphi}$, то каждый сомножитель отличен от нуля. Для каждого такого $m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}\mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_j}\mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{j+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{j+N-1}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_{j+N}})$ строим в нашем графе ребро $(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_{j+N-1})$ - $(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2}, \dots, \mathbf{a}_{j+N})$

Теорема 4. *Множество графов, построенных по алгоритму 1, совпадает с множеством графов, построенных по алгоритму 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukomskii S., Vodolazov A.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, iss. 2. P. 1415—1440.

2. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic // Turk. J. Math. 2017. Vol. 41, № 2. P. 244–253.

3. *Бердников Г. С.* Связь между необходимым и достаточным условиями масштабирующей функции на группах Виленкина // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2016. С. 111–112.

УДК 517.53/.55

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А. Ф. Кужаев (Уфа, Россия)

arsenkuz@outlook.com

Будем говорить, что некоторая система функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна в области $D \subseteq \mathbb{C}$, если он полна в пространстве функций, аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D. В 1955 г. А. Ф. Леонтьевым была опубликована работа [1], в которой были сформулированы достаточные условия полноты системы $\{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1,l=0}^{\infty,n_k-1}$ в криволинейной полосе т. е. в области вида

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid f(x) < y < f(x) + 2\pi a\},$$

$a > 0$, $f(x)$ — непрерывная на всей вещественной оси функция. Здесь λ_k — положительные числа, образующие строго возрастающую неограниченную последовательность, а n_k — натуральные числа (их будем называть кратностями точек λ_k). Достаточные условия были сформулированны в терминах условий на кратную последовательность $\{\lambda_k, n_k\}$ и число a. Независимо от Леонтьева аналогичные условия были так же получены Б. Я. Левиным (см., например, [2, с. 286]). Обобщению данного результата Леонтьева – Левина посвящена работа [3]. Основываясь на этой работе, можно получить необходимые условия для полноты указанной выше системы экспонент в выпуклых областях, удовлетворяющим определённым условиям.

Обозначим $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^l e^{\lambda_k z}\}_{k=1, l=0}^{\infty, n_k - 1}$. Величины

$$\bar{n}(\Lambda) := \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda_k \leqslant t} n_k, \quad \bar{n}_0(\Lambda) := \lim_{\delta\to 0+} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\delta t} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_k\leqslant t} n_k.$$

называются верхней и максимальной плотностью последовательности Λ соответственно. Согласно [4, § E3, гл. IV] предел по $\delta \to 0+$ всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ — произвольная выпуклая область. Вертикальным диаметром области D назовём величину:

$$d(D) := \sup_{x} \sup_{z_1, z_2 \in D} \Big\{ |y_1 - y_2| : z_1 = x + iy_1, z_2 = x + iy_2, \quad z_1, z_2 \in D, \ x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Иными словами, вертикальный диаметр области D — есть точная верхняя грань длин всех вертикальных отрезков, содержащихся в этой области.

Через $K_D(\varphi)$ обозначим опорную функцию выпуклой области D:

$$K_D(\varphi) = \sup_{z\in D} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}), \quad \varphi \in [-\pi; \pi].$$

Если область D ограничена, то её опорная функций ограничена и непрерывна. В общем же случае она является полунепрерывной снизу.

Непосредственно из определений $d(D)$ и $K_D(\varphi)$ следует, что всегда

$$d(D) \leqslant K_D\left(-\frac{\pi}{2}\right) + K_D\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Если же имеет место знак равенства, то область D будем называть вертикально сбалансированной. Понятие вертикальной сбалансированности фактически представляет интерес лишь для областей, ограниченных в направлениях $\varphi = \pm\pi/2$. Примерами таких областей являются горизонтальная полоса, круг и др. Если же область не является ограниченной в указанных направлениях, то её автоматически полагаем вертикально сбалансированной.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < \infty$. *Если система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в любой выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) > 2\pi\tau$, *и полна в любой вертикально сбалансированной выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) \leqslant 2\pi\tau$, *то необходимо выполнения равенства* $\bar{n}(\Lambda) = \tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев А. Ф.* О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе // Матем. сб. 1955. Т. 36, вып. 3. С. 555–568.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956. 632 с.
3. *Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф.* Об одной теореме Леонтьева–Левина // Уфимск. матем. жур. 2017. Т. 9, вып. 3. С. 89–101.
4. *Koosis P.* The logarithmic integral I. N.Y. : Cambridge Univ. Press, 1997. 625 p.

УДК 517.54

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ОБЛАСТЕЙ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ [1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия)

Kudryavceva_OS@mail.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — класс голоморфных функций, отображающих правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ в себя. Как известно (см. [1]), для каждой $f \in \mathcal{H}$ существует неотрицательный угловой предел $\angle \lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = f'(\infty)$, называемый угловой производной функции f на бесконечности. В том случае, когда эта производная положительна, функция f однолистна в некотором секторе.

Теорема А. (Валирон, [1]) *Пусть* $f \in \mathcal{H}$, *причём* $f'(\infty) > 0$. *Для любого* $k > 0$ *найдётся* $R > 0$ *такое, что* f *однолистна в секторе* $\{z \in \mathbb{H}\colon\ |\operatorname{Im} z| < k\operatorname{Re} z,\ |z| > R\}$.

Заметим, что значение R зависит не только от величины угла сектора, но и от функции f. Разумеется, выбрать единое значение R на всем классе H не представляется возможным, сколь бы малое k мы не брали.

Целью данной работы является выделение областей однолистности на подклассах класса $\mathcal{H}$, состоящих из функций, удовлетворяющих дополнительным условиям.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00042 мол_а).

Пусть $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{H}\colon f(1) = 1,\ \angle \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\}$. Известно, что при таких условиях $f'(\infty) \in [0,1]$.

Обозначим $\mathcal{B}(c) = \{f \in \mathcal{B}\colon f'(\infty) = c\}$.

Наибольший интерес представляет случай, когда $c \in (1/2, 1)$. Как показано в [2], в этом случае можно выделить единую область однолистности на всем классе $\mathcal{B}(c)$, содержащую сектор, включающий неподвижную точку $z = 1$.

Теорема B. (Горяйнов, [2]) *Пусть $f \in \mathcal{B}(c)$, $1/2 < c < 1$. Тогда f однолистна в области*

$$G(c) = \left\{ z \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{1-c} - \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{2c-1} > \frac{1}{c} \right\}.$$

Показано также, что на классе таких областей (границей которых является ветвь гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$) установленный результат неулучшаем.

Для каждой $f \in \mathcal{B}(c)$ обозначим через S_f область однолистности функции f, содержащую луч $\{z \in \mathbb{H}\colon \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \geqslant 1\}$. Через $S(c)$ обозначим пересечение областей S_f по всем $f \in \mathcal{B}(c)$. Результат теоремы B можно интерпретировать следующим образом: при $c \in (1/2, 1)$ область $S(c)$ непустая, причем $G(c) \subset S(c)$.

Нами получены двусторонние оценки области $S(c)$, усиливающие результат теоремы B.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{B}(c)$, $1/2 < c < 1$. Тогда f однолистна в области*

$$\underline{S}(c) = \left\{ z \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{1-c} - \frac{3\,(\operatorname{Im} z)^2}{4c-1} > \frac{1}{c} \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $c \in (1/2, 1)$. Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{S}(c) = \left\{ z \in \mathbb{H}\colon \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{1-c} - (\operatorname{Im} z)^2 > \frac{1}{c} \right\}$$

найдётся функция $f \in \mathcal{B}(c)$, производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Из теорем 1 и 2 следует двусторонняя оценка $\underline{S}(c) \subset S(c) \subset \overline{S}(c)$. Заметим, что различие между областями $\underline{S}(c)$ и $\overline{S}(c)$ невелико. В то же время область $\underline{S}(c)$ существенно больше области $G(c)$, особенно при c близких к $1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М. : ГИТТЛ, 1957. 235 с.

2. *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

УДК 517.518.2

НЕПРЕРЫВНЫЕ СУММЫ РИДЖ-ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ

А. А. Кулешов (Москва, Россия)
kuleshov.a.a@yandex.ru

Пусть $n \geq 2$, $E \subset \mathbb{R}^n$ - некоторое множество. Ридж-функцией на E будем называть функцию вида $\varphi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ и φ– действительнозначная функция, определенная на $\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$. На множестве E рассмотрим сумму ридж-функций

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}). \tag{1}$$

Всюду мы будем предполагать, что векторы $\mathbf{a}^i$ попарно неколлинеарны. Обозначим $\Delta_i = \Delta(\mathbf{a}^i)$. Замкнутое выпуклое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, для которого $int(E) \neq \emptyset$, называется выпуклым телом.

Функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть аддитивной, если она удовлетворяет функциональному уравнению Коши: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Под аддитивной функцией $\varphi : J \to \mathbb{R}$, определенной на некотором подмножестве $J \subset \mathbf{R}$, будем понимать сужение некоторой аддитивной на $\mathbb{R}$ функции на множество J.

Пусть каждому интервалу $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, поставлен в соответствие некоторый класс $B_{(\alpha,\beta)}$ определенных на (α, β) действительных функций так, что выполнены следующие три условия:
1) Из того, что $f \in B_{(\alpha,\beta)}$, $r \in C(\alpha, \beta)$, а функция $f - r$ является аддитивной на (α, β), следует, что $f(x) - r(x) = cx$, где $x \in (\alpha, \beta), c \in \mathbb{R}$.
2) $\forall h \in \mathbb{R}, |h| < \beta - \alpha : f \in B_{(\alpha,\beta)} \Rightarrow \Delta_h f \in B_J$, где $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x), J = (\alpha, \beta) \cap (\alpha - h, \beta - h)$.
3) $\forall (c, d) \subset (\alpha, \beta) : f \in B_{(\alpha,\beta)} \Rightarrow f \in B_{(c,d)}$.
Известно, что любая аддитивная на интервале функция, являющаяся также локально ограниченной или измеримой по Лебегу, линейна. Поэтому вышеприведенные условия будут выполнены, в частности, если в качестве $B_{(\alpha,\beta)}$ брать объединение множества локально ограниченных на (α, β) функций и множества измеримых по Лебегу на (α, β) функций.

Для функции f, интегрируемой на множестве E конечной меры, определим её среднее на E значение

$$f_E := \frac{1}{|E|}\int\limits_E f(x)dx.$$

Определение 1. Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$. Будем говорить, что *локально интегрируемая функция* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *принадлежит классу* $VMO[a,b]$, если выполнено равенство

$$\lim_{d-c\to 0}\frac{1}{d-c}\int\limits_{[c,d]}|f(x)-f_{[c,d]}|dx = 0,$$

где предел берется по отрезкам $[c,d]\subset[a,b], -\infty<c<d<+\infty$.

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть E — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, функция f вида (1) непрерывна на E, функции $\varphi_i\in B_{int(\Delta_i)}$ $(i=1,\ldots,m)$, и пусть $[a,b]\subset\subset\Delta_i$, $-\infty<a<b<+\infty$. Тогда $\varphi_i\in VMO[a,b]$.*

Далее для функции $f:E\to\mathbb{R}, E\subset\mathbb{R}^n$ определим её модуль непрерывности в точке $\mathbf{x}^0\in E$

$$\omega(f,\mathbf{x}^0,t) := \sup_{||\mathbf{h}||\le t,\mathbf{x}^0+\mathbf{h}\in E}|f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)|.$$

Отметим, что из непрерывности функции f на E вытекает, что $\omega(f,\mathbf{x}^0,t)$ — непрерывная неубывающая функция на полупрямой $t\ge 0$, подчиненная условию $\omega(f,\mathbf{x}^0,0)=0$.

Теперь сформулируем результат в терминах модуля непрерывности функции f в граничных точках E.

Теорема 2. *Пусть E — выпуклое тело в $\mathbf{R}^n$, функция f вида (1) непрерывна на E, функции $\varphi_i\in B_{int(\Delta_i)}$ $(i=1,\ldots,m)$. Пусть a — граничная точка множества Δ_i и для некоторого $\mathbf{x}^0\in E$ такого, что $\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{x}^0=a$, модуль непрерывности $\omega(t):=\omega(f,\mathbf{x}^0,t)$ удовлетворяет условию Дини*

$$\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty. \tag{2}$$

Тогда существует конечный предел $A:=\lim\limits_{t\to a}\varphi_i(t)$.

При этом найденное условие (2) на модуль непрерывности функции f в точке $\mathbf{x}^0$ в теореме 2 является неулучшаемым, а именно верна следующая

Теорема 3. *Пусть* $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — *непрерывная неубывающая функция, подчиненная условию* $\omega(0) = 0$, *для которой условие* (2) *не выполнено. Пусть* $n = 2$, $E = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_1 \leq x_2 \leq \leq 2x_1\}$. *Тогда найдется непрерывная на* E *функция* f *вида*

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$$

такая, что

$$\omega(f, \mathbf{0}, \delta) = \omega(\delta)$$

при $\delta \geq 0$, *при этом* $\varphi \in C(0, +\infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) = -\infty$.

При выполнении условий теоремы 2 может случиться так, что функция φ_i имеет скачок в точке a. Возникает вопрос: существует ли представление функции f в виде (1), в котором φ_i непрерывна в a? Оказывается, верна следующая

Теорема 4. *Пусть* E– *выпуклое тело в* $\mathbb{R}^n$, *функция* f *вида* (1) *непрерывна на* E, *функции* $\varphi_i \in B_{int(\Delta_i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$. *Пусть для некоторого* $\mathbf{x}^0 \in E$ *и для всех* $i = 1, \ldots, m$ *существуют пределы* $\lim\limits_{t \to a_i} \varphi_i(t) =: b_i$, *где* $a_i := \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}^0$. *Тогда при одновременной замене всех значений* $\varphi_i(a_i)$ *числами* b_i $(i = 1, \ldots, m)$ *значения функции* f *на* E *не изменятся.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *С. В. Конягин, А. А. Кулешов.* О непрерывности конечных сумм ридж-функций // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 2. С. 308-309.

2. *С. В. Конягин, А. А. Кулешов.* О некоторых свойствах конечных сумм ридж-функций, определенных на выпуклых подмножествах $\mathbb{R}^n$ //Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 193 - 200.

3. *А. А. Кулешов.* О некоторых свойствах гладких сумм ридж-функций //Тр. МИАН. 2016. Т. 294. С. 99 - 104.

4. *А. А. Кулешов.* Непрерывные суммы ридж-функций на выпуклом теле и класс VMO // Матем. заметки., 2017, т. 102, вып. 6, стр. 851-858.

УДК 517.4

КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ЛАКУНАРНОСТИ В ЗПЛ ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов (Владимир, Россия)
levizov@rambler.ru

Рассматривается система функций Уолша – Пэли $\{\varphi_n(x)\}$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ (подробное определение см., например, в [1]); $\{n(k)\}$ — некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов (номеров).

Скажем, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}(2N\log\log N)^{-1/2}\cdot\sum_{k=1}^{N}\varphi_{n(k)}(x)=1 \quad \text{почти всюду.} \tag{1}$$

Известно (см. [2]), что если последовательность $\{n(k)\}$ такова, что

$$n(k+1)\geq n(k)\cdot(1+c\cdot k^{-\alpha}), \quad \text{где} \quad c>0, \quad 0<\alpha<0.5 \tag{2}$$

(начиная с некоторого номера k_0), то для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ соотношение (1) имеет место.

В дальнейшем этот результат обобщался в [3–4]. Показатель α в неравенстве (2) регулирует «густоту» последовательности $\{n(k)\}$, определяя в ней размеры лакун — «пробелов». Существенным при этом является неравенство $\alpha<0.5$ (см. [2]). Следующее утверждение показывает, что этот «рубеж» нельзя ослабить.

Теорема. *Существует последовательность* $\{n(k)\}$ *такая, что*

$$n(k+1)\geq n(k)\cdot(1+k^{-1/2}),$$

но соотношение (1) *при этом для подсистемы* $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ *не выполняется.*

Отметим, что аналогичный результат верен для центральной предельной теоремы (ЦПТ) — см. [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Сер. матем., матем. анализ. ВИНИТИ. 1971. С. 147–202.

2. *Foldes A.* Further Statistical properties of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1972. Vol. 7. P. 147–153.

3. *Takahasi S.* A statistical property of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1975. Vol. 10. P. 93–98.

4. *Левизов С.В.* ЗПЛ для лакунарных рядов по системе Уолша // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 3, № 1. С. 69–77.

5. *Foldes A.* Central limit theorems for weakly lacunary Walsh series // Stud.Sci.Math.Hung. 1975. Vol. 10. P. 147–153.

6. *Левизов С.В.* О ЦПТ для системы Уолша // Матем. заметки. 1984. Т. 36 (3). С. 435–445.

УДК 517.984

МЕТОД ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
khromovap@info.sgu.ru

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x)$, $\psi(x)$ — комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L_2[0,1]$, α_i, β_i $(i = 1, 2)$ — комплексные числа.

В [1] для $q(x) \in C[0,1]$ было получено классическое решение задачи (1)–(3) для $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ и обобщенное решение, когда $\psi(x) \in \in L_2[0,1]$. Здесь подобные результаты приведем в случае $q(x) \in L_2[0,1]$, а также и для $\psi(x) \in L[0,1]$.

1. Считаем сначала, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Ряд формального решения представим в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)(R^\circ_\lambda \psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)(R_\lambda\psi_1 - R^\circ_\lambda \psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}, \quad Ly = -y'' + q(x)y,$$

$$y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0;$$

$$R^\circ_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}, \quad L_0 y = -y'', \quad y'(0) = y'(1) = 0,$$

E — единичный оператор, λ — спектральный параметр, γ_n — образ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$) окружности $\{\rho \big| |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ достаточно мало), содержащий внутри себя лишь одно собственное значение оператора L, которые являются простыми при $n \geq n_0$, $r > 0$ фиксировано и таково, что контур $|\lambda| = r$ содержит все собственные значения оператора L, не попавшие в γ_n при $n \geq n_0$, $\psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi(x)$, $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (D_L — область определения оператора L), $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$, μ_0 — фиксированное число, расположенное вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geq n_0$.

Лемма 1. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{\psi}(x)$ — четная 2-периодическая функция, $\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in$ $\in [0,1]$.

Из леммы 1 получается

Лемма 2. *Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(2) при $q(x) = 0$ и $\psi_1(x)$ вместо $\psi(x)$ с граничными условиями $u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$, когда уравнение (1) выполняется почти всюду (п.в.).*

Лемма 3. *Ряды $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием до второго порядка по t и до первого порядка по x сходятся абсолютно и равномерно в $Q_T = [0,1] \times [-T,T]$ при любом $T > 0$.*

Лемма 4. *Функции $u'_{1x}(x,t)$ и $u'_{2x}(x,t)$ абсолютно непрерывны по x в Q_T.*

На основании этих результатов получаем

Теорема 1. *Если $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, то сумма ряда $u(x,t)$ формального решения задачи (1)–(3) непрерывно дифференцируема по x и t и удовлетворяет условиям (2), (3); $u'_x(x,t)$ $\quad (u'_t(x,t))$ абсолютно непрерывна по x (по t) и п.в. удовлетворяется уравнение (1), т.е. $u(x,t)$ является классическим решением, когда уравнение (1) выполняется п.в.*

2. $\psi(x) \in L_2[0,1]$. Формальное решение берем в виде $u(x,t) =$ $= u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ и $u_1(x,t)$ — те же, что и в п. 1, но с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$.

Лемма 5. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его* *суммы имеет место формула*

$$u_0(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x)$ *— нечетная 2-периодическая функция,*

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x [\psi(\tau) - (\psi,1)]d\tau$$

при $x \in [0,1]$.

Лемма 6. *Функция* $u_0(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x, t *и удовлетворяет условию* $u_0(x,0) = 0$; *п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_{0t}(x,0)$ *и п.в.на* $(-\infty,\infty)$ *существуют* $u'_{0x}(0,t)$, $u'_{0x}(1,t)$, *причем* $u'_{0t}(x,0) = \psi(x)$, $u'_{0x}(0,t) = u'_{0x}(1,t) = 0$.

Лемма 7. *Ряд* $u_1(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и* t *один раз, сходятся абсолютно и равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$.

На основании лемм 6, 7 и теоремы равносходимости для операторов L и L_0 получим

Лемма 8. *Сумма ряда* $u(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x,t *и* $u(x,0) = 0$; *п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_t(x,0)$ *и п.в. на* $(-\infty,\infty)$ *существуют* $u'_x(0,t)$, $u'_x(1,t)$; *п.в. выполняются условия* (3) *и* $u'_t(x,0) = \psi(x)$. *Кроме того,* $\max\limits_{Q_T} |u(x,t)| \leq C \parallel \psi \parallel_2$, *где* C_T *зависит только от* T *и* $\|\cdot\|_2$ *— норма в* $L_2[0,1]$.

Пусть $\psi_h(x)$ — та же, что и $\psi(x)$ в теореме 1. Решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 1, обозначим $u_h(x,t)$.

Теорема 2. *Если* $\psi(x) \in L_2[0,1]$, *то сумма ряда* $u(x,t)$ *формального решения задачи* (1)–(3) *удовлетворяет условию* $u(x,0) = 0$ *и п.в. на* $(-\infty,\infty)$ *условиям* (3)*;* $u(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t, *п.в. на* $[0,1]$ *существует* $u'_t(x,0)$ *и* $u'_t(x,0) = \psi(x)$. *Более того, если* $\parallel \psi_h - \psi \parallel_2 \to 0$ *при* $h \to 0$, *то* $u_h(x,t)$ *сходится к* $u(x,t)$ *равномерно в* Q_T *при любом* $T > 0$, *т.е.* $u(x,t)$ *есть обобщенное решение задачи* (1)–(3).

3. $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение берем таким же, что и в п. 2.

Лемма 9. *Ряд $u_0(x,t)$ сходится всюду, а ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T и справедливы оценки*

$$\| u_0(x,t) \|_{L_2(Q_T)} \leq C_T \| \psi \|_1, \quad \max_{Q_T} |u_1(x,t)| \leq C_T \| \psi \|_1,$$

где C_T зависит только от T, $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Теорема 3. *Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения задачи* (1)–(3) *сходится всюду по x и t и $u(x,0) = 0$. Если $\psi_h(x)$ — та же, что и $\psi(x)$ в теореме 1 и $\| \psi_h - \psi \|_1 \to 0$, при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи* (1)–(3) *для такой $\psi_h(x)$ сходится к $u(x,t)$ в $L_2(Q_T)$ при любом $T > 0$, т.е. $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи* (1)–(3) *для $\psi(x) \in L[0,1]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Свойства формального решения смешанной задачи для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. Воронеж. весен. матем. шк. «Понтрягинские чтения – XXVII» (3–9 мая 2016 г.) Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2016. С. 170–173.

УДК 534.1

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, И. В. Корпен, С. Н. Косинова (Сызрань, Россия)
vladlitvinov@rambler.ru

При решении задач о колебаниях механических объектов с движущимися границами возникает необходимость в решении следующего функционального уравнения [1, 2]:

$$\varphi\big(\tau + l(\tau)\big) - \varphi\big(\tau - l(\tau)\big) = 1, \tag{1}$$

где τ — безразмерное время, $l(\tau)$ — закон движения границы. Задача состоит в нахождении $\varphi(z)$ при различных значениях $l(\tau)$. В общем случае методика нахождения точного решения уравнения (1) неизвестна. Для решения используется обратный метод, т.е. по заданной функции $\varphi(z)$ находится $l(\tau)$. Например, для функции

$$\varphi(z) = \frac{\ln\big[(vz+1)/(1-v)\big]}{\ln\big[(1+v)/(1-v)\big]} - 1 \tag{2}$$

закон движения границы имеет вид $l(\tau) = 1 + v\tau$, где v — скорость движения границы.

В настоящей работе получено точное решение уравнения (1) в частном случае, при неподвижной левой границе. Так же получено приближенное решение уравнения (1) в случае равномерного движения границы с помощью метода наименьших квадратов. Произведена оценка погрешности приближенного метода.

Пусть движение системы описывается волновым уравнением:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{3}$$

при граничных условиях первого рода

$$\begin{aligned} &U\big(\ell_1(\tau),\tau\big) = F_1(\tau), \quad U\big(\ell_2(\tau),\tau\big) = F_2(\tau),\\ &\ell_1(0) = 0, \quad \ell_2(0) = 1, \quad \ell_2(\tau) > \ell_1(\tau). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь τ, ξ — безразмерное время и безразмерная пространственная координата; $\ell_1(\tau)$, $\ell_2(\tau)$ — законы движения границ; $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ — заданные функции.

Для решения задачи (3), (4) используем представление Даламбера. Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(\xi,\tau) = g(\tau+\xi) + G(\tau-\xi), \tag{5}$$

где $g(z)$ и $G(z)$ — произвольные функции, которые необходимо определить из граничных условий, z — произвольная независимая переменная.

Подставляя решение (5) в граничные условия (4), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g\big(\tau+\ell_1(\tau)\big) + G\big(\tau-\ell_1(\tau)\big) = F_1(\tau),\\ g\big(\tau+\ell_2(\tau)\big) + G\big(\tau-\ell_2(\tau)\big) = F_2(\tau). \end{cases} \tag{6}$$

В отличие от метода А. И. Весницкого [2], где в дифференциальном уравнении вводятся новые переменные останавливающие границы и оставляющие уравнение инвариантным, для упрощения задачи введем в систему (6) новые функции [3]:

$$g(z) = r(\varphi(z)), \quad G(z) = R(\psi(z)), \tag{7}$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi\big(\tau+\ell_1(\tau)\big) = \psi\big(\tau-\ell_1(\tau)\big),\\ \varphi\big(\tau+\ell_2(\tau)\big) = \psi\big(\tau-\ell_2(\tau)\big) + 1. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что возможность решения задачи (3), (4) зависит от степени сложности граничных условий, а также от того, сможем ли мы решить систему (8). Для решения таких систем в [1–3] использован обратный метод. При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям: $\ell_1(0) = 0$; $\ell_2(0) = 1$; $\psi(-1) = -1$.

Множество полученных законов движения границ разбито на классы. Решения, приведенные в табл. 1, получены впервые и относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и $\varphi(z) = \psi(z)$.

Таблица 1

№	$l_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1.	$\frac{1}{\alpha}\operatorname{arcsh}\left[\frac{0{,}5}{B_1 e^{\alpha\tau} - B_2 e^{-\alpha\tau}}\right]$	$B_1\big(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}\big) + B_2\big(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}\big) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/\big(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\big),\ \alpha > 0$
2.	$\sqrt{(\tau + B)^2(\alpha^2 - 1) + 1 + 2\alpha B + B^2} - \alpha(\tau + B)$	$\frac{Ln\big[(z+B)^2+1+2\alpha B+B^2\big]}{Ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} -$ $- \frac{Ln\big[(B-1)^2+1+2\alpha B+B^2\big]}{Ln[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} - 1$
3.	$\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+4A^2e^{2\alpha\tau}}}{2A}\right) - \tau$	$Ae^{\alpha z} + B,\ \alpha = \ln\frac{1+\sqrt{1+4A^2}}{2A}$

Следующий класс В определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau) = \ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell(\tau); \quad \ell(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением

$$\varphi\big(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1\big) - \psi(z - 1) = 1. \tag{9}$$

Система (8) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (9). Приведем два ранее не известных решения класса В:

1. Для заданных функций $\varphi(z) = B\big(e^{-\alpha z} - 1\big) - C\big(e^{-\alpha} - 1\big) - 1$; $B = C + 1/(e^{-\alpha} - 1)$; $\psi(z) = C\big(e^{\alpha z} - 1\big) - C\big(e^{-\alpha} - 1\big) - 1$ из системы (8) находим следующие законы движения границ:

$$\ell_1(\tau) = \frac{1}{\alpha}\ln\Big[\big(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau}\big)/(B - C)\Big], \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell_1(\tau).$$

2. Для функций $\varphi(z) = (1-\nu)z/2 + (1+v)/2 - 1$, $\psi(z) = (1+\nu)z/2 + (1+v)/2 - 1$ законы движения границ $\ell_1(\tau) = \nu\tau$, $\ell_2(\tau) = 1 + \nu\tau$.

Здесь α, B, C, v — постоянные величины.

Для решений класса C границы движутся симметрично в разные стороны, т.е. $\ell_1(\tau) = -\ell(\tau)$, $\ell_2(\tau) = \ell(\tau)$.

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса C поучаются из решений класса A по следующим формулам:

$$\ell(\tau) = \ell_A(\tau), \quad \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_a(z), \quad \varphi(z) = \psi(z) + 0.5,$$

где индексом обозначены соответствующие функции решений класса A.

Новое решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\begin{gathered}
\ell_1(\tau) = \bigl(B_2 - B_1\bigr)\tau/\bigl(B_2 + B_1\bigr),\\
\ell_2(\tau) = \bigl(B_2 e^{1/c} - B_1\bigr)\tau/\bigl(B_2 e^{1/c} + B_1\bigr) + 1,\\
\varphi(z) = \psi(z) = CLn\bigl(B_1 z + D\bigr) - CLn\bigl(D - B_2\bigr) - 1,\\
D = \bigl(B_1 + B_2 e^{1/c}\bigr)/\bigl(e^{1/c} - 1\bigr).
\end{gathered}$$

Класс обратных решений ограничен, например, не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau^2$. Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона.

Для получения приближенного решения функционального уравнения (1) предлагается использовать метод наименьших квадратов. Функция $\varphi(z)$ находится в виде многочлена степени n:

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n. \tag{10}$$

Параметры p_1, p_2, …, p_n с помощью метода наименьших квадратов находятся таким образом, чтобы функция (10) удовлетворяла уравнению (1) при различных τ_i $(i = \overline{1, m})$.

В целях оценки погрешности метода рассмотрена тестовая задача. Для линейного закона движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau$ при различных значениях v находился многочлен пятой степени

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - 1, \tag{11}$$

удовлетворяющий условию $\varphi(-1) = -1$.

Значения многочлена, полученного по методу наименьших квадратов, сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (2). Сравнение производилось за период времени, пока длина уменьшалась от 1 до 0.3. При меньших длинах многочлен (11) плохо описывает функцию $\varphi(z)$. При стремлении $l(\tau)$ к нулю уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(\tau + 0) - \varphi(\tau - 0) = 1,$$

т.е. функция $\varphi(z)$ в точке τ терпит разрыв.

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ метода наименьших квадратов (разница между функциями (2) и (11)) в зависимости от скорости движения границы v приведены в табл. 2.

Таблица 2

v	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Δ	0.017	0.015	0.013	0.015	0.017	0.039	0.054	0.046	0.140

В интервале $v \in [0.1; 0.6]$ погрешности рассмотренных приближенных методов малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (2) при $v \to 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный приближенный метод для решения функционального уравнения (1) в случаях, когда его точное решение не известно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвинов В. Л., Анисимов В. Н.* Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. Самара : СамГТУ, 2017. 149 с.

2. *Весницкий А. И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М. : Физматлит, 2001. 320 с.

3. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3(28). С. 145–151.

4. *Литвинов В. Л.* Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журн. Средневолжск. матем. о-ва. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.

UDC 517.982.252

PROPERTIES OF WEAKLY CONVEX SETS IN SPACES WITH ASYMMETRIC SEMINORM[1]

M. S. Lopushanski (Dolgoprudny, Russia)
masha.alexandra@gmail.com

Weakly convex sets are often considered in literature under different names – sets with positive reach in $\mathbb{R}^n$ ([1]), proximally smooth sets ([2]), prox-regular sets ([3], [4]). The term "weakly convex sets"was introduced by Vial [5]. The motivation for studying weakly convex sets is that the class of weakly convex sets is much wider than the class of convex sets, but shares many useful properties with the latter. The weakly convex sets may be used, for example, in differential inclusions (see, e.g. [6]), in the gradient projection method ([7]), in differential games ([8]), set valued mappings theory ([9]).

We consider weakly convex sets with respect to (w.r.t.) a quasiball in a Banach space. A quasiball is a convex closed (may be unbounded) set that contains a neighbourhood of zero. Such an approach allows us to apply the methods of proximal analysis to the epigraphs of functions and to obtain the conditions of well-posedness for optimization problems of the infimal convolution type (see [10], [11]).

A quasiball in a Banach space E is a convex closed set $M \subset E$ such that $0 \in \operatorname{int} M$ and $M \neq E$. The Minkowski functional $\mu_M(x) = \inf \big\{t > 0 \big| \ x \in tM\big\}$ of the quasiball is the asymmetric seminorm. The *M-distance* from a set C to a set A is $\varrho_M(C, A) = \inf\limits_{c\in C,\ a\in A} \mu_M(c - a)$. The *$M$-projection* of x onto A is the set $P_M(x, A) = A \bigcap (x - \varrho_M(x, A)M)$. The *Minkowski sum* of sets $A \subset E$ and $B \subset E$ is $A + B = \big\{a + b \ \big| \ a \in A, \ b \in B\big\}$. The *ball* with center a and radius r is $\mathfrak{B}_r(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}$. The set $C \subset E$ is called *strongly convex w.r.t. a quasiball* $M \subset E$ if C is convex, closed and there exists a set $C_1 \subset E$ such that $C + C_1 = M$. A set $A \subset E$ is called *weakly convex* with respect to the quasiball $M \subset E$ if $a \in P_M(a + z, A), \quad \forall a \in A, \quad \forall z \in N^1_M(a, A)$, where $N^1_M(a, A) = \{z \in \partial M \mid \exists t > 0 : \ a \in P_M(a + tz, A)\}$. A set $M \subset E$ is called *parabolic*, if for any vector $b \in E$ the set $\big(b + \frac{1}{2}M\big) \setminus M$ is bounded. A set $M \subset E$ is called *boundedly uniformly convex*, if it is convex and $\lim_{t\to+0} \delta_M(t, R) = 0$ for any $R > 0$, where

$$\delta_M(t, R) = \sup\Big\{\delta \in \big[0, \tfrac{t}{2}\big] \mid \mathfrak{B}_\delta\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \subset M \quad \forall a, b \in M \cap \mathfrak{B}_R(0) : \\ \|a - b\| \geq t\Big\}, \quad t \geq 0.$$

[1]The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 16-01-00259.

The problem $\min_{x\in E} f(x)$ is called *well posed*, if every sequence $\{x_k\} \subset E$ such that $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in E} f(x)$ converges to the solution of this problem.

Theorem 1 [10]. *Let the quasiball M in a Banach space E be parabolic and boundedly uniformly convex. Let the set $A \subset E$ be closed and weakly convex w.r.t. the quasiball M. Let the set $C \subset E$ be strongly convex w.r.t. the quasiball $-rM$, where $0 < r < 1$. Let $0 < \varrho_M(C, A) < 1 - r$. Then the problem* $\min_{a\in A,\ c\in C} \mu_M(c - a)$ *is well posed.*

A set A is called M-quasibounded, if for any point $x \in E \setminus A$ we have $\varrho_M(x, A) > 0$ and for any $R > 0$ the inequality

$$\sup_{a\in\partial A\cap\mathfrak{B}_R(0)} \ \sup_{z\in N^1_M(a,A)} \|z\| < +\infty$$

holds.

Theorem 2 [10]. *Let the quasiball M in a Banach space E be parabolic and boundedly uniformly convex. Let the set $A \subset E$ be M-quasibounded and weakly convex w.r.t. M. Let the set $C \subset E$ be strongly convex w.r.t. the quasiball $-rM$, where $r \in (0, 1)$ and* $\operatorname{int} C \neq \emptyset$. *Let $\varrho_M(C, A) < 1 - r$, $A \bigcap \operatorname{int} C = \emptyset$. Then the problem* $\min_{a\in A,\ c\in C} \mu_M(c - a)$ *is well posed.*

The quasiball $M \subset E$ is called *boundedly uniformly smooth*, if $\lim_{t\to+0} \frac{\beta_M(t,R)}{t} = 0 \quad \forall R > \sigma_M$, where σ_M is such that $\mathfrak{B}_{\sigma_M}(0) \subset M$ and for any $t \geq 0$ and $R > \sigma_M$

$$\beta_M(t, R) = \sup\left\{\frac{\mu_M(x + ty) + \mu_M(x - ty)}{2} - 1 \ :\ x \in \partial M\cap\mathfrak{B}_R,\ y \in \mathfrak{B}_1\right\}.$$

Theorem 3 [12]. *Let E be a Banach space and the quasiball $M \subset E$ be parabolic and boundedly uniformly convex. Let $0 < r < R$, the sets $A, C \subset E$ be closed, A be weakly convex with respect to the set RM, C be strongly convex with respect to the set $(-rM)$, $A + R\operatorname{int} M \neq E$. Let at least one of the following statements hold*

1) $\varrho_M(C, A) > 0$ *or*

2) $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, *$A \cap \operatorname{int} C = \emptyset$ and the quasiball M is boundedly uniformly smooth, the set A is M-quasibounded.*

Then there exist $a, c \in E$ such that $\operatorname{int} C \subset c - \operatorname{int} rM \subset a - \operatorname{int} RM \subset E \setminus A$.

The *Fréchet normal cone* to the set A at $x \in A$ is $N^F(x, A) = \{\xi \in E^* |\ \ \forall\gamma > 0 \ \ \exists\delta > 0 : \langle\xi, a - x\rangle \leq \gamma\, \|a - x\|, \quad \forall a \in \mathfrak{B}_\delta(x) \bigcap A\}$. The *support function* of the set $M \subset E$ is $s(p, M) = \sup\limits_{x\in M}\langle p, x\rangle, \quad p \in E^*$.

Given a functional $p \in E^*$, if $p \in b(M) \setminus \{0\}$ we define $J^*_M(p) = \{x \in E : \langle p, x\rangle = (p, M)\mu_M(x), s(p, M) = \mu_M(x)\}$, otherwise we put $J^*_M(p) = \{0\}$.

The *proximal M-normal cone* to the set A at a point $a \in \partial A$ is $N^P_M(a, A) = \{p \in b(M) | \, \exists z \in J^*_M(p), \, \exists t > 0 : \, a \in P_M(a + tz, A)\}$.

The *Mordukhovich limiting cone* is

$$N^L_M(x, A) = {}^{w^*-seq} \limsup_{y \to x} N^P_M(y, A) =$$
$$= \{{}^{w^*} - \lim_{n\to\infty} x^*_n : \, x^*_n \in N^P_M(x_n, A), x_n \in A, x_n \to x, n \to \infty\},$$

where ${}^{w^*} - \lim$ means the limit with respect to weak* topology.

Theorem 4 [13]. *Let E be a reflexive Banach space. Let the quasiball M be boundedly uniformly smooth, boundedly uniformly convex and parabolic. Let the set $A \subset E$ be M-quasibounded and weakly convex w.r.t. M. Then $N^F(x, A) = N^P_M(x, A) = N^L_M(x, A), \quad \forall x \in A$.*

The results were obtained under the supervision of professor G.E. Ivanov.

REFERENCES

1. *H. Federer* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 93. P. 418–491.

2. *F. H. Clarke , R. J. Stern, P. R. Wolenski* Proximal Smoothness and Lower–C^2 Property // J. Convex Analisys. 1995. Vol. 2, № 1,2. P. 117–144.

3. *R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar* Prox-regular functions in variational analysis // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348. P. 1805–1838.

4. *F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva* Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces // J. Convex Analysis. 2006. Vol. 13. P. 525–559.

5. *J.-P. Vial* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

6. *L. Thibault* Sweeping process with regular and nonregular sets // J. Differential Equations. 2003. Vol. 193. P. 1–26.

7. *M. V. Balashov* About the Gradient Projection Algorithm for a Strongly Convex Function and a Proximally Smooth Set // J. Convex Analysis. 2017. Vol. 24, № 2. P. 493–500.

8. *G. E. Ivanov* Weakly Convex Sets and Their Properties // Mathematical Notes. 2006. Vol. 79, № 1. P. 55–78.

9. *M. V. Balashov, G. E. Ivanov* Properties of the metric projection on weakly Vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images // Mathematical Notes. 2006. Vol. 80, № 3. P. 461–467.

10. *G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski* Well-Posedness of Approximation and Optimization Problems for Weakly Convex Sets and Functions // J. Mathematical Sciences. 2015. Vol. 209, № 1. P. 66–87.

11. *G. E. Ivanov* Continuity and selections of the intersection operator applied to nonconvex sets // J. Convex Analysis. 2015. Vol. 22, № 4. P. 932–962.

12. *G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski* Separation theorems for nonconvex sets in spaces with non-symmetric seminorm // J. Math. Ineq. and Applications. 2017. Vol. 20, № 3. P. 737–754.

13. *M. S. Lopushanski* Normal Regularity of Weakly Convex Sets in Asymmetric Normed Spaces // J. of Convex Analysis. 2018. Vol. 25, № 3. P. n.a.

УДК 519.63+523.68

ЭФФЕКТ КОЛЛИМАЦИИ ПРИ ПОЛЕТЕ ДВУХ ТЕЛ ДРУГ ЗА ДРУГОМ

В. Т. Лукашенко, Ф. А. Максимов (Москва, Россия)
lukashenko-vt@yandex.ru, f_a_maximov@mail.ru

Одним из механизмов разрушения метеорного тела в атмосфере является его распад на отдельные тела меньшего размера — фрагменты или осколки. Данные осколки затем продолжают свое движение как группа тел. При этом часть осколков может оказаться расположена позади лидирующих тел в области пониженного давления. Такие осколки будут иметь меньшее аэродинамическое сопротивление, а значит медленнее тормозиться. В динамике это приводит к эффекту коллимации [1] — отстающие тела начинают вовлекаться в след лидирующих, что в свою очередь может приводить к соударению тел.

В работе [2] представлен метод моделирования на системе сеток, позволяющий расчитывать обтекание различных тел в достаточно произвольных конфигурациях. В [3] представленна адаптация этого метода для решения сопряженной задачи, когда аэродинамическая и баллистическая задачи решаются параллельно. Полагается, что тела двигаются как группа вдоль заданного направления с некоторой преобладающей скоростью. Для этого значения скорости решается задача обтекания тел методом установления. Из полученного распределения давления находятся аэродинамические силы, действующие на каждое отдельное тело в конфигурации, и затем происходит переход к решению баллистической задачи — тела сдвигаются исходя из действующих на них сил и возможного небольшого отклонения их собственных скоростей от скорости преобладающего движения.

Метод [3] оказалось возможно дополнить алгоритмом для моделирования соударений между телами. Если имеются два круговых цилиндра с центрами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и радиусами R_1, R_2, то соударение между ними будет происходит при

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < R_1 + R_2 + C,$$

где константа C определяется исходя из размера сеток [2], построенных для моделирования течения вблизи тел, а также максимального расчетного шага по времени Δt.

Формулы для изменения скоростей вдоль направления соударения тел $\vec{l} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ при этом запишутся так:

$$\Delta V_1 = \frac{(n+1)\, m_2\, (V_2 - V_1)}{m_1 + m_2},$$

$$\Delta V_2 = \frac{(n+1)\, m_1\, (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2},$$

где m_1, m_2 — соответственно масса первого и второго тел; V_1, V_2 — соответствующие проекции скоростей тел на направление $\vec{l}$; параметр n отвечает за сохранение кинетической энергии тела. При $n = 1$ происходит абсолютно упругий удар (кинетическая энергия сохраняется полностью), при $n = 0$ происходит абсолютно неупругий удар без слипания тел (осреднение скоростей тел вдоль направления соударения с потерей кинетической энергии).

С помощью данного подхода была рассмотрена задача о динамике системы из двух одинаковых цилиндрических тел, расположенных друг за другом вдоль линии набегающего потока. Позади расположенное тело будет испытывать меньшее сопротивление, в результате эффекта коллимации оно должно через некоторое время столкнуться с впереди летящем телом. В случае абсолютно упругого удара тела просто обменяются кинетической энергией и отлетят друг от друга. Однако впереди летящее тело будет сильнее тормозиться потоком, а позади летящее тело по-прежнему — слабее, значит через некоторое время тела должны будут вновь столкнуться. В результате должен получиться своеобразный «маятник». В случае же абсолютного неупругого удара тела должны оставаться рядом с друг другом, продолжая полет совместно.

Расчеты подтверждают данное предположение, однако обнаруживается ряд особенностей (рис. 1 и 2). При использовании модели абсолютно упругого удара характер наблюдаемых колебаний будет сильно зависить от начального расстояния между телами (рис. 1). При расстоянии между центрами тел в 8 радиусов наблюдалось последовательное затухание и рост амплитуды разлета тел. Если тела были расположены ближе друг к другу, то амплитуда разлета тел постепенно возрастала, несмотря на общее торможение системы. Если же тела находились значительно дальше друг от друга, то колебания имели тенденцию затухать со временем. При абсолютно неупругом ударе тела в течении длительного времени летели совместно (рис. 2), однако данное расположение тел оказалось крайне неустойчивым. Из-за малых возмущений в расчетах позади летящее тело было со временем снесено в бок по потоку.

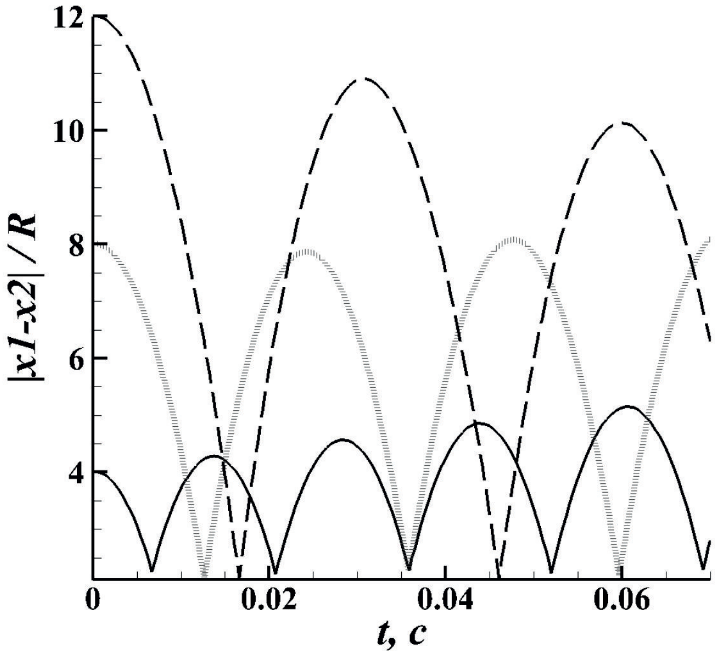


Рис. 1. Динамика тел при абсолютно упругом ударе

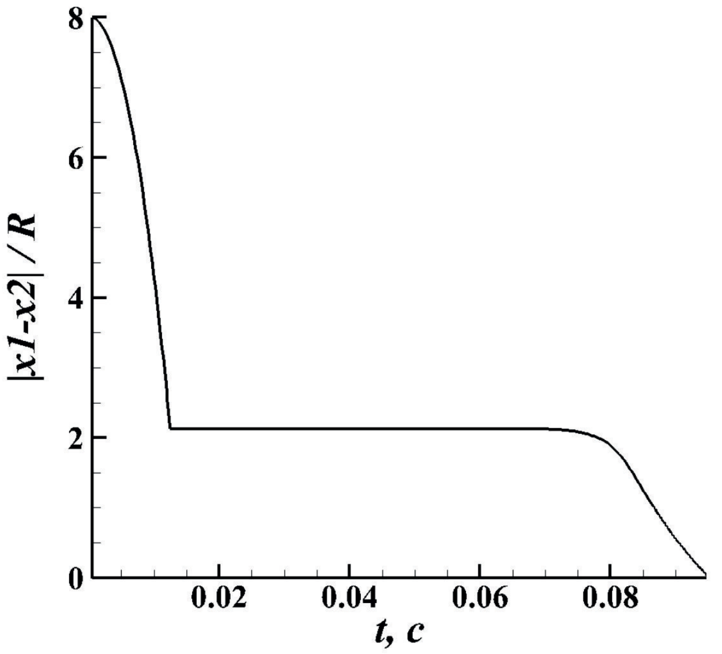


Рис. 2. Динамика тел при абсолютно неупругом ударе

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барри Н. Г.* Аэродинамика фрагментов метеорного тела. Эффект коллимации // Астрономический вестник. 2010. Т. 44, № 1. С. 59–64.

2. *Максимов Ф. А.* Сверхзвуковое обтекание системы тел // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 6. С. 969–980.

3. *Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А.* Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения // Инженерный журнал : наука и инновации. 2017. Вып. 9. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-9-1669.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ[1]

С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ — оператор интегрирования, $W_n(x)$ — функции Уолша в нумерации Пэли. Определим функцию

$$\varphi(x) = (2^2 I)(2^3 I)^2 W_{2^3-1}(x), \quad x \in [0,1]$$

и назовем ее двоичным базисным сплайном 3-й степени. Вне отрезка $[0,1]$ полагаем $\varphi(x) = 0$. Ясно, что $\varphi(x)$ есть многочлен 3-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{2^3}, \frac{k+1}{2^3}\right] \subset [0,1]$ и $\varphi(x)$ имеет непрерывную 2-ю производную. Классический базисный сплайн обычно строится через разделенные разности [1–2]. B-сплайны на равномерной сетке были определены в терминах сверток и подробно изучены Стрембергом, Баттлом и Лемарье в [3–5].

Двоичный интерполяционный сплайн на $\mathbb{R}$

Пусть $f(x)$ кусочно-многочленная функция, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на $(-\infty, +\infty)$, и совпадающая с многочленом 3-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{8}, \frac{k+1}{8}\right], k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Кусочно-многочленная функция f представима в виде ряда*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x+k).$$

Приведем алгоритм построения этого разложения.

Шаг-2. Полагаем $S_{-2}(x) = f''(0) m_{-2} \varphi\left(x + \frac{7}{2^3}\right)$, где m_{-2} выбрано так, чтобы $\left(m_{-2}\varphi\left(x + \frac{7}{2^3}\right)\right)''_{x=0} = 1$.

Шаг-1. Полагаем $S_{-1}(x) = S_{-2}(x) + (f'(0) - S'_{-2}(0)) m_{-1} \varphi\left(x + \frac{6}{2^3}\right)$, где m_{-1} выбрано так, чтобы $\left(m_{-1}\varphi\left(x + \frac{6}{2^3}\right)\right)'_{x=0} = 1$.

Шаг 0. Полагаем $S_0(x) = S_{-1}(x) + (f(0) - S_{-1}(0))\varphi\left(x + \frac{4}{2^3}\right)$.

Шаг k $(k > 0)$. Полагаем

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + \left(f\left(\frac{k}{2^3}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{2^3}\right)\right) m_k \varphi\left(x - \frac{k-1}{2^3}\right), \quad m_k = 2^{-5}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-0152).

В результате получаем функцию, совпадающую с $f(x)$ на $[0,+\infty)$. Аналогичным образом находим остальные члены разложения f в виде ряда.

Двоичный интерполяционный сплайн на отрезке

Рассмотрим вопрос построения сплайна 3-й степени на отрезке $[0,1]$ с помощью двоичных базисных сплайнов. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$. Определим функцию $\psi(x) = \varphi\left(\frac{n}{8}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\operatorname{supp}\psi = \left[0, \frac{8}{\mathrm{n}}\right]$. Используя функции $\psi\left(x - \frac{k}{n}\right)$, построим сплайн 3-й степени дефекта 2, интерполирующий функцию $f(x)$ в точках $x = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Требуемый сплайн строим рекурсивно. Получаем $S_{-2}(x) := m_2 \frac{n^2}{2} \psi\left(x + \frac{7}{n}\right)$, $m_2 \in \mathbb{K}$. Очевидно, $S''_{-2}(0) = m_2$. $S_{-1}(x) := S_{-2}(x) - \frac{2}{n}\psi\left(x + \frac{6}{n}\right)\left(m_1 - S'_{-2}\left(\frac{0}{n}\right)\right)$. Очевидно, что $S'_{-1}(0) = m_1$, $S''_{-1}(0) = m_2$,

$$S_0(x) := S_{-1}(x) + \psi\left(x + \frac{4}{n}\right)\left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right) \Rightarrow S_0(0) = f(0).$$

При $k > 0$ $S_k(x) := S_{k-1}(x) + \frac{\psi\left(x - \frac{k-1}{n}\right)}{\psi\left(\frac{1}{n}\right)}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \Rightarrow S_k\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

После n-го шага получаем интерполяционный сплайн S_n 3-й степени дефекта 2. Он зависит от параметров m_2 и m_1. Приведенный алгоритм не требует решения системы уравнений.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ имеет на $[0,1]$ непрерывную вторую производную. Параметры m_2 и m_1 можно выбрать так, что*

1) $|f''(x) - S''_n(x)| \le 5\omega(h, f'')$;

2) $|f'(x) - S'_n(x)| \le 5h\omega(h, f'')$;

3) $|f(x) - S_n(x)| \le \frac{5}{8}h^2\omega(h, f'')$, $h = \frac{1}{n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алберг Дж., Нильсен Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М. : Мир.1972.

2. *Де Бор С.* Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и Связь, 1985.

3.*Strömberg J.-O.* A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces //Conference in Harmonic Analysis in Honor of A.Zigmund. Chicago, 1981. Vol. 2. P. 475–494.

4.*Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1 : Lemarie functions // Comm. Math. Phys. 1987. Vol.110. P. 601–615.

5.*Lemarie P.-G., Meyer Y.* Ondelettes et bases Hilbertiennes // Rev. Math. Iber. 1987. Vol. 2, № 1/2. P. 1–18.

УДК 517.521

АППРОКСИМАЦИЯ КУСОЧНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Владикавказ, Россия)
rasuldev@gmail.com

Через $W_p^r([a,b])$ обозначим пространство Соболева, состоящее из $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$, а $f^{(r)}(x)\in L^p([a,b])$, где $L^p([a,b])$ — это пространство функций с интегрируемой p-й степенью и нормой $\|f\|_p=(\int_a^b|f(x)|^pdx)^{1/p}$. Символом $\widetilde{W_p^r}([a,b])$ будем обозначать подпространство функций $f(x)\in W_p^r([a,b])$, которые можно периодически продолжить на всю ось с сохранением гладкости. Напомним также, что если для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ выполняется соотношение $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha$, $x,y\in[a,b]$, то говорят, что она удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с показателем α и коэффициентом M, и пишут $f\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$ или $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, если коэффициент M не существенен. Отметим, что множество функций $\mathrm{Lip}\,1$ совпадает со множеством абсолютно непрерывных функций с существенно ограниченной производной, т.е. $\mathrm{Lip}\,1=W_\infty^1$.

Как известно, если функция f принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,1$, то по теореме Джексона и неравенству Лебега имеет место следующая оценка: $|R_n(f,x)|=|S_n(f,x)-f(x)|\le cE_n(f)\ln n\le c\frac{\ln n}{n}$.

А. Н. Колмогоров [1] получил асимптотическую формулу для остатка тригонометрических сумм Фурье функции $f\in\mathrm{Lip}_1\,1$:

$$\sup_{\substack{\|f'\|_\infty\le 1,\\ x\in[0,2\pi]}}|R_n(f,x)|=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n}+O(\frac{1}{n}).$$

Более того, если $f\in\widetilde{W_\infty^r}([0,2\pi])$, $r\ge 1$, то

$$\sup_{\substack{\|f^{(r)}\|_\infty\le 1,\\ x\in[0,2\pi]}}|R_n(f,x)|=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+O(\frac{1}{n^r}).$$

Указанные оценки справедливы, когда функция удовлетворяет определённым условиям гладкости одинаково на всем рассматриваемом отрезке $[0,2\pi]$. Но если у функции имеются в некоторых точках особенности в виде разрыва или отсутствия производной, то приведённые выше оценки

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00486 а).

перестают быть точными (или становятся вовсе не применимыми). Например, у функции $f(x) = |x-\pi|$ отсутствует производная в точке $x = \pi$, поэтому если рассматривать её на всем отрезке, то мы можем утверждать лишь, что $f \in \widetilde{W}^1_\infty([0, 2\pi])$. Следовательно, согласно приведённой выше оценке остаток ряда Фурье данной функции будет стремиться к нулю со скоростью $\ln n/n$. В то же время можно непосредственно показать, что $\sup_{x\in[0,2\pi]} |R_n(f, x)| \le c/n$. Кроме того, если исключить точки, в которых отсутствует производная, скорость сходимости ряда Фурье к функции $f(x) = |x - \pi|$ увеличивается на порядок: $|R_n(f, x)| \le c(x)/n^2$, $x \in (0, 2\pi)\setminus\{\pi\}$. Оказывается, подобная картина наблюдается для целого класса так называемых кусочно гладких функций. Целью данной работы является исследование вопросов, связанных с получением точных оценок скорости приближения кусочно гладких функций частичными суммами тригонометрических рядов Фурье.

Пространство кусочно гладких функций определяется следующим образом. Пусть дано конечное разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ $\Omega = \{0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_s = 2\pi\}$. Символом ${}_\Omega W^r_p$ обозначим пространство 2π-периодических функций, которые на каждом отрезке $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ можно превратить в функции из $W^r_p([\theta_i, \theta_{i+1}])$ путем переопределения их значений на концах рассматриваемого отрезка. Отметим, что пространство ${}_\Omega W^r_p$ содержит и разрывные функции. Например, функция $f(x) = sign \sin x \in {}_\Omega W^r_p$ при $\Omega = \{0, \pi, 2\pi\}$ и любых $r, p \ge 0$. Нас также будут интересовать подпространства пространства ${}_\Omega W^r_p$, состоящие из функций $f(x) \in \widetilde{W}^q_\infty([0, 2\pi])$, таких что $f^{(q)}(x) \in {}_\Omega W^r_p$.

Локальные аппроксимативные свойства тригонометрических сумм Фурье $S_n(f, x)$ и средних Валле Пуссена $V^n_m(f, x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_{n+k}(f, x)$ по ним для функций из пространства ${}_\Omega W^r_p$ исследованы в работах [2, 3]. В них было показано, что суммы Фурье и средние Валле Пуссена вдали от точек разбиения Ω приближают указанные функции со скоростью $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{nm}$ соответственно. Приведённые оценки являются неулучшаемыми по порядку, если рассматривать все пространство ${}_\Omega W^r_p$, которое, как уже отмечалось, содержит и разрывные функции. Возникает вполне естественный вопрос о том, нельзя ли уточнить упомянутые оценки, если сузить рассматриваемое пространство, ограничившись, к примеру, только непрерывными или дифференцируемыми функциями из ${}_\Omega W^r_p$. Основная задача работы заключается в получении оценок скорости приближения суммами Фурье функций $f(x) \in \widetilde{W}^q_\infty([0, 2\pi])$, таких что $f^{(q)}(x) \in {}_\Omega W^r_p$. Кроме того, нам удалось усилить некоторые оценки, полученные в [2, 3] для функций из ${}_\Omega W^r_p$.

Основные результаты приведены в следующих теоремах. В формулировках теорем символом $D = D(\Omega)$ обозначен отрезок $[0, 2\pi]$, из которого исключены точки разбиения Ω: $D = D(\Omega) = \bigcup\limits_{j=1}^{s} (\theta_{j-1}, \theta_j)$.

Теорема 1. *Если $f \in {}_{\Omega}W^1_{\infty}$, то для $x \in D$ имеет место оценка*

$$|R_n(f,x)| \le \frac{4\|f'\|_{\infty}}{\pi^2}\frac{\ln n}{n} + \Big(c\|f'\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\big|f(\theta_j+0) - f(\theta_j-0)\big|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|}\Big)\frac{1}{\pi n}.$$

Теорема 2. *Если $f \in {}_{\Omega}W^2_1$, то для $x \in D$ справедлива оценка*

$$|R_n(f,x)| \le \frac{1}{\pi n}\Big[\sum_{j=1}^{s} \frac{|f(\theta_j+0) - f(\theta_j-0)|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} |f'(\theta_j+0) - f'(\theta_j-0)| + \|f''\|_1\Big].$$

Теорема 3. *Пусть $f \in \widetilde{W}^q_1([0, 2\pi])$, $q \ge 1$. Тогда*
1) если $f^{(q)} \in {}_{\Omega}W^1_{\infty}$, то для $x \in D$

$$|R_n(f,x)| \le \frac{4\|f^{(q+1)}\|_{\infty}}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^{q+1}} +$$

$$+\left(c\|f^{(q+1)}\|_{\infty} + \sum_{j=1}^{s} \frac{|f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|}\right)\frac{1}{\pi n^{q+1}};$$

2) если $f^{(q)} \in {}_{\Omega}W^1_{\infty}$, то

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |R_n(f,x)| \le \frac{1}{\pi q n^q}\sum_{j=1}^{s} |f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)| +$$

$$+\frac{1}{\pi n^{q+1}}\left(\frac{4\|f^{(q+1)}\|_{\infty}}{\pi}\ln n + c\right);$$

3) если $f^{(q)} \in {}_{\Omega}W^1_1$, то для $x \in D$

$$|R_n(f,x)| \le \frac{\|f^{(q+1)}\|_1}{\pi q n^q} + \frac{1}{n^{q+1}}\sum_{j=1}^{s} \frac{|f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)|}{|\sin\frac{\theta_j - x}{2}|};$$

4) если $f^{(q)} \in {}_{\Omega}W^1_1$, то

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |R_n(f,x)| \le \frac{1}{\pi q n^q}\Big(\|f^{(q+1)}\|_1 + \sum_{j=1}^{s} |f^{(q)}(\theta_j+0) - f^{(q)}(\theta_j-0)|\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grossenordnung Des Restgliedes Fourierscher Reihen Differenzierbarer Funktionen // Annals of Mathematics. 1935. Vol. 36, № 2. С. 521–526. URL : http://www.jstor.org/stable/1968585.

2. *Магомед-Касумов М. Г.* Аппроксимативные свойства классических средних Валле – Пуссена для кусочно гладких функций // Вестн. Дагестанск. научн. центра РАН. 2014. Т. 54. С. 5–12.

3. *Магомед-Касумов М. Г.* Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 2. С. 229–247.

УДК 517.518

О ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ДВУМЯ СЕГМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. В. Макаров, С. И. Дудов (Саратов, Россия)

Alexander-Makarov93@yandex.ru, DudovSI@info.sgu.ru

Пусть $F(t) = [f_1(t), f_2(t)], G(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ — сегментные функции, заданные на отрезке $[c, d]$ непрерывными функциями $f_i(t)$ и $g_i(t)$, причём $f_1(t) \le f_2(t)$, $g_1(t) \le g_2(t)$ при $t \in [c, d]$. Обозначим через $P_n(A, t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(t)$ — обобщенный полином по некоторой чебышевской на отрезке $[c, d]$ системе функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=\overline{0,n}}$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

Рассмотрим следующую задачу по равномерному приближению многозначного отображения $\Phi(t) = F(t) \times G(t)$ полиномиальной вектор-функцией $\Pi_n(A_1, A_2, t) = (P_n(A_1, t), P_n(A_2, t))$:

$$\rho(A_1, A_2) \equiv \max_{t\in[c,d]} \{\rho_F(F(t), P_n(A_1, t)) + \rho_G(G(t), P_n(A_2, t))\} \to$$
$$\to \min_{A_1\in R^{n+1}, A_2\in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где

$$\rho_F(F(t), P_n(A_1, t)) = \max\{P_n(A_1, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A_1, t)\},$$
$$\rho_G(G(t), P_n(A_2, t)) = \max\{P_n(A_2, t) - g_1(t), g_2(t) - P_n(A_2, t)\}.$$

Нетрудно видеть, что целевая функция задачи (2) является выпуклой на R^{2n+2}. Поэтому при её исследовании, наряду с методами теории полиномиального приближения функций [1], могут также использоваться методы выпуклого анализа и выпуклого программирования. Ниже укажем на возможный подход к получению решения задачи (1). Для этого введем в рассмотрение ещё две задачи:

$$\rho_1(C) \equiv \max_{t\in[c,d]} \max\{P_n(C, t) - f_1(t) - g_1(t), f_2(t) + g_2(t) - P_n(C, t)\} \to$$

$$\to \min_{C \in R^{n+1}}, \tag{2}$$

$$\rho_2(D) \equiv \max_{t\in[c,d]} \max\{P_n(D,t) - f_1(t) + g_2(t), f_2(t) - g_1(t) - P_n(D,t)\} \quad \to$$

$$\to \min_{D \in R^{n+1}}, \tag{3}$$

где C и D — вектора коэффициентов соответствующих полиномов.

Теорема. *Для того, чтобы пара* $({A_1}^*, {A_2}^*)$ *была точкой минимума функции* $\rho(A_1, A_2)$ *на* R^{2n+2} *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) в случае $\rho_1({A_1}^* + {A_2}^*) > \rho_2({A_1}^* - {A_2}^*)$ *вектор коэффициентов* $C^* = {A_1}^* + {A_2}^*$ *был бы одним из решений задачи* (2)*;*

2) в случае $\rho_1({A_1}^* + {A_2}^*) < \rho_2({A_1}^* - {A_2}^*)$ *вектор коэффициентов* $D^* = {A_1}^* - {A_2}^*$ *был бы одним из решений задачи* (3)*;*

3) в случае $\rho_1({A_1}^* + {A_2}^*) = \rho_2({A_1}^* - {A_2}^*)$ *хотя бы один из векторов* $C^* = {A_1}^* + {A_2}^*$ *и* $D^* = {A_1}^* - {A_2}^*$ *был бы одним из решений задач* (2) *или* (3) *соответственно.*

Таким образом, возможен следующий подход к решению задачи (1). Сначала следует решить вспомогательные задачи (2) и (3). Если C^* и D^* являются точками минимума функций $\rho_1(C)$ и $\rho_2(D)$ соответственно, то, как следует из теоремы, пара $((C^*+D^*)/2, (C^*-D^*)/2)$ является одним из решений задачи (1). Отметим, что задача вида (2), (3) исследовалась в [2] для случая алгебраических полиномов. Кроме того, при замене в поставновке задачи (1) отрезка $[c,d]$ на дискретную сетку $\{t_i\}_{i=\overline{1,m}}$ задача сводится к задаче линейного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977, 395 с.

2. *Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 51, № 7. С. 1175–1183.

УДК 517.53

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, К. А. Алипова (Томск, Россия)

nmd@math.tsu.ru

Объект исследования — негомеоморфные пространственные отображения, заданные на произвольной области $D \subset R^n$, $n \geq 3$, называемые далее отображениями с s-усредненной характеристикой.

Пусть область $D \subset R^n$, $n \geq 3$, отображение $f\colon D \to R^n$ открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,loc}(D)$. Якобиан отображения

$J(x,f) \neq 0$ и сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$), $s > (n-1)^{-1}$.

Определение 1. Отображение f называется *отображением с s-усредненной характеристикой*, если 1) $f \in W^1_{n,loc}(D)$; 2) существует постоянная $K_{O,s} \geq 0$ такая, что выполняется

$$K_{O,s}(f) = \left(\int\limits_D K^s_O(x,f)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{O,s},$$

здесь $K_{O,s}(x,f) = L^n(x,f)|J(x,f)|^{-1}$ — внешняя дилатация отображения f в точке x, $L(x,f) = |f'(x)| = \max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$, $d\sigma_x = dx/(1+|x|^2)^n$ [1, 5].

Пусть далее $G \subset R^n$ открыто и E — непустое множество, содержащееся в G.

Предложение 1. *Для семейства $\Gamma \subset G$ имеет место равенство*

$$M_1(\Gamma) = \inf m_{n-1} S,$$

где $m_{n-1}S$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия $S = \partial U$, являющегося границей ограниченного открытого множества U, содержащего E и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в G, а точная нижняя грань берется по всем таким S. Это утверждение частный случай леммы 6 из [2].

Пусть $D \subset G$ — открытое множество и E — континуум $E \subset D$, Γ — семейство кривых $\gamma \in D$ и соединяющих E с ∂D. Тогда при $n-1 < \beta \leq n$, имеет место оценка снизу

$$M^{n-1}_\beta(\Gamma) \geq c \frac{d(E)^\beta}{|D|^{1-n+\beta}},$$

где $d(E) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{diam}(E)$ — диаметр E, а C — постоянная, зависящая только от n и β.

Доказательство. При доказательстве этого неравенства используем схему доказательства, приведенного в [1] в емкостной технике.

Если $d = 0$, то неравенство очевидно. Не умаляя общности, будем считать, что пара точек множества E, на которой реализуется величина d, лежит на n-ой координатной оси x_n и одна из точек совпадает с началом координат. Для произвольного $0 < t < d$ обозначим через Π_t гиперплоскость $x_n = t$.

В подпространстве $x_n = 0$ рассмотрим единичную $(n-2)$-мерную сферу S^{n-2} с центром в начале координат. Фиксируя произвольную точку $z \in E \cap \Pi_t$, для всякого $y \in S^{n-2}$ через $R(y)$ обозначим верхнюю грань чисел r_0 таких, что $z + ry \in G$ при $0 \leq r < r_0$. Тогда для любой функции $\varphi \in W_0^\infty(E, G)$ выполнено

$$\int\limits_0^{R(y)} |\Delta\varphi(z+ry)|\, dr \geq \varphi(z) - \varphi(z + R(y)y) = 1.$$

Оценивая здесь левую часть по неравенству Гельдера, имеем

$$1 \leq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{\beta-1} [R(y)]^{\beta+1-n} \int\limits_0^{R(y)} |\Delta\varphi(z+ry)|^\beta r^{n-2}\, dr.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} [R(y)]^{n-\beta-1}$ и интегрируя затем по $y \in S^{n-2}$, получим

$$\left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} \int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-\beta-1}\, d\sigma_y \leq$$

$$\leq \int\limits_{S^{n-2}} d\sigma_y \int\limits_0^{R(y)} |\Delta\varphi(z+ry)|^\beta r^{n-2}\, dr \leq \int\limits_{\Pi_t} |\Delta\varphi|^\beta\, d\sigma_z.$$

Для оценки снизу интеграла слева воспользуемся неравенством Гельдера. Обозначим $(n-2)$-мерную меру сферу S^{n-2} через ω_{n-2}, получаем

$$\omega_{n-2}^\beta = \left(\int\limits_{S^{n-2}} d\sigma_y\right)^\beta \left(\int\limits_{S^{n-2}} |\Delta\varphi(z+ry)|^{n-\beta-1}\, d\sigma_y\right)^{n-1} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-1}\, d\sigma_y\right)^{\beta+1-n} \leq$$

$$\leq [(n-1)m_{n-1}(G \cap \Pi_t)]^{\beta+1-n} \left(\int\limits_{S^{n-2}} [R(y)]^{n-\beta-1}\, d\sigma_y\right)^{n-1},$$

где $m_{n-1}P$ означает $(n-1)$-мерную меру Лебега множества P. Подставляя это вышеприведенное неравенство и полагая $f(t) = m_{n\text{-}1}(G \cap \Pi_t)$, будем иметь

$$\int\limits_{\Pi_t} |\Delta\varphi|^\beta \, d\sigma_y \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} (n-1)^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \omega_{n-2}^{\frac{\beta}{n-1}} [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}}.$$

Интегрируя по $t \in (0, d)$, отсюда имеем

$$\int\limits_G |\Delta\varphi|^\beta \, d\sigma_x \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} (n-1)^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \omega_{n-2}^{\frac{\beta}{n-1}} \int\limits_0^d [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \, dt.$$

Чтобы оценить интеграл справа, опять используем неравенство Гельдера

$$d^\beta = \left(\int\limits_0^d dt\right)^\beta \leq \left(\int\limits_0^d f(t)\, dt\right)^{\beta+1-n} \left(\int\limits_0^d [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \, dt\right)^{n-1} \leq$$

$$\leq (mG)^{\beta+1-n} \left(\int\limits_0^d [f(t)]^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \, dt\right)^{n-1}.$$

Окончательно имеем оценку

$$\int\limits_G |\Delta\varphi|^\beta \, d\sigma_x \geq \left(\frac{\beta-1}{\beta+1-n}\right)^{1-\beta} (n-1)^{\frac{n-\beta-1}{n-1}} \omega_{n-2}^{\frac{\beta}{n-1}} \frac{d^{\frac{\beta}{n-1}}}{(mG)^{\frac{\beta+1-n}{n-1}}}.$$

Отсюда, ввиду произвола в выборе функции $\varphi \in W_0^\infty(A)$, нужное нам неравенство вытекает из известных соотношений емкости и модуля [3].

Приведем одно дифференциальное неравенство. Для открытого отображения с s-усредненной характеристикой с каждой точкой $x_0 \in D$ свяжем неотрицательную функцию $\psi(t) = mf(B^n(x_0, t))$, где $B^n(x_0, t) = \{x : |x - x_0| \leq t\}$, $0 < t < \tau(x_0, \partial D)$. Эта функция не убывает и следовательно для п.в. t существует производная $\psi'(t)$. Такими же свойствами обладает, очевидно, и функция $\Phi_s(t) = \Phi_s(B^n(x_0, t))$, где $\Phi_s(t)$ — субаддитивная функция, участвующая в геометрическом определении отображения с s-усредненной характеристикой [1]. Для доказательства нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 1. *Если $f\colon D \to R^n$ — открытое отображение с s-усредненной характеристикой, то в произвольной точке $x_0 \in D$ для* *п.в.* $t \in (0, t_0)$, $t_0 = \tau(x_0, \partial D)$, *справедливо неравенство* $\frac{(\psi(t))^{s(n-1)}}{(\psi'(t))^{s(n-1)-1}} \leq$ $\leq ct^{s(n-1)}\Phi'_s(t)$, *где постоянная* c *зависит только от* n *и от* s.

Лемма 2. *Если* $f\colon D \to R^n$ — *открытое отображение с* s*-усредненной характеристикой, то в произвольной точке* $x_0 \in D$ *при всех* $r < \eta$, *где* $\eta = \min\{1, \tau^2(x_0, \partial D)\}$ *справедливо неравенство* $\inf f(B^n(x_0, r)) \leq K \ln^{-s(n-1)}\left(\frac{1}{r}\right)$, *где* $B^n(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *а постоянная* K *зависит только от* n *и от* s *и величины* $\Phi_s(D)$.

Теорема 1. *Если множество* G *ограничено, то справедливо неравенство* $M_\beta(\Gamma) = \frac{(\inf m_{n-1}S)^\beta}{[m(G\setminus E)]^{\beta-1}}$, *где* $m(G \setminus E)$ *означает* n*-мерную меру Лебега множества* $G \setminus E$.

При $\beta = n$ это неравенство доказано в [5].

Теорема 2. *Если* $f\colon D \to R^n$ — *открытое отображение с* s*-усредненной характеристикой, то для произвольной точки* $x_0 \in D$ *и для почти всех* $r < \eta$, *где* $\eta = \min\{1, \tau^2(x_0, \partial D)\}$ *справедливо неравенство* $mf(B^n(x_0, t)) \leq K \ln^{-s(n-1)}\left(\frac{1}{r}\right)$, *где* $B^n(x_0, r) = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *а постоянная* K *зависит только от* n *и величины* $\Psi_s(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображения с s-усредненной характеристикой // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2014. № 1(27). С. 25–41.
2. *Мазья В. Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы матем. анализа. Л. : Изд-во ЛГУ, 1973. Вып. 3. С. 33–68.
3. *Hesse J.* A p-extrimal length and p-capacity // Arkiv for math. 1975. Vol. 13. № 1. P. 131–144.
4. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publ., 2013. 121 с.
5. *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалы VII Петрозаводской междунар. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17.

УДК 517.53

Lp-НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫСЩИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ[1]

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)

mardvilko@mail.ru

В работе получены верхние и нижние оценки для квазинормы (нормы) для высших производных произведений Бляшке.

[1]Работа выполнена в соответствии с программой ГПНИ «Конвергенция», 2016–2020 годы.

Мы будем работать с пространством Лебега, L_p, $0 < p < \infty$, измеримых комплексных функций на единичной окружности $T = \{z : |z| = 1\}$ с конечной квазинормой (нормой при $1 < p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Пусть $\mathbf{a}_n = a_1, a_2, ..., a_n$ набор из n комплексных чисел, лежащих в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Рассмотрим произведение Бляшке с нулями в точках $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Для краткости мы также введем обозначение

$$\lambda(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

В работе [1] автором была найдена точная постоянная в верхней оценке для s-ой производной произведения Бляшке, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, в пространстве $L_{1/s}$. А именно доказана следующая теорема

Теорема 1. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} = s! \lambda^s(1/s) \cdot n^s.$$

В работе [1] получены также оценки снизу для s-ой производной произведения Бляшке, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, в пространстве $L_{1/s}$. А именно доказана следующая

Теорема 2. *Для* n, $s \in \mathbb{N}$, $n \geq s \geq 2$, *выполняется неравенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} > \frac{\pi^{s-1}(s-1)((s-2)!)^s}{2^{3s-1}(s!+1)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n - (s-1))^s.$$

Здесь нами получены нижние и верхние оценки $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in$ $\in (0, \infty) \setminus \{1/s\}$. Результаты представлены в теоремах 3–7.

Теорема 3. *Для* $n, s \in \mathbb{N}$ *и* $1/s < p < \infty$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 4. *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $0 < p < 1/s$ имеет место неравенство*

$$\sup_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} \leq s!\lambda^s(1/s) \cdot n^s.$$

Теорема 5. *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $0 < p < 1/s$ имеет место равенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Теорема 6. *Для $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq s \geq 2$, и $1/s < p < \infty$ имеет место неравенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} > \frac{\pi^{s-1}(s-1)((s-2)!)^s}{2^{3s-1}(s!+1)^s \cdot s^{s-1}} \cdot (n-(s-1))^s.$$

Для первой производной для инфимума рассматирваемой квазинормы можно выписать точное равенство, а именно

Теорема 7. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $p > 1$ имеет место равенство*

$$\inf_{\mathbf{a}_n} \|b_n'\|_{L_p} = n.$$

Замечание. Неравенста в теоремах 4 и 6 является точным по порядку, т.е. относительно множителя n^s. В этом можно убедиться на примере функции $b_n(z) = z^n$. Постоянная $s!\lambda^s(1/s)$ из теоремы 4 является точной при $s = 1$ и любом $0 < p < 1/s$. Убедиться в этом можно также на примере функции $b_n(z) = z^n$. Для высших производных найденная постоянная не является точной. Для постоянной из теоремы 6 мы не знаем точного значения даже для критического показателя $p = 1/s$, $s \geq 2$, при котором $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$ ведет себя устойчиво относительно полюсов произведения Бляшке и имеет порядок n^s.

Для первой произвойдной произведения Бляшке играют роль экстремальных функций в неравенствах типа Бернштейна для рациональных функций [2–3]. Обобщением неравенств типа Бернштейна для рациональных функций на высшие производные занимался А. А. Пекарский [4]. Упомянутые неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций применяются для доказательства обратных теорем рациональной аппроксимации (см. [3–6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mardvilko T. S.* On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions // East journal on approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 31–42.

2. *Русак В. Н.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического многочлена // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7, № 9. С. 580–583.

3. *Долженко И. А.* Некоторые точные интегральные оценки производных рациональных и алгебраических функций. Приложения // Analysis Math. 1978. Т. 4, № 4. С. 247–268.

4. *Пекарский А. А.* Оценки высших производных рациональных функций и их приложения // Изв. АН БССР. Сер. физ-матем. н. 1980. № 5. С. 21–29.

5. *Lorenz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin : Springer-Verlag, 1996.

6. *Petrushev P. P., Popov V. A.* Rational approximation of real functions. Cambridge Univ. Press, 1987.

УДК 517.5

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША И СИСТЕМЫ СЖАТЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В. А. Миронов, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
v.a.mironoff@gmail.com, terekhinpa@mail.ru

Пусть $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — нечетная 2π-периодическая функция. Тогда

$$D_f := \{f(nt)\}_{n=1}^{\infty}$$

называется системой сжатых функций. Аффинной системой функций типа Уолша, порожденной функцией $f(2\pi t)$, называется

$$W_f := \{f(\pi t)\} \bigcup \left\{ f(2\pi 2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t) \right\}_{\alpha \in \mathbb{A}},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k$ и $r_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, — функции Радемахера.

Подсистема $D_f^{(2)} := \{f(2^k t)\}_{k=0}^{\infty}$ системы D_f на $[0, \pi]$ соответствует подсистеме системы W_f на $[0, 1]$, но при этом, вообще говоря, системы D_f и W_f имеют различные базисные свойства. Тем не менее, в следующем частном случае, когда функция f имеет специальный вид

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \sin(2^k t),$$

условия базисности в пространстве L^2 систем сжатых функций и аффинных систем Уолша совпадают. В статье Митягина [1] показано, что критерием базисности по Риссу системы D_S является отсутствие нулей полинома $\widehat{S}(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ в замкнутом единичном круге ($|z| \le 1$). Это условие является также критерием базисности по Риссу системы W_S.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Теорема 1. *Системы D_S и W_S одновременно являются или нет базисами Рисса.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митягин Б. С.* Системы сжатых функций: полнота, минимальность, базисность // Функц. анализ и его прил. 2017. Т. 51, № 3. С. 94–97.

2. *Granados B.* Walsh wavelets // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 1992. Vol. 13. P. 225–236.

3. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.

4. *Аль-Джоурани Х. Х. Х., Миронов В. А., Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 247–256. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.

5. *Асташкин С. В., Терехин П. А.* Базисные свойства аффинной системы Уолша в симметричных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. (принято к печати).

УДК 517.9

ОБ ИНТЕРВАЛЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО СЛАБОГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА[1]

С. В. Миронов, С. П. Сидоров (Саратов, Россия)
sergei.v.mironov@gmail.com

Пусть X есть Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Пусть выпуклая функция E определена на X. Задача выпуклой оптимизации состоит в нахождении приближенного решения следующей задачи

$$E(x) \to \min_{x\in X}. \tag{1}$$

Во многих реальных приложениях необходимо, чтобы оптимальное решение x^* задачи (1) имело простую структуру, например, представляло собой линейную комбинацию конечного числа элементов заданного множества (словаря D в X). Другими словами, x^* должен быть разреженным по отношению к словарю D в X.

Множество элементов $\mathcal{D}$ пространства X называется *словарем* (см., например, [1]), если каждый элемент $g \in \mathcal{D}$ ограничен по норме единицей, $\|g\| \le 1$, и замыкание линейной оболочки $\mathcal{D}$ совпадает с X, т.е. $\overline{\operatorname{span}\mathcal{D}} = X$. Словарь $\mathcal{D}$ называется симметричным, если $-g \in \mathcal{D}$ для всякого $g \in \mathcal{D}$. Далее мы предполагаем, что словарь $\mathcal{D}$ является симметричным.

Нас интересует задача нахождения решений задачи (1), которые являются разреженными по отношению к словарю $\mathcal{D}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00507).

Одним из классов конструктивных методов для нахождения наилучших m-членных приближений является класс жадных алгоритмов. Жадные алгоритмы в силу своей конструкции способны находить разреженные решения по отношению к словарю $\mathcal{D}$. Возможно, метод Франка – Вульфа [6], который также известен как метод условного градиента [7], является одним из самых известных алгоритмов для нахождения оптимальных решений условных задач выпуклой оптимизации. В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов обобщили его на случай произвольных Банаховых пространств [8]. В статье [9] приводятся прямые и двойственные результаты по сходимости алгоритмов типа Франка – Вульфа на основе применения идей двойственности, представленных в работе [10]. В последнее время были получены новые результаты по сходимости жадных алгоритмов [1–5].

В данной статье мы изучаем слабый чебышевский жадный алгоритм (weak Chebyshev greedy algorithm, WCGA) для нахождения решений задачи выпуклой оптимизации, которые являются разреженными по отношению к некоторому словарю, в банаховых пространствах.

Прямой результат о сходимости алгоритма WCGA был получен в [1]. Развивая идеи [9] и [10], мы вводим понятие интервала двойственности для получения двойственных оценок сходимости алгоритма WCGA при нахождении разреженных решений задач выпуклой оптимизации.

Для функционала $F \in X^*$ и элемента $f \in X$ мы будем использовать следующее обозначение $F(f) = \langle F, f \rangle$. Пусть $\Omega := \{x \in X : \ E(x) \leq E(0)\}$ и предположим, что Ω ограничено. Будем предполагать, что функция E дифференцируема по Фреше на Ω. Обозначим $\langle E'(x), y \rangle$ значение функционала $E'(x)$ (производной по Фреше функции E в точке x) в точке y.

Мы предполагаем, что существует элемент x^* (не обязательно единственный) Банахова пространства X, в котором достигается минимум $E^* := E(x^*)$. Очевидно, что множество всех элементов, в которых достигается минимум, является выпуклым. Отметим, что минимум E^* будет достигаться на элементе (или множестве элементов), принадлежащих множеству Ω. Пусть $A_1(\mathcal{D})$ означает замыкание (в X) выпуклой оболочки словаря $\mathcal{D}$.

Пусть $\tau := \{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ будет последовательностью неотрицательных чисел $t_m \leq 1$, $m = 1, 2, \ldots$, которая называется ослабляющей. Алгоритм WCGA(co) использует ослабляющую последовательность τ на шаге выбора направления наискорейшего спуска жадного алгоритма для нахождения приближенного решения ϕ_m этой подзадачи. Именно поэтому алгоритм называется «слабым».

Algorithm 2: Слабый чебышевский жадный алгоритм (WCGA(co))

begin

· Положить $G_0 = 0$;

for each $m \geq 1$ **do**

· *(Выбор направления спуска)* Найти $\phi_m \in \mathcal{D}$ такой,что $\langle -E'(G_{m-1}), \phi_m\rangle \geq t_m \sup_{s\in\mathcal{D}}\langle -E'(G_{m-1}), s\rangle$;

· *(Чебышевский поиск)* Найти числа ω_i^* такие, что $E\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_i^*\phi_i\right) = \inf_{\omega_i} E\left(\sum_{i=1}^{m}\omega_i\phi_i\right)$;

· *(Переход в новое состояние)* Определить $G_m = \sum_{i=1}^{m}\omega_i^*\phi_i$;

end

Обозначим $E^* := \inf_{x\in X} E(x) = \inf_{x\in\Omega} E(x)$, $\mathcal{L}_M := \{s \in X \ : \ s/M \in \in A_1(\mathcal{D})$, $A_\epsilon := A(E,\epsilon) = \inf\{M : \ \exists y \in \mathcal{L}_M$ такой, что $E(y) - E^* \leq \epsilon\}$, $\epsilon_m := \inf\{\epsilon : \ A_\epsilon^q m^{1-q} \leq \epsilon\}$.

Определим *интервал двойственности* для состояния $G \in \Omega$ и ошибки ϵ следующим образом:

$$g(G) = g(G,\epsilon) =: A_\epsilon \sup_{s\in\mathcal{D}}\langle E'(G), A_\epsilon^{-1}G - s\rangle. \tag{2}$$

Пусть E есть выпуклая функция, определенная на Банаховом пространстве X. Тогда для любого $x \in \Omega$ будет $E(x) - E(x^*) \leq g(x,\epsilon) + \epsilon$. Таким образом, практическая применимость интервала двойственности связана с тем фактом, что интервал двойственности $g(x)$ является оценкой ошибки приближения оптимального состояния $E(x^*)$ текущим состоянием $E(x)$.

Справедлив следующий двойственный результат для WCGA.

Теорема. *Пусть E есть равномерно гладкая выпуклая функция, определенная на Банаховом пространстве X. Пусть $\rho(E,u)$ есть модуль гладкости функции E и предположим, что $\rho(E,u) \leq \gamma u^q$, $1 < q \leq \leq 2$. Пусть $\tau = \{t_m\}_{m=1}^\infty$, $0 < \theta < t_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, есть ослабляющая последовательность. Предположим, что CGA или WCGA выполнены для $N > 2$ итераций. Тогда найдется такая итерация $1 \leq \tilde{m} \leq N$, что*

$$g(G_{\tilde{m}}) \leq \beta C(E,q,\gamma)\epsilon_N, \tag{3}$$

где $\beta > 0$ не зависит от N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 2. P. 269-–296.

2. *Temlyakov V. N.* Dictionary descent in optimization // Analysis Math. 2016. Vol. 42, № 1. P. 69-–89.

3. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Convex optimization on Banach spaces // Found. Comput. Math. 2016. Vol. 16, № 2. P. 369-–394.

4. *Nguyen H., Petrova G.* Greedy Strategies for Convex Optimization // Calcolo. 2017. Vol. 54, № 1. P. 207–224.

5. *Freund R. M., Grigas P.* New analysis and results for the Frank-Wolfe method // Math. Program. 2016. Vol. 155, № 1—2. P. 199–230.

6. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1-–2. P. 95–110.

7. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787-–823.

8. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремалыных задач. Л. : Ленингр. ун-т, 1968. 180 с.

9. *Jaggi M.* Revisiting Frank -– Wolfe : Projection-free sparse convex optimization // ICML'13 : Proc. 30th Intern. Conf. on Machine Learning. Atlanta, GA, USA, 2013. P. 427–435.

10. *Clarkson K. L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // ACM Transactions on Algorithms. 2010. Vol. 6, № 4. P. 1–30.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА – ЗИГМУНДА – АРЕСТОВА[1]

В. Р. Мисюк (Гродно, Беларусь)
misiuk@grsu.by

Введём в рассмотрение тригонометрический полином

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) ,$$

который определён на действительной оси и имеет порядок не выше чем n. Свойства тригонометрических полиномов изучены достаточно тщательно в различных аспектах анализа. Замечательным свойством этих полиномов является, то что его норма в основных классических пространствах C и L_p не зависит от сдвига аргумента. Это даёт основание получать точные неравенства с помощью довольно простых, но тем не менее изящных методов, причём многие задачи анализа на классах преродических функций базируются на этих неравенствах. При этом, особую роль играют неравенства дающие соотношения между нормой производной полинома через норму (вообще может и в другом пространстве) самого полинома. Рассмотрим одно из таких соотношений.

[1]Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция–2020».

Как известно (см., например, [1, 2]),

$$\|T_n'\|_{L_p[0\,,2\pi]} \leqslant n\ \|T_n\|_{L_p[0\,,2\pi]} \qquad 0 < p \leqslant \infty\,. \tag{1}$$

Для $p = \infty$ это соотношение было впервые получено С. Н. Бернштейном [2]. В 1940 году А. Зигмунд обобщил неравенство (1) на случай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а в 1980 году В. В. Арестов [3] — на остальные значения параметра p. В настоящее время известно множество обобщений этого неравенства в различных направлениях (целые функции, пространства Лебега и др.). С этой точки зрения о соотношении (1) целесообразно говорить, как о *неравенстве Бернштейна – Зигмунда – Арестова*, а настоящая заметка посвящена одному такому аналогу этого неравенства в пространстве Бергмана аналитических функций в круге.

Пусть m_2 — плоская мера Лебега в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, D — единичный круг в $\mathbb{C}$, $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических многочленов степени не выше n.

Через $A_{p,\alpha}(D)$, $p > 0$, $\alpha > 0$ обозначим пространство Бергмана аналитических функций f в D, наделённых конечной квазинормой $\|f\|_{p,\alpha}$ (нормой при $1 \leqslant p < \infty$). Именно

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int\limits_D \left(1 - |\xi|^2\right)^{p\alpha - 1} |f(\xi)|^p \, dm_2(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Для функции $f \in A_{p,\alpha}(D)$ положим $f^{[1]}(z) := izf'(z)$ и $f^{[s]}(z) := = \left(f^{[s-1]}(z)\right)^{[1]}$ при $s = 2,\ 3,\ \ldots$. Иначе говоря, если $z = r\,e^{i\phi}$, то

$$f^{[s]}(z) = \frac{d^s f\left(r\,e^{i\phi}\right)}{d\phi^s}\,.$$

Следующая теорема даёт аналог соотношения (1) для пространств Бергмана.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < \infty$, $s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, $P_n \in \mathcal{P}_n$. *Тогда*

$$\left\|P_n^{[s]}\right\|_{p,\alpha} \leqslant n^s\ \|P_n\|_{p,\alpha}\,. \tag{2}$$

Отметим, что соотношение (2) является точным и в качестве приложения позволяет получить соответствующий аналог обратной теоремы.

Для $f \in A_{p,\alpha}(D)$ введём

$$E_n(f)_{A_{p,\alpha}} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{p,\alpha}\ , \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве $A_{p,\alpha}$ посредством множества $\mathcal{P}_n$.

Теорема 2. *Если $f \in A_{p,\alpha}(D)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$ и при некотором $s \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(n^s E_n(f)_{A_{p,\alpha}} \Big)^{\min\{p,\,1\}} < \infty,$$

то $f^{[s]} \in A_{p,\alpha}(D)$.

Теоремы 1 и 2 для случая $\alpha = 1 - 1/p$ были получены ранее в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. Н.* Полное собрание сочинений : в 4 т. Т. 1. М. : Изд-во АН СССР, 1952; Т. 2. М. : Изд-во АН СССР, 1954.

2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. М. : Наука, 1976. 320 с.

3. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. Акад. наук СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1 . С. 3–22.

4. *Мисюк В. Р.* Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер. 2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. 2006. № 1. С. 58–62.

УДК 517.518.126

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗМЕРИМЫХ ПО РИМАНУ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

К. М. Нараленков (Москва, Россия)

naralenkov@gmail.com

Класс измеримых по Риману функций, введённый в [2], естественным образом возникает при изучении различных обобщений интеграла Римана для векторнозначных функций. В настоящей заметке изучается вопрос о предельном переходе в последовательности измеримых по Риману и интегрируемых по Хенстоку векторнозначных функций.

Для дальнейшего нам потребуется следующая терминология и обозначения. Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a, b]$ соответственно. Произвольная положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Напомним следующие определения интегралов от векторнозначных функций, базирующиеся на *интегральных суммах Римана.*

Разбиение Макшейна отрезка $[a,b]$ есть конечный набор пар отрезок-точка $\{(I_k,t_k)\}_{k=1}^K$ такой, что $\{I_k\}_{k=1}^K$ взаимно не перекрываются, покрывают отрезок $[a,b]$, а $t_k \in [a,b]$ для каждого k. Разбиение Макшейна называется *разбиением Хенстока* если $t_k \in I_k$ для всех k. Разбиение Макшейна (Хенстока) отрезка $[a,b]$ называется *согласованным* с масштабом δ на $[a,b]$ если $I_k \subset (t_k-\delta(t_k), t_k+\delta(t_k))$ для всех k.

Определение 1. Функция $f:[a,b]\to X$ называется *интегрируемой по Макшейну (Хенстоку)* на $[a,b]$, с *интегралом Макшейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a,b]$ такой, что неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w\right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Макшейна (Хенстока) $\{(I_k,t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a,b]$, согласованного с δ.

Функция f называется $\mathcal{M}$-*интегрируемой* ($\mathcal{H}$-*интегрируемой*) на $[a,b]$ если она интегрируема по Макшейну (Хенстоку) на $[a,b]$ каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Макшейна (Хенстока) от функции f по $[a,b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ.

Разбиением Биркгофа множества E называется не более чем счётный набор $\Pi = \{E_k\}$ попарно не пресекающихся множеств покрывающих E. Пусть Γ и Π суть два разбиения Биркгофа множества E. Разбиение Γ *измельчает* разбиение Π если каждое множество из Γ является подмножеством некоторого множества из Π.

Определение 2. Функция $f:E\to X$ называется *(абсолютно) интегрируемой по Колмогорову – Биркгофу* на E, с *(абсолютным) интегралом Колмогорова – Биркгофа* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение Биркгофа Π множества E такое, что для каждого разбиения Биркгофа $\Gamma = \{E_k\}$, измельчающего Π, для всех $t_k \in E_k$ ряд $\sum\limits_k f(t_k)\mu(E_k)$ безусловно (абсолютно) сходится и выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{k} f(t_k)\mu(E_k) - w\right\| < \varepsilon.$$

В работе [4] показано, что интеграл Колмогорова – Биркгофа и $\mathcal{M}$-интеграл эквивалентны.

Определение 3. Функция $f:[a,b]\to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество

$F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \backslash F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{ f(t_k) - f(t'_k) \} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Данное понятие измеримости является естественным для интегралов римановского типа от векторнозначных функций так как в работе [2] показано, что всякая измеримая по Риману *ограниченная* функция $\mathcal{M}$-интегрируема, а также, что векторнозначная функция $\mathcal{M}$-интегрируема ($\mathcal{H}$-интегрируема) тогда и только тогда, когда она интегрируема по Макшейну (Хенстоку) и измерима по Риману.

Для интеграла Колмогорова – Биркгофа известно несколько предельных теорем (см., например, [3]), однако их доказательства довольно сложны, а условия трудно проверить в конкретных случаях. Коме того, в работе [3] построен пример ограниченной последовательности функций интегрируемых по Колмогорову – Биркгофу функций со значениями в пространстве $c_0(\mathfrak{c})$, сходящейся *поточечно* к не интегрируемой по Колмогорову – Биркгофу и, следовательно, не измеримой по Риману функции. С другой стороны, стандартные рассуждения показывают, что *почти равномерный* предел последовательности измеримых по Риману функций является измеримой по Риману функцией.

Приводимые ниже утверждения являются аналогами теоремы об ограниченной сходимости для интегрируемых по Лебегу функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f_n : [a, b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}$-интегрируемы на $[a, b]$. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится почти равномерно к функции f на $[a, b]$. Если существует неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция φ такая, что $\|f_m - f_n\| \le \varphi$ на $[a, b]$ для всех m и n, то функция f $\mathcal{H}$-интегрируема на отрезке $[a, b]$ и выполняется предельное соотношение*

$$\sup_{t \in [a,b]} \left\| \int_a^t (f_n - f) \right\| \to 0 \textit{ при } n \to \infty.$$

Следствие 1. *Пусть функции $f_n : [a, b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, измеримы по Риману на $[a, b]$. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится почти равномерно к функции f на $[a, b]$. Если существует неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция φ такая, что $\|f_n\| \le \varphi$*

на $[a,b]$ для всех n, то функции f_n для каждого n и функция f абсолютно интегрируемы по Колмогорову – Биркгофу (и, следовательно, $\mathcal{M}$-интегрируемы) на отрезке $[a,b]$ и верно предельное соотношение теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Caponetti D., Marraffa V., Naralenkov K.* On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // Monatsh. Math. 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.
2. *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.
3. *Rodríguez J.* Pointwise limits of Birkhoff integrable functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137, № 1. P. 235–245.
4. *Солодов А. П.* О границах обобщения интеграла Колмогорова // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272

УДК 517.5

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ТОРОВ НАД СФЕРОЙ РИМАНА С ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)

semen.nasyrov@yandex.ru

Мы изучаем гладкие однопараметрические семейства эллиптических функций $f(z,t)$, $0 \leq t \leq 1$, с периодами $\omega_1 = \omega_1(t)$ и $\omega_2 = \omega_2(t)$, которые имеют критические точки $a_j(t)$ порядка m_j, $0 \leq j \leq N$, и единственный полюс порядка n в начале координат. Естественно, предполагается, что $a_j(t) \not\equiv 0 \pmod{\boldsymbol{\omega}}$, $0 \leq j \leq N$, $a_j(t) \not\equiv a_k(t) \pmod{\boldsymbol{\omega}}$, $j \neq k$, где $\boldsymbol{\omega}$ — решетка, порожденная векторами ω_1 и ω_2, и

$$a_0(t) + a_1(t) + \ldots + a_N(t) = 0. \tag{1}$$

Пусть $A_j(t) = f(a_j(t),t)$ — критические значения функции $f(z,t)$, соответствующие критическим точкам $a_j(t)$. Нашей целью является нахождение системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $a_j(t)$ и периоды $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ в случае, когда зависимости $A_j(t)$ нам известны.

Эта задача имеет важную геометрическую интерпретацию. Предположим, что задано однопараметрическое семейство $S = S(t)$, $0 \leq t \leq 1$, комплексных торов, т. е. компактных римановых поверхностей рода нуль, разветвленно накрывающих сферу Римана. Тогда известны проекции точек ветвления $A_j(t)$ поверхности $S(t)$ на комплексную плоскость и соответствующие кратности ветвления m_j. Искомая система

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-01-00282 и 17-41-160345).

дифференциальных уравнений позволяет описывать семейство функций $f(z,t)$, униформизирующих семейство $S(t)$. Если, к примеру, нам известна функция $f(z,0)$, то решая задачу Коши для полученной системы с начальными данными, соответствующими функции $f(z,0)$, мы получаем значения параметров для функций $f(z,t)$ при всех $t \in [0;1]$; по этим значениям можно восстановить и сами эти функции.

Заметим, что по заданным проекциям точек ветвления и их кратностям риманова поверхность определяется, вообще говоря, не единственным образом. На это впервые обратил внимание Гурвиц [1, 2]. Среди результатов по определению числа неэквивалентных накрытий с заданным типом ветвления упомянем результаты А. Д. Медных [3, 4], см. также [5–7]. Отметим также, что для компактных римановых поверхностей рода нуль задача, аналогичная рассматриваемой здесь, была решена нами в [8] для случая полиномов и в [9] для рациональных функций. Случай эллиптических функций с простыми точками ветвления над конечной частью плоскости и единственным полюсом был исследован в [10]. Здесь мы обобщаем результаты этой статьи на случай произвольных кратностей ветвления; при этом, как и в [10], считаем, что полюс у функций $f(z,t)$ один и располагается в начале координат.

Напомним определение эллиптических функций Вейерштрасса и введем необходимые обозначения.

Одной из основных эллиптических функций является $\mathfrak{P}$-функция Вейерштрасса

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right].$$

Как принято в теории эллиптических функций, знак «штрих» у суммы (произведения) означает, что эта сумма (произведение) берется по всем ненулевым элементам ω решетки $\boldsymbol{\omega}$. В окрестности нуля $\mathfrak{P}$-функция имеет разложение

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}\, z^2 + \frac{g_3}{28}\, z^4 + \ldots,$$

где g_2 и g_3 — так называемые инварианты Вейерштрасса, определяемые равенствами

$$\frac{g_2}{60} = \sum{}' \frac{1}{\omega^4}, \quad \frac{g_3}{140} = \sum{}' \frac{1}{\omega^6}.$$

Дзета-функция Вейерштрасса

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum{}' \left[\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right]$$

обладает свойствами: $\zeta'(z) = -\mathfrak{P}(z)$,

$$\zeta(z+\omega_k) = \zeta(z) + \eta_k, \quad k = 1, 2,$$

где $\eta_k = 2\zeta(\omega_k/2)$. Обозначим $\widetilde{\zeta}(z) = \zeta(z) - 1/z$. Эта функция имеет устранимую особенность в начале координат и разлагается в окрестности нуля в степенной ряд

$$\widetilde{\zeta}(z) = -\frac{g_2}{60}\,z^3 - \frac{g_3}{140}\,z^5 + \ldots$$

Наконец, сигма-функция Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z\prod{}' \left\{\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right\}$$

является нечетной целой функцией, обладающей свойствами:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z), \quad \sigma(z+\omega) = \varepsilon\sigma(z)e^{\eta(z+\omega/2)},$$

где $\eta = m\eta_1 + n\eta_2$, если $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $\varepsilon = 1$, если $\omega/2 \in \boldsymbol{\omega}$; в противном случае $\varepsilon = -1$. Обозначим $\widetilde{\sigma}(z) = z/\sigma(z)$. Эта функция имеет устранимую особенность в начале координат и разлагается в окрестности нуля в ряд

$$\widetilde{\sigma}(z) = 1 + \frac{g_2}{240}\,z^4 + \frac{g_3}{840}\,z^6 + \ldots$$

Нам также будет необходим следующий результат из [10], дающий выражения частных производных функции $\ln\sigma(z) = \ln\sigma(z;\omega_1,\omega_2)$ по переменным ω_1, ω_2.

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial\ln\sigma(z)}{\partial\omega_1} = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\,\omega_2(\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2) + \eta_2(z\zeta(z)-1) + \omega_2\frac{g_2}{24}\,z^2\right],$$

$$\frac{\partial\ln\sigma(z)}{\partial\omega_2} = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2}\,\omega_1(\mathfrak{P}(z) - (\zeta(z))^2) + \eta_1(z\zeta(z)-1) - \omega_1\frac{g_2}{24}\,z^2\right].$$

Теперь вернемся к задаче об описании параметров униформизирующих функций по траекториям критических значений $A_j(t)$. Производная $f'(z,t)$ может быть записана в виде

$$f'(z,t) = c\,\frac{\prod\limits_{j=0}^{N}\sigma^{m_j}(z-a_j)}{\sigma^{n+1}(z)}\,, \tag{2}$$

где $a_j = a_j(t)$, $c = c(t) \neq 0$ — некоторое комплексное число, $\sum\limits_{j=0}^{N} m_j = n$.

Поскольку мы решаем задачу униформизации, дополнительным линейным преобразованием плоскости z можно добиться, чтобы $\omega_1(t) \equiv 1$, $0 \le t \le 1$, а сдвигом в плоскости образа — чтобы $A_0(t) = 0$, $0 \le t \le 1$. Это не ограничивает общности, и в дальнейшем мы будем считать эти условия выполненными.

Обозначим

$$G_k(z) = \frac{\sigma^{n+1}(z)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} \sigma^{m_j}(z - a_j)}, \quad \widetilde{G}_k(z) = G_k(z)\left(\widetilde{\sigma}(z - a_k)\right)^{m_k}.$$

Теорема 2. *Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство эллиптических функций вида* (2) *с периодами* $\omega_1 = 1$ *и* $\omega_2 = \omega_2(t)$. *Пусть* $A_k = A_k(t)$ — *критические значения функции* $f(z,t)$, *соответствующие критическим точкам* $a_k = a_k(t)$, *причем* $A_0(t) = 0$, $0 \le t \le 1$. *Тогда* a_k, $1 \le k \le N$, ω_2 *и параметр* c *удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\dot{a}_k = \frac{1}{c}\left[\frac{\dot{A}_k}{m_k!}\left(\widetilde{G}_k^{(m_k)}(a_k) - m_k \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \xi^{m_k-1}} \widetilde{G}_k(\xi)[\zeta(\xi) - \widetilde{\zeta}(\xi - a_k) - \eta_1 a_k]\Big|_{\xi = a_k}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\dot{A}_j}{(m_j - 1)!} \frac{\partial^{m_j-1}}{\partial \xi^{m_j-1}} \widetilde{G}_j(\xi)\left[\zeta(\xi) - \zeta(\xi - a_k) - \eta_1 a_k\right]\Big|_{\xi = a_j}\right],$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{2\pi i}{c} \sum_{k=1}^{n} \dot{A}_k \frac{\widetilde{G}_k^{(m_k-1)}(a_k)}{(m_k - 1)!},$$

$$\dot{c}/c = -\sum_{j=0}^{N} m_j \left[\zeta(a_j)\dot{a}_j + \dot{\omega}_2 \frac{\partial \ln \sigma(a_j)}{\partial \omega_2}\right] +$$

$$+ n \sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{A}_k}{(m_k - 1)!} \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \xi^{m_k-1}} \widetilde{G}_k(\xi)\left[\mathfrak{P}(\xi) + \eta_1\right]\Big|_{\xi = a_k},$$

где производная $\partial \ln \sigma / \partial \omega_2$ *может быть найдена с помощью второго равенства из теоремы* 1.

Здесь точка сверху буквы означает операцию дифференцирования по параметру t. Отметим также, что после нахождения a_k, $1 \le k \le N$, параметр a_0 легко находится с учетом равенства (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hurwitz A.* Über Riemannsche Flächen mit gegeben Verzweigungpunkten // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 1–61.

2. *Hurwitz A.* Über die Anzahl der Riemannsche Flaĉhen mit gegeben Verzweigungpunkten // Math. Ann. 1902. Vol. 55. P. 53–66.

3. *Медных А. Д.* Неэквивалентные накрытия римановых поверхностей с заданным типом ветвления // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25, № 4. С. 120–142.

4. *Медных А. Д.* Новый метод подсчета числа накрытий над многообразием с конечно порожденной фундаментальной группой // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 2. С. 158–162.

5. *Ландо С. К.* Разветвленные накрытия двумерной сферы и теория пересечений в пространствах мероморфных функций на алгебраических кривых // УМН. 2002. Т. 57, вып. 3(345). С. 29–98.

6. *Ландо С. К., Звонкин А. К.* Графы на поверхностях и их приложения. М. : МЦНМО, 2010. 480 с.

7. *Насыров С. Р.* Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. Казань : Магариф, 2008. 276 с.

8. *Насыров С. Р.* Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность // Матем. заметки. 2012. Т. 91, вып. 4. С. 597–607.

9. *Насыров С. Р.* Униформизация односвязных разветвленных накрытий сферы рациональными функциями // Докл. АН. 2017. Т. 476, №Ё1. С. 14–16.

10. *Насыров С. Р.* Униформизация однопараметрических семейств комплексных торов // Изв. вузов. Математика. 2017. № 8, С. 42–52.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТИПА ЛАГРАНЖА – СТИЛТЬЕСА

В. В. Новиков (Саратов, Россия)
vvnovikov@yandex.ru

Пусть P_n — ортогональный многочлен Лежандра степени n и E_{n+1} — многочлен Стилтьеса степени $n+1$, определенный с точностью до постоянного множителя условием

$$\int_{-1}^{1} E_{n+1}(x)P_n(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geq 1.$$

Известно (см., например, [1]), что нули $\{\xi_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ многочлена E_{n+1} являются простыми, действительными и лежат в $(-1, 1)$. В [2] установлено, что константы Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами $\{\xi_{i,n+1}\}$ имеют оптимальный логарифмический порядок роста подобно интерполяционным константам Лебега для узлов Чебышева. Там же показано, что распределение нулей многочленов $\{E_{n+1}\}$ подчиняется закону арккосинуса. Кроме того, было обнаружено [3], что узлы $\{\xi_{i,n+1}\}$ играют важную роль в теории квадратурных формул (формула Гаусса – Кронрода). Указанные факты обусловили интерес ряда авторов (см.

библиографию в [1] и [2]) к изучению различных аспектов интерполяции с узлами в нулях многочленов $\{E_{n+1}\}$ и их обобщений.

Хорошо известно, что интерполяционный процесс Лагранжа непрерывной функции с узлами в нулях многочленов Чебышева может расходиться всюду (с произвольными узлами — почти всюду [4]), подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время, показано [5], что любую измеримую (конечную п.в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся. Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? Обозначим для функции f, заданной на $[-1,1]$, через $L_{n+1}(S,f,x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах $(n+1)$–ой строки матрицы $S=\{\xi_{i,n+1}\}_{i=1,n=0}^{n+1,\infty}$. Показано, что существует матрица узлов интерполирования S_γ, как угодно близкая к матрице S, такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f\in C[-1,1]$ на множестве как угодно малой меры, интерполяционный процесс с узлами S_γ будет сходится к исправленной функции равномерно внутри $(-1,1)$. Отметим, что для самой матрицы S вопрос открыт. Справедливо следующее утверждение.

Теорема *Пусть последовательность* $\gamma=\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}_+$ *такова, что* $\gamma_n\to 0$ *при* $n\to\infty$*. Тогда существует матрица узлов интерполирования* $S_\gamma=\{y_{k,n+1}\}_{k=1,n=0}^{n+1,\infty}$ *со следующими свойствами:*

1) $|\xi_{k,n+1}-y_{k,n+1}|<\gamma_{n+1}$, $1\le k\le n+1$, $n\ge 0$;

2) *для любых* $f\in C[-1,1]$, $-1<a<b<1$, *и* $0<\delta<b-a$ *найдутся функция* $g\in C[-1,1]$ *и множество* $E\subset[a,b]$, $\mathrm{mes}E>b-a-\delta$, *такие, что* $f=g$ *на* E *и*

$$\lim_{n\to\infty}\|L_{n+1}(S_\gamma,g,\cdot)-g\|_{C[a,b]}=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peherstorfer F.* Stieltjes polynomials and functions of the second kind // J. Comput. and Appl. Math. 1995. Vol. 65. P. 319–338.

2. *Mastroianny G., Ehrich S.* Stieltjes polynomials and Lagrange interpolation // Math. Comput. 1997. Vol. 66. № 217. P. 311–331.

3. *Barrucand P.* Intégration Numerique, Abscisses de Kronrod-Patterson et Polynômes de Szegő // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. 1970. Vol. 270. P. 147–158.

4. *Erdős P., Vertesi P.* On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. Vol. 36, iss. 1–2. P. 71–89.

5. *Menchoff D.* Sur les séries de Fourier des fonctions continues // Матем. сб. 1940. Т. 8(50), № 3. С. 493–518.

УДК 517.9

РАВНОУГОЛЬНЫЕ ЖЕСТКИЕ ФРЕЙМЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ[1]

С. Я. Новиков (Самара, Россия)
nvks@ssau.ru

Пусть $M < N$ — натуральные числа, и пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — набор нормированных ($\|\varphi_i\| = 1$) векторов в $\mathbb{F}^M$, где поле $\mathbb{F}$ может быть как вещественным $\mathbb{R}$, так и комплексным $\mathbb{C}$. Число $\max_{i\neq j} |\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle|$ называют когерентностью набора $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. Во многих прикладных вопросах важно найти набор из N нормированных векторов в $\mathbb{F}^M$ с минимальной когерентностью. С геометрической точки зрения, ставится вопрос об оптимальном расположении прямых в евклидовом пространстве: для вещественных нормированных векторов φ_i и φ_j, $|\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle| = \cos\theta_{i,j}$ где $\theta_{i,j}$ — острый угол между прямыми, порожденными векторами φ_i and φ_j. Таким образом, поиск нормированных векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ с минимальной когерентностью эквивалентен поиску такого расположения прямых, при котором минимальный угол между парами прямых принимает максимальное значение. Для фиксированной пары $M < N$ когерентность набора из N единичных векторов $\mathbb{F}^M$ ограничена снизу: она отлична от нуля, так как не существует N ортонормированных векторов в $\mathbb{F}^M$, кроме того компактность декартова произведения единичных сфер из $\mathbb{F}^M$ обеспечивает непрерывность когерентности как функции от $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. Хорошо известна нижняя оценка Уэлча для когерентности [1, 2].

Теорема 1. *Если $M < N$, и $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — произвольные нормированные векторы в $\mathbb{F}^M$, то*

$$\sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}} \leq \max_{i\neq j} |\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle|.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — равноугольный жесткий фрейм (ETF) в $\mathbb{F}^M$.

По набору векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{F}^M$ определим *оператор синтеза* $\mathbf{\Phi}$ $M \times N$-матрицей, столбцами которой являются векторы $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. *Оператор анализа* $\mathbf{\Phi}^*$ для $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ определяется матрицей, сопряженной к матрице оператора синтеза. Композиция $\mathbf{\Phi\Phi}^*$ определяет *фреймовый оператор.* Формируя композицию в другом порядке, получим *матрицу Грама* $\mathbf{G} = \mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$, для которой $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(i, j) = \langle\varphi_i, \varphi_j\rangle$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект гранта РФФИ 17-01-00138).

Система векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. образует *жесткий (tight)* фрейм, если существует число $\alpha > 0$ такое, что $\mathbf{\Phi\Phi}^* = \alpha\mathbf{I}$. В этом случае строки матрицы $\mathbf{\Phi}$ ортогональны и имеют одинаковые нормы.

Фрейм $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ называется равноугольным, если каждый вектор $\{\varphi_i\}$ имеет единичную норму, и значения модулей скалярных произведений $|\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle|$ постоянны для любых пар $i \neq j$, таким образом, диагональные элементы матрицы $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$ равны 1, а внедиагональные имеют одинаковые модули. Равноугольный жесткий фрейм (ETF = equiangular tight frame) — это фрейм, который одновременно жесткий и равноугольный. Именно на таких фреймах, и только на них, достигается граница Уэлча.

Минимальная когерентность равноугольных жестких фреймов стала причиной многих полезных приложений таких систем. Конструктивные методы построения ETF являются предметом поиска многих исследователей.

Пример матрицы оператора синтеза в $\mathbb{R}^6$, строки которой ортогональны, столбцы нормированы, и пары столбцов имеют одинаковые модули скалярных произведений приводится ниже [3]:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Весьма перспективным направлением в построении ETF выглядит применение методов теории графов. Обнаружена связь между вещественными ETF и сильно регулярными графами.

Матрица Грама $\mathbf{G}$ вещественного ETF представляет собой вещественную симметричную матрицу, на главной диагонали которой расположены 1, на внедиагональных — $\pm$ граница Уэлча. Такая матрица весьма легко переводится в матрицу смежности $\mathbf{A}$ некоторого графа.

Соотношение $\mathbf{G}^2 = \alpha\mathbf{G}$ показывает, что матрица $\mathbf{A}$ должна обладать дополнительными симметриями. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица смежности графа с V вершинами, т.е. $V \times V$ вещественная бинарная $(0 - 1)$ симметричная матрица, с нулями на главной диагонали. Соответствующий граф называется *регулярным*, если каждая вершина графа имеет одинаковое количество вершин-соседей, другими словами, если существует натуральное k такое, что $\mathbf{A1} = k\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ обозначает вектор-столбец с единичными координатами. Такой граф называется *сильно регулярным* с неотрицательными параметрами (V, k, λ, μ), если каждые две соседние вершины имеют ровно λ общих соседей, а каждые две несоседние вершины имеют ровно μ общих соседей. Сильно регулярный граф (SRG) с такими параметрами обозначается SRG (V, k, λ, μ).

Каждый ETF $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ порождает SRG с $V = N - 1$ вершинами и параметрами k, λ, зависящими от M и N, а также $\mu = k/2$.

С другой стороны, каждый SRG (V, k, λ, μ) может быть преобразован в вещественный ETF.

Пусть $\mathbf{B}$ — $V \times V$ -матрица смежности данного графа, причем $\mu = k/2$. Полагаем $N = V + 1$ и определяем $N \times N$ матрицу смежности соотношением

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^* \\ \mathbf{1} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Далее, используя матрицу $\mathbf{A}$ и $\beta \in \mathbb{R}$, определяем матрицу $\mathbf{G}$ соотношением

$$\mathbf{G} = 2\beta\mathbf{A} + (\beta + 1)\mathbf{I} - \beta\mathbf{J}.$$

Матрица $\mathbf{G}$ симметричная, на главной диагонали единицы, внедиагональные элементы $\pm\beta$. Матрица $\mathbf{G}$ является матрицей Грама некоторого $M \times N$ ETF при надлежащем выборе параметров M и β.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Welch R.* Lower bounds on the maximum cross correlation of signals // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. Vol. 20, iss. 3. P. 397–399.

2. *Strohmer T., Heath R. W.* Grassmannian frames with applications to coding and communication// Appl. Comput. Harmon. Anal. 2003. Vol. 14, iss. 3. P. 257–275.

3. *Fickus M., Watson C. E.* Detailing the equivalence between real equiangular tight frames and certain strongly regular graphs. // Proc.SPIE. 2015. 959719/.

УДК 517.52

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ П. Л. УЛЬЯНОВА[1]

К. А. Оганесян (Москва, Россия)

oganchris@gmail.com

Рассматриваются ненулевые синус-ряды со стремящимися к нулю монотонными коэффициентами. Показано, что множество нулей на $[0, \pi]$ такого ряда не может иметь меру больше, чем $\pi/3$. Причем если это значение достигается, то почти все множество нулей лежит на отрезке $[2\pi/3, \pi]$.

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad a_1 > 0, \quad a_n \searrow 0, \tag{1}$$

[1]Полный текст представлен в журнал "Математические заметки".

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$

Обозначим для любого измеримого множества $L \in \mathbb{R}$ $E_L = M \cap L$, $\mu_L = \mu(E_L)$, где под $\mu(A)$ здесь и далее подразумевается классическая мера Лебега множества A.

Изучению свойств множества M посвящено много работ по тригонометрическим рядам с монотонными коэффициентами. В частности, в некоторых из них рассматривался вопрос, «как велико» может быть множество $E_{[0,\pi]}$. Так, в 1979 г. П. Л. Ульянов поставил ряд задач, среди которых следующие:

1. Может ли это множество иметь мощность континуума?

2. Может ли это множество иметь положительную меру?

На первый вопрос В. Ф. Гапошкин [1] дал положительный ответ и в своей работе привел пример ряда вида (1), имеющего на $[0,\pi]$ континуум нулей, в котором $a_k = \sum_{s=m}^{\infty} s^{-1,001}$ при $10^{3(m-1)} \leqslant k < 10^{3m}$.

Позже М. И. Дьяченко [2] показал, что ряд вида (1) может сходиться к нулю на множестве положительной меры, построив функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/a, & x \in (0,a], \\ 0, & x \in (a,\pi), \end{cases}$$

которая при $a \in (a_0,\pi)$ имеет ряд Фурье вида (1), а постоянная $a_0 \in \in (2\pi/3,\ 2,15)$, находится из уравнения $2a_0 - 4\sin a_0 + \sin 2a_0 = 0$. Также в этой работе было показано, что верна следующая оценка для меры нулей $f(x)$ на $[0,\pi]$

$$\mu_{[0,\pi]} < \pi - 1,4.$$

Затем А. С. Белов [3] и М. И. Дьяченко [4] независимо показали, что имеет место оценка

$$\mu_{[0,\pi]} \leqslant \pi/2,$$

а в работе [3] А. С. Беловым также был приведен пример функции $f(x)$ вида (1), равной нулю на отрезке $[2\pi/3,\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} (2\pi x - 3x^2)/\sin(x/2), & x \in (0,2\pi/3], \\ 0, & x \in (2\pi/3,\pi), \end{cases}$$

В настоящей работе показано, что значение $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3$ максимально, и, более того, если $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3$, то почти все множество нулей лежит на отрезке $[2\pi/3,\pi]$. А точнее, имеет место следующая

Теорема 1. *Для $\mu_{[0,\pi]}$ выполняется неравенство*

$$\mu_{[0,\pi]} \leqslant \pi/3.$$

При этом если $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3 - 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \geqslant 0$, то $\mu_{[2\pi/3,\pi]} \geqslant$ $\geqslant \pi/3 - 7\varepsilon$ (то есть $\mu_{[2\pi/3,\pi]} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi/3$).

Стоит упомянуть, что в своей работе [5] М. И. Дьяченко построил для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ пример такого ненулевого косинус-ряда $g_\varepsilon(x)$ с монотонными коэффициентами, что $\{x \in (0,\pi) : g_\varepsilon(x) = 0\} \supset [\varepsilon, \pi]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гапошкин В. Ф.* О нулях тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1981. Т. 172, вып. 9. С. 13–15.

2. *Дьяченко М. И.* О рядах Фурье с монотонно убывающими коэффициентами и некоторых вопросах гладкости сопряженных функций // Сообщ. АН ГрузССР. 1981. Т. 104, № 3. С. 533–536.

3. *Белов А. С.* Степенные ряды и кривые Пеано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49, № 4. С. 675–704.

4. *Дьяченко М. И.* О тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами // Теория функций и приближений : тр. 2-й Сарат. зимн. шк. (24 января – 5 февраля 1984 г.) : в 2 ч. Ч. 2. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 101–104.

5. *Dyachenko M. I.* On some properties of trigonometric series with monotone decreasing coefficients // Anal. Math. 1984. Vol. 10, № 3. P. 193–205.

УДК 517.929+517.983.51

РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ[1]

С. С. Орлов, В. В. Шеметова (Иркутск, Россия)
orlov_sergey@inbox.ru, valentina501@mail.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство, u — неизвестная, а f — заданная функции со значениями в E аргумента $t \geq 0$. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-h) + f(t),\ t > 0. \tag{1}$$

Здесь A и B — линейные непрерывные операторы из E в E, $h > 0$. Для уравнения (1) поставим начальную задачу

$$u(t) = \varphi(t),\ -h \leq t \leq 0, \tag{2}$$

с начальной функцией $\varphi(t) \in \mathcal{C}([-h,\, 0]\,;\, E)$.

Определение 1. *Классическим решением задачи* (1), (2) назовем функцию $u(t) \in \mathcal{C}([-h,\, +\infty);\, E) \cap \mathcal{C}^1((0,\, +\infty);\, E)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00291).

Представляемая работа посвящена изучению вопроса однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2). Исследования проводятся на основе теории обобщенных функций Соболева–Шварца со значениями в банаховых пространствах [1] и концепции фундаментального решения абстрактного линейного интегро-дифференциального оператора. Этот подход использовался авторами в работе [2] для специального класса дифференциально-операторных уравнений вида (1), в котором $B = \alpha A$, α — ненулевой скаляр.

Пусть $u = u(t)$ — классическое решение начальной задачи (1), (2), продолжим его нулем при $t < -h$ следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u(t)\theta(t),$$

тогда в классе $K'_+(E)$ распределений с ограниченным слева носителем начальная задача (1), (2) сводится к сверточному уравнению

$$\big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t) \tag{3}$$

с правой частью $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ вида

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) - A\varphi(t)\big(\theta(t+h)-\theta(t)\big) + \delta'(t)*\varphi(t)\big(\theta(t+h)-\theta(t)\big) + \varphi(0)\delta(t).$$

Здесь θ — *функция Хевисайда*, δ — *функция Дирака*, $\mathbb{I}$ — тождественный оператор. Единственным решением уравнения (3) в $K'_+(E)$ (*обобщенным* решением задачи (1), (2)) является распределение $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$, где обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}$ такую, что

$$\forall\ v(t) \in K'_+(E) \quad \big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall\ v(t) \in K'_+(E) \quad \mathcal{E}(t) * \big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * v(t) = v(t),$$

назовем *фундаментальным решением* дифференциального оператора $\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)$ с отклоняющимся аргументом.

Теорема 1. *Пусть A, $B \in \mathcal{L}(E)$, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)$ имеет вид*

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{A(t-kh)} U_k(t-kh)\theta(t-kh),$$

где e^{At} — операторная экспонента, последовательность $\{U_{k-1}(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ оператор-функций задается рекуррентно

$$U_k(t) = \int\limits_0^t V(s)U_{k-1}(s)ds,\ U_0(t) = \mathbb{I},$$

причем $V(t) = e^{-At}Be^{At}$.

Заметим, что $V(0) = B$, более того, операторы $V(t)$ и A образуют пару Лакса [3], т. е. удовлетворяют уравнению

$$V'(t) = \big[V(t),\, A\big].$$

По следствию из формулы Бейкера – Кемпбелла – Хаусдорфа [4] оператор-функция $V(t)$ представима операторно-функциональным рядом

$$V(t) = B + [B, A]\,\frac{t}{1!} + \big[[B, A]\,, A\big]\,\frac{t^2}{2!} + \big[\big[[B, A]\,, A\big], A\big]\,\frac{t^3}{3!} + \ldots,$$

сходящимся в $\mathcal{L}(E)$ равномерно на любом компакте. При $k \in \mathbb{N}$ имеют место дифференциальные соотношения и асимптотические формулы

$$U_k'(t) - \big[U_k(t),\, A\big] = U_{k-1}B, \quad U_{k-1}(t) \sim \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,B^{k-1},\; t \to 0.$$

Здесь $\big[B, A\big] = BA - AB$ обозначен коммутатор операторов B и A. Если их суперпозиция коммутативна, т. е. $\big[B, A\big] = \mathbb{O}$, то, как показано в [5]

$$U_{k-1}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,B^{k-1}.$$

В условиях теоремы 1 начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \sum_{k=0}^{+\infty}\Bigg[e^{A(t-kh)}U_k(t-kh)\varphi(0)\theta(t-kh) +$$

$$+ \int\limits_{(k+1)h}^{t} e^{A(t-s)}U_k(t-s)B\varphi(s-(k+1)h)ds\big(\theta(t-kh) - \theta(t-(k+1)h)\big) +$$

$$+ \int\limits_{-h}^{0} e^{A(t-(k+1)h-s)}U_k(t-(k+1)h-s)B\varphi(s)ds\,\theta(t-kh) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t-kh} e^{A(t-kh-s)}U_k(t-kh-s)f(s)ds\,\theta(t-kh)\Bigg],$$

которое является регулярным распределением и порождено функцией $u = u(t)$, заданной кусочно на полуинтервалах $[(k-1)h,\, kh)$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Эта функция является классическим решением начальной задачи (1),

(2) при $f(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty); E)$. Пусть $f(t) \in \mathcal{C}^{n-1}((0, +\infty); E)$, тогда в точках $t = kh$, где $k = 0, \ldots, n-1$, решение имеет k порядком сильной дифференцируемости, а в других точках интервала $(0; +\infty)$ он равен n. Эти факты согласуются с известными сведениями [6, с. 20] о скалярных ($E = \mathbb{R}$) уравнениях с отклоняющимся аргументом.

Предлагаемый подход применим к исследованию более общей задачи с начальными условиями $u(t) = \varphi(t)$, $-h \le t < 0$, $u(0) = u_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. 568 p.

2. *Орлов С. С.* Построение решений в классе распределений дифференциально-операторных уравнений с отклоняющимся аргументом // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посв. памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск : Изд-во «Удмуртский университет», 2015. С. 107–108.

3. *Абловиц Д., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М. : Мир, 1987. 479 с.

4. *Hall B. C.* Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introductions. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 222. N. Y. : Springer, 2015. 453 p.

5. *Шеметова В. В.* Фундаментальное решение одного функционально-дифференциального оператора в банаховом пространстве // Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы : материалы междунар. молодеж. науч. шк. Ч. I. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2017. С. 213–214.

6. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971. 296 с.

УДК 517.538.3

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Б. П. Осиленкер (Москва, Россия)
b_osilenker@mail.ru

Введение

Рассмотрим нестандартное скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx + A_1 f(1)g(1) + B_1 f(-1)g(-1)+$$

$$+A_2 f'(1)g'(1) + B_2 f'(-1)g'(-1), \qquad (1)$$

где $w(x)$ — положительная почти всюду на $[-1,1]$ весовая функция, A_1, A_2, B_1, B_2 — положительные числа. Линейное пространство S со скалярным произведением (1) называется дискретным пространством Соболева. Построим последовательность полиномов n-й степени с положительным старшим коэффициентом

$$\{q_n(x)\}: \ q_n(x) \equiv q_n(x; A_1, A_2, B_1, B_2) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ x \in [-1,1]),$$

ортонормированных по отношению к скалярному произведению (1).

Пространство S и полиномы $q_n(x)$ привлекают внимание многих исследователей в связи с задачами теории функций, функционального анализа, математической физики, теории вероятностей, квантовой механики и вычислительной математики.

Полиномы $q_n(x)$ обладают рядом необычных свойств: не удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению, нули их могут не принадлежать промежутку ортогональности и т.д.

Например, ортонормированные многочлены $q_n(x)$ для всех n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in [-1,1]$, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(x^3 - 3x)q_n(x) = \alpha_{n+3}q_{n+3}(x) + \beta_{n+2}q_{n+2}(x) + \gamma_{n+1}q_{n+1}(x) + \delta_n q_n(x) +$$

$$+\gamma_n q_{n-1}(x) + \beta_n q_{n-2}(x) + \alpha_n q_{n-3}(x), \quad q_{-3}(x) = q_{-2}(x) = q_{-1}(x) \equiv 0,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{8}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = -\frac{9}{8}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, и этот порядок — наименьший.

Пусть $[c,d]$ — произвольный промежуток из $(-1,1)$. Ортонормированная система $\{q_n(x)\}$ принадлежит классу $\mathbb{Q}([c,d])$, если выполняются условия:

1) ортонормированная система многочленов $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно ограничена на $[c,d]$:

$$\max_{c \le x \le d} |q_n(x)| \le C < \infty;$$

2) для рекуррентных коэффициентов при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} \left(|\alpha_k - \alpha_{k+1}| + |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\gamma_k - \gamma_{k+1}| + |\delta_k - \delta_{k+1}|\right) \le C < \infty.$$

Классу $\mathbb{Q}([c,d]$ ($[c,d]$ — произвольный компакт из $(-1,1)$) принадлежит система симметричных полиномов Гегенбауэра – Соболева $\{\hat{B}_n^{(\alpha)}(x) \equiv \hat{B}_n^{(\alpha)}(x; A_1, A_1, A_2, A_2)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; \ x \in [-1,1])$, ортонормированных относительно скалярного произведения (1): $w(x) = (1-x^2)^{\alpha}$, $\alpha \ge -\frac{1}{2}$.

1. Экспоненциальные методы суммирования рядов Фурье – Соболева

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество функций:

$$\mathfrak{R} = \left\{ f(x),\ x \in [-1,1],\ \int_{-1}^{1} |f(x)| w(x)\, dx < \infty,\ f(\pm 1), f'(\pm 1) \text{ существуют} \right\}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие ряд Фурье – Соболева

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) q_k(x), \quad c_k(f) = \langle f, q_k \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим экспоненциальные средние ряда Фурье – Соболева

$$U_h(f; x; u; \alpha) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-h u^{\alpha}(k))\ c_k(f) q_k(x).$$

Теорема 1. *Пусть на произвольном промежутке* $[c,d] \subset (-1,1)$ *ортонормированная система многочленов* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *принадлежит классу* $\mathbb{Q}[c,d])$ *и при каждом* $h > 0$

$$\exp(-h u^{\alpha}() \ln x = O(1), \quad x \to +\infty. \tag{2}$$

1. Если $u() \in C^2(0,+\infty)$, $u''(x) < 0$, $x \in (0,+\infty)$, $0 < \alpha \le 1$, *то соотношение*

$$\lim_{h \to 0} U_h(f; x; u; \alpha) = f(x) \tag{3}$$

имеет место в каждой точке Лебега $x \in (c,d)$ *функции* f

$$f \in L^2_w(E) \cup L^1_w[c,d], \quad E = [-1,1] \backslash [c,d].$$

2. Кроме того, если функция f *непрерывна на* $[-1,1]$ *и вес* $w(x)$ *равномерно ограничен на* $[c,d]$, *то равномерно на каждом компакте* $K \subset (c,d)$ *справедливо соотношение* (3).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и в дополнение к* (2) *существует постоянная* $C = C_{u,\alpha} > 0$ *такая, что при всех* $h > 0$, $x \in (1,+\infty)$ *выполняется*

$$x h \exp(-h u^{\alpha}(x) u^{\alpha-1}(x) |u'(x)| \le C$$

и функция

$$V(x) = \alpha h u^{\alpha}(x) \{ [u'(x)]^2 - (\alpha - 1)[u'(x)]^2 - u(x) u''(x)] \} \quad (\alpha > 0)$$

имеет на $(0,+\infty)$ *конечное число нулей. Тогда при всех* $\alpha > 0$ *справедливы утверждения 1 и 2 теоремы 1, соответственно.*

2. Полиномиально-экспоненциальные методы суммирования

Пусть $\pi_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$, $a_n > 0$, — произвольный многочлен n-й степени; введем

$$W_h(f; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp -h\pi_n(k)) \quad c_k(f)p_k(x).$$

Можно показать, что справедливы утверждения теорем 1 и 2.

3. Обобщенное уравнение теплопроводности

Пусть $\{q_n(x)\}_n^\infty = 0$ — система полиномов n-й степени, ортонормированных относительно скалярного произведения (1), которые по непрерывной переменной x являются собственными функциями дифференциального оператора D: $D_x q_n = \mu n q_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\mu_n \to -\infty$, $n \to +\infty$.

Рассмотрим задачу Дирихле для обобщенного уравнения теплопроводности: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_x u(x,t)$, $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$.

Общее решение (в смысле С. Бохнера) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n^{\mu} t c_n(f) q_n(x), \quad c_n(f) = \langle f, q_n \rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Изложенные выше результаты позволяют исследовать обобщенное уравнение теплопроводности.

Замечание. Для тригонометрических рядов Фурье теоремы 1 и 2 получены в совместных работах с А. Д. Нахманом.

УДК 517.53

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

О. В. Охлупина (Брянск, Россия)
helga131081@yandex.ru

Пусть C — комплексная плоскость, $H(C)$ — множество всех целых функций в C. Если $f \in H(C)$, то обозначим через $n(r)$ число нулей функции f в круге $|z| \le r$.

При всех $0 < p < +\infty$ введем в рассмотрение класс целых функций:

$$A^p_\rho(C) = \left\{ f \in H(C) : \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p}{r^{1+\rho}} dr < +\infty \right\},$$

где $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Фактор Вейерштрасса имеет вид:

$$A\left(\frac{z}{z_k},q\right)=\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left\{\frac{z}{z_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2+...+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{z_k}\right)^q\right\},$$

где q — наименьшее целое число, для которого $\int\limits_0^{+\infty} t^{-q-1}n(t)dt=+\infty$, $q>0$, $|z|<t$, $n(r)=\{card z_k : |z|\le r\}$ (см. [1, 2]).

Замечание. Отметим, что для класса $A^p_{\omega,\rho}(C)$ с весом автором была получена характеризация корневых множеств в работе [3].

Теорема. *Пусть* $0<p<+\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $f\in A^p_{\omega,\rho}(C)$*;*

2) f *допускает представление* $f(z)=A\left(\frac{z}{z_k},q\right)\cdot\exp\{P_m(z)\}$, $m<\frac{\rho}{p}$, $\frac{\rho}{p}$ *— не целое число. При этом нули* z_k, $k=0,1,...$, *функции* f *удовлетворяют условию* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n(2^k))^p}{2^{k\rho}}<+\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1979.

2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956.

3. *Охлупина О. В.* Обобщение теоремы Валирона на случай целых функций с весом // Вестн. Брянск. гос. ун-та. Сер. точные и естественные науки. 2015. № 3. С. 400–408.

УДК 517.54

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Н. А. Павлов (Владивосток, Россия)

npamcs@gmail.com

Рассмотрим класс $\mathfrak{B}_1$ функций f голоморфных в единичном круге $U_z=\{z:|z|<1\}$, $\operatorname{Re} f\ge 0$, с разложением:

$$f(z)=a_1(z-1)+a_2(z-1)^2+a_3(z-1)^3+\angle o((z-1)^3),\quad z\to 1,\quad (1)$$

где $\angle o((z-1)^3)$ означает бесконечно малую по сравнению с функцией $(z-1)^3$ при $z\to 1$ в любом углу Штольца с вершиной в 1, лежащем в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022-П).

круге U_z. Пусть $r(D,z)$ — внутренний радиус открытого множества D относительно точки $z \in D$ [1]. Методами теории потенциала [2] установлен следующий результат для производной Шварца [1].

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathfrak{B}_1$, и справедливо разложение (1) с коэффициентами a_1 и a_2 такими, что $a_1 > 0$, $a_1 + 2\operatorname{Re} a_2 = 0$. Пусть Φ — преобразование области $f(U_z)$ в область $\Phi f(U_z)$, удовлетворяющее условию*

$$r(f(U_z), t) \leq r(\Phi f(U_z), t)$$

для достаточно малых $t > 0$. Пусть H — верхняя полуплоскость, $\Psi : i\Phi f(U_z) \to H$ — голоморфная функция, для которой

$$\Psi(w) = w + b_2 w^2 + b_3 w^3 + \angle o(w^3), \quad w \to 0,$$

где $\operatorname{Im} b_2 = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\left[-S_f(1) + a_1^2 S_\Psi(0)\right] \geq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dubinin V. N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Basel : Springer, 2014. 344 p.

2. *Дубинин В. Н.* Геометрические оценки производной Шварца // УМН. 2017. Т. 72, вып. 3 (435). С. 97–130.

УДК 517.57

О C^m–ОТРАЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМКНУТЫХ ЖОРДАНОВЫХ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ[1]

П. В. Парамонов (Москва, Россия)
petr.paramonov@list.ru

Пусть D — жорданова область в $\mathbf{R}^2$ с границей Γ, Ω — дополнение в $\mathbf{R}^2$ к замыканию $\overline{D}$ области D. Пусть $f \in C(\overline{D})$ – вещественная функция, гармоническая в D, а g — решения задачи Дирихле в Ω с граничной функцией $f|_\Gamma$. Функция g называется *гармоническим отражением* функции f относительно кривой Γ.

В докладе планируется обсудить следующий вопрос.

При заданных $m > 0$ и $k > 0$, для каких Γ из условия $f \in C^m(\overline{D})$ следует, что $g \in C^k(\overline{\Omega})$?

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/4.6).

Из теоремы 1 (следствие 3) работы [1], например, вытекает, что при $0 < k < 1/2$, $k \leq m$ ответ на указанный вопрос утвердителен *для всех* Γ.

Из теоремы 1 работы [2] следует

Теорема. *Если* Γ *— (гладкая) кривая Дини–Ляпунова, то рассматриваемое утверждение верно при* $m = k = 1$.

Отметим, что при этом из условия $f|_\Gamma \in C^1(\Gamma)$ не следует, что $f \in C^1(\overline{D})$ или $g \in C^1(\overline{\Omega})$.

Будет приведен ряд новых результатов и более конкретных вопросов по указанной тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnston E.H.* The boundary modulus of continuity of harmonic functions // Pacific J. Math. 1980. T. 90, C. 87–98.

2. *Парамонов П.В.* О C^1-продолжении и C^1-отражении субгармонических функций с областей Ляпунова-Дини на $\mathbf{R}^N$ // Матем. сб. 2008. Т. 199, No 12. С. 79–116.

УДК 517.9

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман (Смоленск, РФ)

perelmannr@gmail.com

Пусть T^+ — единичный круг, ограниченный окружностью L, на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Требуется найти все функции $F(z)$, принадлежащие классу $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ бианалитических в T^+ и непрерывно продолжимых в смысле Гельдера вместе со своими частными производными первого порядка на контур L, удовлетворяющие на L следующим двум краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} = G_{k1}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} + (-1)^{k-1}G_{k2}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}}} + i^{k-1}g_k(t),$$

$$k = 1,\ 2;\ t = x + iy \in L,$$

где $G_{kj}(t),\ g_k(t)\ (k = 1, 2;\ j = 1,\ 2)$ — заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, $\alpha(t)$ — функция сдвига контура L, удовлетворяющая условию Карлемана $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$, причем $\alpha'(t) \in H(L), \quad \alpha'(t) \neq 0$.

Следуя монографии [1], сформулированную задачу назовем первой основной трехэлементной краевой задачей типа Карлемана для бианалитических функций (кратко, задачей $\mathrm{K}_{1,2}$).

Пусть для коэффициентов задачи $K_{1,2}$ выполняются условия невырожденности, которые в случае $L = \{t : |t| = 1\}$ примут вид:

$$G_{k1}(t)G_{k1}[\alpha(t)] + \overline{G_{k2}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 1,$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + \overline{G_{k1}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 0,$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \equiv 0$$

.

В статье [2] был подробно исследован невырожденный нормальный случай задачи $K_{1,2}$, когда коэффициенты задачи не могли обращаться в нуль на контуре.

Теперь же рассмотрим исключительный случай задачи $K_{1,2}$, когда $G_{k1}(t)$ может иметь конечное число нулей на контуре, если сдвиг контура $\alpha(t)$ – прямой, или $G_{k2}(t)$ может иметь конечное число нулей на контуре, если сдвиг контура $\alpha(t)$ обратный.

Доказывается, что тогда задача $K_{1,2}$ сводится к двум трехэлементным краевым задачам типа Карлемана для аналитических функций в исключительном случае, подробно исследованным, например, в [3, 4]. Получены условия разрешимости задачи $K_{1,2}$ в исключительном случае, доказана нетеревость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.

2. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 18–26.

3. *Расулов К. М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 189 с.

4. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестн. Брянск. гос. ун-та. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 46–53.

УДК 517.518.82

КРАТКИЙ ОБЗОР ПО ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова (Москва, Россия)
petrosova05@mail.ru

Классические полиномы Бернштейна подробно изучены на стандартном отрезке $[0, 1]$ (см. [1–5]). Некоторые специальные свойства этих полиномов на $[0, 1]$ отмечены в [6–9]. В последнее время наметился особый интерес к изучению полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$ (см. [10–17]). При переходе к $[-1,1]$ ряд известных свойств стандартных полиномов Бернштейна переносится без изменений, другие, алгебраические и комбинаторные свойства, наоборот, значительно видоизменяются. Случай симметричного отрезка $[-1,1]$ важен с практической точки зрения, поскольку здесь полиномы Бернштейна сохраняют свойства четности или нечетности исходной функции $f \in C[-1,1]$. Для систематической работы с полиномами Бернштейна на $[-1,1]$ удобно иметь набор стандартных формул, аналогичных известным ранее для $[0,1]$. В настоящей заметке дан краткий свод ключевых соотношений и результатов, полученных в этом направлении.

Напомним, что для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \,(1+x)^k \,(1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Равномерная оценка уклонений в духе теоремы Поповичу [6] выглядит так

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant 2\,\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad x \in [-1,1], \qquad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f.

Для функций, удовлетворяющих на $[-1,1]$ стандартному условию Липшица с константой $L > 0$, оценка (2) дополнительно уточняется:

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{L}{\sqrt{n}}, \qquad x \in [-1,1], \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Элементарный пример функции $f(x) = L\,|x|$ показывает, что оценка (3) точна по порядку и с точки зрения присутствия константы L.

Для разности двух последовательных полиномов Бернштейна действует аналог формулы Темпла [7], а именно, при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$B_{n+1}(f,x) - B_n(f,x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k}(f)\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1} \quad (4)$$

с коэффициентами

$$Q_{n,k}(f) = C_{n+1}^k\, f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) - C_n^k\, f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - C_n^{k-1}\, f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right).$$

С помощью формулы (4) можно установить следующее правило регулярного попарного совпадения полиномов Бернштейна.

Пусть функция $f \in C[-1,1]$ кусочно линейна на $[-1,1]$ с конечным числом точек излома, причем абсциссы всех точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей

$$x_j = \frac{p_j}{q_j}, \qquad j = 1, \ldots, r,$$

где

$$p_j \in \mathbb{Z}, \qquad q_j \in \mathbb{N}, \qquad |p_j| < q_j, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Пусть $q = \text{НОК}(\, q_1, \ldots, q_r \,)$. Тогда, если все числа

$$p_1,\ q_1,\ \ldots,\ p_r,\ q_r \tag{5}$$

являются нечетными, то полиномы Бернштейна функции f подчинены правилу попарного склеивания

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Если же среди чисел (5) есть хотя бы одно четное число, то правило склеивания приобретает вид

$$B_{2qm+1}(f,x) = B_{2qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Подробное доказательство правил (6), (7) дано в статье [12].

Явная алгебраическая запись полиномов (1) по степеням переменной x имеет вид

$$B_n(f,x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f)\, x^m, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$a_{n,m}(f) = \frac{1}{2^n}\, C_n^m \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k\, f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \tag{9}$$

со значениями

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j\, C_m^j\, C_{n-m}^{k-j}. \tag{10}$$

Числа $D_{n,m}^k$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ с переменными n, k образуют своеобразные «трапеции», построенные по правилу Паскаля для определенных начальных и краевых условий (подробнее см. [10, 16]).

Эти же трапеции возникают при разложении *бибинома*

$$(1-x)^m\,(1+x)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k\, x^k \tag{11}$$

с фиксированным $m \in \mathbb{N}$ и переменным $n \geqslant m$.

Формулы (8)–(11) служат источником многочисленных комбинаторных соотношений, связанных с полиномами Бернштейна на $[-1,1]$ (см. [16]).

Отдельно обсудим важный пример $f(x)=|x|$ на $[-1,1]$. Обозначим полиномы Бернштейна такой функции через $B_n(x)$. Применяя формулу (4), получаем, что

$$B_{2m+1}(x)=B_{2m}(x), \qquad m\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

$$B_{2m+2}(x)=B_{2m+1}(x)-\frac{1}{m+1}\,2^{-2m-1}\,C_{2m}^{m}\,(1-x^2)^{m+1}, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Отсюда выводим разложение

$$B_{2m}(x)=1-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\,2^{-2k}\,C_{2k}^{k}\,(1-x^2)^{k}, \qquad m\in\mathbb{N}, \tag{14}$$

упомянутое без доказательства в работе Поповичу [6]. Взяв вторую производную, имеем

$$B_{2m}''(x)=2^{-2m+1}\,C_{2m}^{m}\,m\,(1-x^2)^{m-1}, \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

После раскрытия бинома и двукратного интегрирования устанавливаем явную алгебраическую запись

$$B_{2m}(x)=2^{-2m}\,C_{2m}^{m}\left[1+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\,C_{m}^{k}\,x^{2k}\right], \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

Полное обоснование формул (12)–(16) см. в [13]. Ряд специальных соотношений, следующих из сопоставления формулы (16) с общим подходом (8)–(10), отмечен в [17].

Отдельно обсудим поведение коэффициентов в формуле (16). Требуется при фиксированном номере $n=2m$ найти максимальный (по модулю) коэффициент и оценить его рост при $n=2m\to\infty$. Введем обозначение

$$a_{2m,2k}=2^{-2m}\,C_{2m}^{m}\,(-1)^{k-1}\,\beta_m(k), \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad k=1,\,\ldots,\,m,$$

с положительными числами

$$\beta_m(k)=\frac{1}{2k-1}\,C_m^k, \qquad m\in\mathbb{N}, \qquad k=1,\,\ldots,\,m. \tag{17}$$

Обозначим еще

$$\mu_{2m}\equiv\max_{1\leqslant k\leqslant m}|a_{2m,2k}|=2^{-2m}\,C_{2m}^{m}\max_{1\leqslant k\leqslant m}\beta_m(k), \qquad m\in\mathbb{N}, \tag{18}$$

с числами $\beta_m(k)$ из формулы (17). Установлено, что для величины (18) верна асимптотическая формула

$$\mu_{2m} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2}, \qquad m \to \infty,$$

и справедлива оценка

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2} < \mu_{2m} < \ 1.2215 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{2^m}{m^2},$$

действующая при всех натуральных $m \geqslant 8$. Важные детали отличают этот пример от случая симметричного модуля на стандартном отрезке $[0,1]$ (ср. [14] и [8]).

Отметим еще работу [11], где указаны основные формулы, связанные с полиномами Бернштейна для степенной функции $f_p(x) = x^p$ при $p \in \mathbb{N}$ и $x \in [-1,1]$.

Выражаю благодарность И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании полиномов Бернштейна на симметричном отрезке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. 130 p.

2. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin ; Heidelberg ; N.Y. : Springer-Verlag. 1993. 450 p.

3. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна : учеб. пособ. к спецкурсу. Ленинград : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

4. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

5. *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

6. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. Vol. 10. P. 49–54.

7. *Temple W. B.* Stieltjes integral representation of convex functions // Duke Math. J. 1954. Vol. 21, № 3. P. 527–531.

8. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вест. Челяб. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

9. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научн. конф. «Герценовские Чтения – 2015». СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 115–121.

10. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : Материалы научн. конф. «Герценовские Чтения – 2015». СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. С. 121–124.

11. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Полиномы Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. 2015. Вып. 16. С. 215–220.

12. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.

13. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 425–435. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

14. *Петросова М. А.* О скорости роста максимальных коэффициентов в полиномах Бернштейна, взятых от симметричного модуля на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 209–211.

15. *Петросова М. А.* О поведении коэффициентов в полиномах Бернштейна для симметричного модуля на симметричном отрезке // Математика и информатика : материалы междунар. конф. М. : МПГУ, 2016. С. 77–79.

16. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. 2016. Вып. 17. С. 177–182.

17. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О некоторых комбинаторных задачах, возникших при явной записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. Воронежская зимн. матем. шк. Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. С. 162–163.

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА ДИСКРЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

С. С. Платонов (Петрозаводск, Россия)
platonov@psu.karelia.ru

Пусть G — локально компактная абелева группа (LCA-группа), и пусть $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство (ТВП), состоящее из комплекснозначных функций на G. Будем называть пространство $\mathcal{F}$ *трансляционно инвариантным*, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов) $\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, y \in G$, и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или *обобщенным характером* называется произвольный непрерывный гомоморфизм из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел. Частным случаем экспоненциальных функций являются характеры — непрерывные гомоморфизмы группы G в группу комплексных чисел, по модулю равных 1.

Пусть $\mathcal{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G, $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

Определение 1. *В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный анализ, если любое ненулевое инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$ содержит экспоненциальную функцию.*

Классическим результатом о спектральном анализе является теорема о том, что для любой LCA-группы G спектральный анализ справедлив в функциональном пространстве $L^\infty(G)$, снабженном слабой топологией (см., например, [1, гл. II, §3, предл. 3]).

Одним из естественных функциональных пространств, в которых можно изучать спектральный анализ, является пространство $C(G)$ всех непрерывных функций на LCA-группе G. Наиболее изучен здесь случай, когда G — дискретная абелева группа. Тогда пространство $C(G)$ состоит из всех комплекснозначных функций на G и снабжается топологией поточечной сходимости. Для дискретных абелевых групп в работе [2] получен критерий справедливости спектрального анализа в пространстве $C(G)$. Для произвольных LCA-групп вопрос об описании групп, для которых справедлив спектральный анализ в пространстве $C(G)$ остается открытым.

Другим естественным функциональным пространством является пространство $\mathcal{S}'(G)$ всех обобщенных функций медленного роста на LCA-группе G. Определение пространства $\mathcal{S}'(G)$ для произвольной LCA-группы G дано в работе Ф. Брюа [3].

Рассмотрим случай, когда G — дискретная абелева группа. В этом случае обобщенные функции из $\mathcal{S}'(G)$ совпадают с обычными функциями, поэтому будем называть пространство $\mathcal{S}'(G)$ пространством функций медленного роста на G. Приведем удобное для дальнейшего определение пространства $\mathcal{S}'(G)$ на дискретной абелевой группе G. Отдельно рассмотрим случай, когда G — конечно порожденная абелева группа, и общий случай, когда G — произвольная абелева группа.

Пусть G — конечно порожденная бесконечная абелева группа, $v_1, \dots, v_n$ — система образующих группы G. Любой элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = t_1v_1 + \dots + t_nv_n$, где $t_j \in \mathbb{Z}$ (такое представление может быть не единственным). Для $x \in G$ определим число $|x| \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ равенством

$$|x| := \min\{|t_1| + \dots + |t_n| : x = t_1v_1 + \dots + t_nv_n,\ t_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n\}.$$

Для функции $x \mapsto |x|$ справедливы следующие свойства: 1) $|x| \ge 0$ и

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $|x+y| \le |x|+|y|$, $x, y \in G$. Функция $|x|$ является частным случаем квазинормы на группе G. Будем называть ее квазинормой, порожденной системой образующих $v_1, \ldots, v_n$.

Для любого $k > 0$ через $\mathcal{S}'_k(G)$ обозначим множество всех комплекснозначных функций $f(x)$ на G, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|(1+|x|)^{-k} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1}$$

Относительно нормы

$$\|f\|_k := \sup_{x \in G} |f(x)|(1+|x|)^{-k}$$

множество $\mathcal{S}'(G)$ является банаховым пространством. Очевидно, что $\mathcal{S}'_{k_1}(G) \subseteq \mathcal{S}'_{k_2}(G)$ при $k_1 < k_2$, причем вложение непрерывно.

Пусть

$$\mathcal{S}'(G) := \bigcup_{k>0} \mathcal{S}'_k(G).$$

Пространство $\mathcal{S}'(G)$ снабдим топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathcal{S}'_k(G)$ (см., например, [4]). Тогда $\mathcal{S}'(G)$ является локально выпуклым пространством. Используя свойства квазинормы легко доказать, что ТВП $\mathcal{S}'(G)$ будет трансляционно инвариантным пространством.

Теперь рассмотрим общий случай, когда G — произвольная бесконечная абелева группа. Для любого конечного подмножества $P \subset G$ обозначим через G_P подгруппу в G, порожденную множеством P. Так как группа G_P конечно порожденная, то уже определено пространство $\mathcal{S}'(G_P)$. Для любой функции f на группе G пусть $\sigma_P(f) = f|_{G_P}$ — ограничение функции f на подгруппу G_P.

По определению, пространство $\mathcal{S}'(G)$ состоит из всех функций f на группе G, таких, что $\sigma_P(f) \in \mathcal{S}'(G_P)$ для любого конечного подмножества $P \subset G$. Пространство $\mathcal{S}'(G)$ снабжается топологией проективного предела локально выпуклых пространств $\mathcal{S}'(G_P)$, т. е. слабейшей локально выпуклой топологией, для которой все отображения $\sigma_P : \mathcal{S}'(G) \mapsto \mathcal{S}'(G_p)$ непрерывны (определение и свойства проективных пределов локально выпуклых пространств см., например, в [4]). Тогда пространство $\mathcal{S}'(G)$ является локально выпуклым пространством.

Теорема 1. *Для любой дискретной абелевой группы G в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ справедлив спектральный анализ.*

Любая абелева группа G является модулем над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. Мощность максимальной линейно независимой над $\mathbb{Z}$ системы элементов бесконечного порядка группы G называется рангом без кручения группы G. Пусть $r_0(G)$ — ранг без кручения группы G. Отметим, что в работе [1] доказано, что спектральный анализ в пространстве $C(G)$ справедлив тогда и только тогда, когда мощность $r_0(G)$ меньше, чем континуум. В отличие от этого результата, по теореме 1, спектральный анализ в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ справедлив для любой дискретной абелевой группы G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М. : Мир, 1972.

2. *Laczkovich M., Székelyhidi L.* Harmonic analysis on discrete Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 133 (6). P. 1581–1586.

3. *Bruhat F.* Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étudedes représentations des groupes p-adiques // Bull. Soc. math. France. 1961. Vol. 89. P. 43–75.

4. *Робертсон А., Робертсон Б.* Топологические векторные пространства. М. : Мир, 1967.

УДК 517.9

СЛАБЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ СО СВОБОДНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М. Г. Плешаков (Саратов, Россия)
pleshakovmg@gmail.com

Обозначим X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E — выпуклая функция, определенная на X. Задачей выпуклой оптимизации является поиск приближенного решения задачи

$$E(x) \to \min_{x \in X}. \tag{1}$$

Множество $\mathcal{D} \subset X$ называют словарем в X (см., например, [1]), если каждый элемент из $\mathcal{D}$ имеет норму, не превосходящую единицу и $\overline{\operatorname{span}\mathcal{D}} = X$. Словарь $\mathcal{D}$ называют симметричным, если для каждого $g \in \mathcal{D}$ также $-g \in \mathcal{D}$. Нас интересует приближенное разреженное решение задачи (1):

$$E(x) \to \inf_{x \in \Sigma_m(\mathcal{D})}, \tag{2}$$

где $\Sigma_m(\mathcal{D})$ — множество m-членных полиномов из словаря $\mathcal{D}$.

Для нахождения наилучших m-членных приближений могут быть применены жадные алгоритмы. Алгоритм Франка – Вульфа [2], который также известен как метод условного градиента [3], является одним из самых известных жадных алгоритмов для нахождения оптимальных решений условных задач выпуклой оптимизации. Обобщили этого алгоритма на случай произвольных Банаховых пространств получено В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым в [4]. В последнее время были получены новые результаты по сходимости жадных алгоритмов [1–10].

Используя приближенный слабый чебышевский жадный алгоритм AWCGA (Approximate Weak Chebyshev Greedy Algorithm) решения задачи аппроксимации в равномерно гладких банаховых пространствах, предложенный в статье [11], формулируется аналог слабого жадного алгоритма со свободной релаксацией (Weak Greedy Algorithm with Free Relaxation (co)) для приближенного решения задачи выпуклой оптимизации.

Ослабляющей последовательностью назовем последовательность действительных чисел $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $0 \le t_n \le 1$, $n \ge 1$. Возмущающая последовательность $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел таких, что $0 \le \delta_n \le 1$, $n \ge 0$. Последовательность ошибок $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел таких, что $\eta_n \ge 0$, $n \ge 1$. Положим $G_0 := 0$. Для $n \ge 1$ сформулируем индуктивное определение алгоритма AWGAFR(co).

(1) F_{n-1} — произвольный функционал, удовлетворяющий неравенству

$$\langle {F'}_{n-1}(G_{n-1}), \varphi_n\rangle \ge (1-\delta_{n-1})\langle -E'(G_{n-1}), \varphi_n\rangle,$$

где $\varphi_n \in \mathcal{D}$ – любой элемент, удовлетворяющий условию

$$\langle {F'}_{n-1}(G_{n-1}), \varphi_n\rangle \ge t_n \sup_{g\in\mathcal{D}} \langle {F'}_{n-1}(G_{n-1}), g\rangle.$$

(2) Ищем w_n и λ_n такие, что

$$F_{n-1}((1-w_n)G_{n-1} + \lambda_n\varphi_n) \le (1+\eta_n) \inf_{\lambda,w} F_{n-1}((1-w)G_{n-1} + \lambda\varphi_n)$$

и определим $G_n := (1-w_n)G_{n-1} + \lambda_n\varphi_n$.

Теорема. *Пусть E — равномерно гладкая выпуклая функция с модулем гладкости $\rho(E,u) \le \gamma u^q$, $1 < q \le 2$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ослабляющая последовательность. Для алгоритма AWGAFR(co) с возмущающей последовательностью $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ и ограниченной последовательностью ошибок $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такими, что для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\delta_{n_k} = O(t^p_{n_k+1})$, $\eta_{n_k} = O(t^p_{n_k+1})$, где $p = q/(q-1)$, справедлива следующая оценка*

$$E(G_n) - \inf_{g\in\mathcal{D}} E(g) \le C\left(1 + \sum_{k=1}^{N} t^p_{n_k}\right)^{-1/p},$$

где $C = C(q,\gamma,\eta_0)$, $N = N(n) = \max\{k \in N : n_k \le n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, no. 2. P. 269–296.

2. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1—2. P. 95–110.

3. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787–823.

4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремалыных задач. Л. : Ленингр. ун-т, 1968. 180 с.

5. *Temlyakov V. N.* Dictionary descent in optimization // Analysis Mathematica. 2016. Vol. 42, № 1. P. 69–89.

6. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Convex optimization on Banach spaces // Found. Comput. Math. 2016. Vol. 16, № 2. P. 369–394.

7. *Nguyen H., Petrova G.* Greedy Strategies for Convex Optimization // Calcolo. 2017. Vol. 54, № 1. P. 207–224.

8. *Freund R. M., Grigas P.* New analysis and results for the Frank-Wolfe method // Math. Program. 2016. Vol. 155, № 1–2. P. 199–230.

9. *Jaggi M.* Revisiting Frank–Wolfe: Projection-free sparse convex optimization // ICML'13 : Proc. 30th Intern. Conf. on Machine Learning. Atlanta, GA, USA, 2013. P. 427–435.

10. *Clarkson K. L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // ACM Transactions on Algorithms. 2010. Vol. 6, № 4. P. 1–30.

11. *Dereventsov A.V.* On the approximate weak Chebyshev greedy algorithm in uniformly smooth Banach spaces // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 436, № 1. P. 288–304.

УДК 517.518

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ВИЛЕНКИНА

М. Г. Плотников (Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com

Пусть $\{f_n\}$ — система функций, заданных на некотором множестве X. Множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, $\mathcal{U}$-*множеством*) для рядов $\sum\limits_n a_n f_n(x)$, если любой такой ряд, сходящийся к нулю на $X \setminus A$, содержит лишь нулевые коэффициенты.

Континуальные множества единственности для сходящихся по прямоугольникам кратных рядов Уолша изучались в работах [1–4] и ряде других. Наиболее широкие известные классы $\mathcal{U}$-множеств для таких рядов построены в [3, 4]. В [5–8] строились $\mathcal{U}$-множества для сходящихся по кубам и λ-сходящихся кратных рядов Уолша на многомерной двоичной группе G^d. Отметим [9], что классы $\mathcal{U}$-множеств при таких типах сходимости и при сходимости по прямоугольникам не совпадают.

Результаты работы [6] были обобщены [10, 11] на случай кратных рядов по системам характеров нульмерных компактных абелевых групп.

В частности, в [11] показано, что существуют континуальные множества единственности для таких рядов при сходимости по кубам.

Здесь мы рассматриваем *$\mathcal{P}$-ичные группы Виленкина* $G_{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность простых чисел. $G_{\mathcal{P}}$ есть множество последовательностей

$$t = (t_0, t_1, \ldots), \quad t_k = 0, \ldots, p_k - 1,$$

а групповая операция — покоординатное сложение по модулям p_k. $G_{\mathcal{P}}$ является нульмерной компактной абелевой группой. Системой характеров этой группы служит *система Виленкина* $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$. Положим $m_0 = 1$ и $m_k = p_0 p_1 \ldots p_{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots$. В нумерации Пэли функции V_n определяются формулами

$$V_n(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(R_k(t)\right)^{n_k}, \quad R_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\frac{2\pi i t_k}{p_k}\right),$$

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k m_k \quad (n_k = 0, \ldots, p_k - 1), \quad t = (t_0, t_1, \ldots) \in G.$$

Функции $R_k(t)$ называют *функциями Радемахера* на $G_{\mathcal{P}}$.

Следующий результат дает достаточное условие принадлежности заданного множества семейству континуальных $\mathcal{U}$-множеств для кратных рядов по системе $\{V_n\}$. Напомним, что множество $A \subset X$ называют *множеством Дирихле* для системы функций $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, заданной на X, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |1 - g_n(x)| = 0.$$

Теорема 1. *Предположим, что заданы $\lambda > 1$ и возрастающая последовательность $\{s_k\}$ натуральных чисел. Пусть $A \subset (G_{\mathcal{P}})^d$ — произвольное множество Дирихле для системы $\{g_k\}$, где*

$$g_k \stackrel{\text{def}}{=} R_{s_k}\left(t^1\right) \cdot \ldots \cdot R_{s_k}\left(t^d\right), \quad \left(t^1, \ldots, t^d\right) \in (G_{\mathcal{P}})^d.$$

Тогда A является множеством единственности для d-кратных рядов по системе $\{V_n\}$ при λ-сходимости.

Отметим, что каждое множество A из теоремы 1 можно вложить в некоторое совершенное множество Дирихле для системы $\{g_k\}$.

Теорему 1 можно усилить, заменив сходимость к нулю сходимостью к суммируемой функции.

Теорема 2. *В условиях предыдущей теоремы предположим, что d-кратный ряд по системе Виленкина λ-сходится к конечной сумме $f(\mathbf{t})$*

для всех $\mathbf{t} \in (G_{\mathcal{P}})^d \setminus A$. *Если функция* f *суммируема, то данный ряд является ее рядом Фурье – Виленкина.*

В [7] для кратных рядов Уолша задача восстановления рядов, сходящихся вне множеств Дирихле для систем $\{g_k\}$, была решена для сходимости к произвольным функциям f. Для этого был построен процесс интегрирования, определенный на классе, включающем все подобные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скворцов В. А.* О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. 1973. № 6. С. 77–79.

2. *Лукомский С. Ф.* О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 7. С. 937–945.

3. *Гоголадзе Л. Д.* К вопросу восстановления коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, № 2. С. 83–90.

4. *Жеребьева Т. А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 2. С. 14–21.

5. *Плотников М. Г.* О множествах единственности для кратных рядов Уолша // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 2. С. 265–279.

6. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

7. *Плотников М. Г.* Квазимеры на группе G^m, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 12. С. 131–156.

8. *Плотников М. Г.* λ-Сходимость кратных рядов Уолша -– Пэли и множества единственности // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 2. С. 292–301.

9. *Lukomskii S. F.* On a U-set for multiple Walsh series // Anal. Math. 1992. Vol. 18, № 2. P. 127–138.

10. *Юрченко И. С.* О множествах единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 35–43.

11. *Юрченко И. С.* U-множества для системы характеров нульмерной группы в смысле сходимости по кубам // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. СаратовЁ: ООО «Научная книга», 2016. С. 349–351.

УДК 517.955+004.94

МЕТОД ДВИЖЕНИЯ РАЗРЫВОВ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Подорога, И. В. Тихонов (Москва, Россия)
anastasiapodoroga@gmail.com, ivtikh@mail.ru

При макроскопическом моделировании транспортных потоков часто используют квазилинейное уравнение дорожного движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $\rho = \rho(x,t)$ — плотность транспортного потока в точке x в момент времени t. Обычно предполагают, что $0 \leqslant \rho(x,t) \leqslant \rho_{\max}$ с постоянным значением $\rho_{\max} > 0$. Функция $q = Q(\rho)$ называется *фундаментальной диаграммой* дорожного движения (см. [1]). Она выражает зависимость интенсивности движения потока от его плотности. Как правило, функция $Q(\rho)$ выпукла вверх на промежутке $[0, \rho_{\max}]$ и обращается в нуль на его концах: $Q(0) = Q(\rho_{\max}) = 0$. Зададим также начальное условие

$$\rho(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \rho_{\max}$ при $x \in \mathbb{R}$.

Классическая теория задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений указывает на ряд особых проблем, связанных с наличием разрывных решений (см. [1–5]). Это осложняет математическое моделирование плотности $\rho(x,t)$ при $t > 0$. Краткий обзор численных методов для квазилинейного уравнения (1) см. в [6]. Обсудим отдельно предложенный недавно *метод движения разрывов*, эффективно работающий при специальных предположениях.

Выделим класс кусочно линейных фундаментальных диаграмм

$$Q(\rho) = k_j\rho + b_j, \qquad \rho_{j-1} \leqslant \rho \leqslant \rho_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $n \geqslant 2$ — фиксированное число линейных кусков (*транспортных фаз*) с границами

$$0 \equiv \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_{n-1} < \rho_n \equiv \rho_{\max}.$$

Вещественные коэффициенты $k_1, b_1, \ldots, k_n, b_n$ выбраны так, чтобы функция $Q(\rho)$, заданная в (3), являлась непрерывной и выпуклой вверх на $[0, \rho_{\max}]$. Начальное условие (2) будем задавать в классе кусочно постоянных функций.

Итак, возьмем кусочно линейную фундаментальную диаграмму $Q(\rho)$ и кусочно постоянное начальное условие $\varphi(x)$. Тогда обобщенное решение $\rho(x,t)$ поставленной задачи Коши (1), (2) будет определено в классе кусочно постоянных функций, и это решение можно конструктивно построить, указав алгоритм движения имеющихся разрывов.

Выделим один разрыв $x = \xi(t)$ с соответствующими значениями плотности

$$\rho^+ = \rho(\xi(t)+0, t), \qquad \rho^- = \rho(\xi(t)-0, t) \tag{4}$$

справа и слева от него. Согласно общей теории (см. [4]) движение разрыва определяется известным *условием Гюгонио*

$$\xi'(t) = \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}. \tag{5}$$

Для создания правильных «энтропийных» разрывов введём дополнительное *условие Олейник* [5]. Нужно, чтобы величины (4) подчинялись неравенству

$$(Q(\rho) - l(\rho))(\rho^+ - \rho^-) \geqslant 0 \tag{6}$$

при всех промежуточных значениях ρ, находящихся между ρ^+ и ρ^-. Здесь

$$l(\rho) \equiv \frac{Q(\rho^+) - Q(\rho^-)}{\rho^+ - \rho^-}\,(\rho - \rho^-) + Q(\rho^-).$$

Условие Олейник (6) обеспечивает однозначное построение обобщенного решения, исключая из рассмотрения примеры, разобранные в [7].

Перечисленные соображения позволяют формализовать алгоритм для эволюции разрывов решения $\rho(x,t)$ при $t > 0$. Условие Гюгонио (5) в случае кусочно постоянной функции $\rho(x,t)$ задает постоянную скорость движения каждого разрыва $\xi(t)$ для тех времен t, пока это разрыв сохраняется. При пересечении разрывов они объединяются в один результирующий разрыв, у которого значение плотности слева соответствует значению плотности слева для самого левого из пересекающихся разрывов, а значение плотности справа — значению плотности справа для самого правого из пересекающихся разрывов.

Если разрыв $\xi(t)$ в момент времени $t_0 \geqslant 0$ не удовлетворяет условию Олейник (6), то такой разрыв заменяется на несколько новых «промежуточных» разрывов, каждый из которых уже удовлетворяет условию Олейник (подробнее см. в [6]). Таким образом, возникает *веер разрывов* на плоскости (x,t), исходящий из точки $(\xi(t_0), t_0)$.

Метод движения разрывов в своей изначальной форме применим лишь для кусочно постоянных начальных условий (2) и кусочно линейных фундаментальных диаграмм вида (3). Во всех других случаях можно использовать соображения аппроксимации, заменяя произвольную кусочно гладкую диаграмму $Q(\rho)$ на близкую к ней кусочно линейную диаграмму $\widetilde{Q}(\rho)$, а кусочно гладкое начальное условие $\varphi(x)$ на соответствующее кусочно постоянное условие $\widetilde{\varphi}(x)$.

Данный подход сочетается также с рядом других квазилинейных дифференциальных уравнений, отличных от уравнения дорожного движения. Проведенные тесты дали, например, хорошие результаты при аппроксимации известного *уравнения Хопфа*

$$v_t + v v_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0, \tag{7}$$

действующего для поля скоростей $v = v(x,t)$ в модели инерционного движения «нейтральных» частиц (см. [2]). В докладе будут представлены примеры и иллюстрации работы компьютерной программы, реализующей метод движения разрывов, в том числе и для уравнения (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гасников А. В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учеб. пособ. / Под ред. А. В. Гасникова. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

2. *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка (Учебное пособие). М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

3. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

4. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М. ; -Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 296 с.

5. *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // УМН. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.

6. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Компьютерное моделирование решений квазилинейного уравнения дорожного движения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2017. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2017. С. 216–225.

7. *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Неединственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения дорожного движения в модели Нагеля – Шрекенберга // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 222–224.

УДК 517.977

О НЕПРЕРЫВНЫХ ВАРИАЦИЯХ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, Россия)

polovinkin.es@mipt.ru

Работа посвящена развитию некоторых результатов, связанных с получением необходимых условий оптимальности в работах [1–4]. Доказано свойство непрерывной зависимости траекторий дифференциального включения с неограниченной измеримо-псевдолипшицевой правой частью от начальных приближений в банаховом пространстве. Это свойство является важнейшей частью прямого метода [3–4] получения необходимых условий оптимальности в задаче Майера при ограничениях в виде дифференциального включения.

Ключевые слова: многозначное отображение, дифференциальное включение, условие измеримо-псевдолипшицевости многозначного отображения.

1. Основные обозначения и определения

Будем обозначать через $T := [0, 1]$ отрезок прямой с мерой Лебега на нем и σ-алгеброй $\mathcal{L}$ измеримых по Лебегу множеств. Через E

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00259а).

обозначаем сепарабельное банахово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathcal{B}$, а через E^* - его сопряженное пространство. Через $B_r(a) := \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ ($\overline{B_r(a)} := \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$) обозначаем открытый (замкнутый) шар с центром в точке a радиуса $r > 0$ в пространстве E. Обозначаем через $\varrho(x, A) := \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$ — расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$. Через $\mathcal{P}(E)$ обозначаем множество всех подмножеств из банахова пространства E, через $\mathcal{F}(E)$ — множество непустых замкнутых подмножеств из пространства E.

Через $AC(T, E)$ обозначаем *линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций*, т.е. таких, что для каждой функции $f\colon T \to E$ из этого пространства существует суммируемая по Бохнеру функция $v : T \to E$ такая, что для каждого $t \in T$ справедливо равенство

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t v(\tau) d\tau,$$

т.е. функция $v : T \to E$ играет роль производной (в конечномерном случае с ней совпадает) и будет обозначаться как $f' := v$.

Пусть для многозначного отображения $F\colon T \times E \to \mathcal{P}(E)$ определено *дифференциальное включение* вида

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad t \in T. \tag{1}$$

Через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ будем обозначать множество в $AC(T, E)$ всех траекторий $x(\cdot, x_0)$ дифференциального включения (1) на отрезке T при условии, что начальная точка $x_0 \in C_0$.

Пусть заданы некоторое множество $C_0 \in \mathcal{F}(E)$ и некоторая траектория $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ дифференциального включения (1), которую будем рассматривать в качестве тестовой функции. Обобщая определения работ [2–4], сформулируем условие *строгой измеримо – псевдолипшицевости* отображения F для случая такой тестовой функции.

Определение 1. Говорят, что $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ *удовлетворяет условию строгой измеримо – псевдолипшицевости около траектории* $\widehat{x}(\cdot)$, если существуют число $\varepsilon > 0$ и функции $l(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ такие, что выполнены следующие три гипотезы:

Гипотеза 1 (псевдолипшицевость). *Существует измеримая функция* $R : T \to \mathbb{R}^1_+ \cup (+\infty)$ *такая, что для множества*

$$G(t, x) := F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t) B_1(0)), \quad \forall t \in T, \quad x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t)) \tag{2}$$

выполнены условия:

2.1) *для любой функции* $v(\cdot) \in C(T, E)$, *у которой* $v(t) \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$ *при всех* $t \in T$, *отображение* $t \to G(t, v(t))$ *измеримо на отрезке* T;

2.2) *для п.в.* $t \in T$ *и любых* x_1, $x_2 \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t))$ *справедливы включения*

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}.$$

Гипотеза 2 (умеренный рост). *Существуют число* $\gamma \in (0, 1)$ *и функция* $\eta(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ *такие, что при п.в.* $t \in T$ *верна оценка* $0 < \eta(t) \leq \gamma R(t)$ *и справедливо неравенство*

$$F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + \eta(t)B_1(0)) \neq \emptyset, \quad \forall x \in B_\varepsilon(\widehat{x}(t)).$$

Гипотеза 3 (невырожденность). *Справедливо неравенство*

$$\varepsilon\frac{l(t)}{m(1) + 1} \leq \eta(t) \quad \text{п.в.}\, t \in T.$$

Здесь и далее $m(t) := \int_0^t l(\tau)d\tau, \quad t \in T$, $\widetilde{\gamma} := \min\left\{\frac{1-\gamma}{\gamma};\, \frac{1}{2}e^{-m(1)}\right\}$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $F\colon T \times E \to \mathcal{F}(E)$ удовлетворяет определению 1.

2. Основной результат

Для получения основного результата (теоремы 1) приведем некоторые определения и леммы.

Определение 2. *Для произвольной функции* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ *определим множество*

$$D_0(F, \rho_0(\cdot)) := \Big\{x(\cdot) \in AC(T, E) \mid \|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{AC} < \frac{\varepsilon}{4}; \tag{3}$$

$$\varrho(x'(t), F(t, x(t))) \leq \rho_0(t);\, \eta(t) + \|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \leq \frac{1}{\gamma}\eta(t) \text{ п.в. } t \in T\Big\}.$$

Лемма 1. *Пусть задана функция* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, *удовлетворяющая неравенству* $0 \leq \rho_0(t) \leq \widetilde{\gamma}\,\eta(t)$ *при п.в.* $t \in T$. *Тогда для любого* $x_0 \in E$ *такого, что* $\|x_0 - \widehat{x}(0)\| < \delta_0$, *где* $\delta_0 := \widetilde{\gamma}\,\frac{\varepsilon}{(m(1)+1)}\,e^{-m(1)-1}$, *существует функция* $x(\cdot) \in D_0(F, \rho_0(\cdot))$ *такая, что* $x(0) = x_0$.

Замечание. В частности, в случае, когда $\rho_0(t) = 0$, из леммы 1 следует, что для каждого $x_0 \in C \cap B_{\delta_0}(\widehat{x}(0))$ гипотеза о невырожденности (гипотеза 3) гарантирует существование траектории $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$ такой, что $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{AC} < \frac{\varepsilon}{4}$.

Выберем параметр $a \in (0, \varepsilon)$. Для всякой функции $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ определим последовательность функций $\{\rho_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ по формуле

$$\rho_k(t) := l(t)\left(\vartheta_k + \int_0^t \rho_{k-1}(\tau)d\tau\right), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где
$$\vartheta_k := \frac{b}{2^k}e^{-2m(1)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b := \frac{a}{4(m(1)+1)}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Для любой функции $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \rho_k(t)$, порожденный последовательностью* (4), (5), *поточечно сходится, и справедлива оценка*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k(t) \le l(t)\left(b + \int_0^t e^{m(t)-m(\tau)}\rho_0(\tau)d\tau\right) \quad \text{при п.в. } t \in T.$$
В частности, если функция $\rho_0(\cdot)$ удовлетворяет неравенству
$$\rho_0(t) \le \widetilde{\gamma}\,\varepsilon\,\frac{l(t)}{m(1)+1}, \quad \text{п.в. } t \in T, \tag{6}$$
то справедливы оценки
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k(t) \le \frac{3}{4}\eta(t), \quad \sum_{k=0}^{+\infty}(\rho_k(t) + \vartheta_k/4) < \eta(t), \quad \text{п.в. } t \in T.$$

Определение 3. Пусть функции $\rho_k(\cdot)$ и числа ϑ_k определены соотношениями (4), (5), (6). При каждом $k \in \mathbb{N}$ определим множество
$$D_k(F, \rho_k(\cdot)) := \Big\{x(\cdot) \in AC(T,E) \mid \|x(\cdot) - \widehat{x}'(\cdot)\|_{AC} < \frac{\varepsilon}{4} +$$
$$+ \sum_{l=0}^{k-1}\left(\vartheta_{l+1} + \int_0^1 \rho_l(\tau)d\tau\right);\ \varrho(x'(t), F(t,x(t))) \le \rho_k(t); \tag{7}$$
$$\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\vartheta_{l+1} + \rho_l(t)\right) + \|x'(t) - \widehat{x}'(t)\| \le \frac{1}{\gamma}\,\eta(t), \ \text{ п.в. } t \in T\Big\}$$

Лемма 3. *При любом $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ множество $D_k(F, \rho_k(\cdot))$ не пусто, для любого $x(\cdot) \in D_k(F, \rho_k(\cdot))$ справедливо неравенство $\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{AC} < \varepsilon$ и при п.в. $t \in T$ справедливы равенства:*
$$\varrho(x'(t),\ F(t,x(t))) = \varrho(x'(t),\ G(t,x(t)));$$
$$F(t,x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)}) = G(t,x(t)) \cap (x'(t) + r(t)\overline{B_1(0)}),$$
где $r(t) := \varrho(x'(t),\ F(t,x(t))) + \frac{1}{4}\vartheta_{k+1}$.

Лемма 4. *Зафиксируем номер* $k \in \mathbb{N}$, *множество* $S := D_{k-1}(F, \rho_{k-1}(\cdot))$ *из* (7) *и число* $\vartheta = \vartheta_k$ *из* (5). *Существует непрерывное отображение* $f : D_{k-1}(F, \rho_{k-1}(\cdot)) \to D_k(F, \rho_k(\cdot))$ *такое, что для любого* $x(\cdot) \in S$ *при всех* $t \in T$ *справедливы неравенства*

$$\int_0^t \|f'(x(\cdot))(\tau) - x'(\tau)\| d\tau \leq \frac{3}{4}\vartheta + \int_0^t \varrho(x'(\tau), F(\tau, x(\tau))) d\tau,$$

$$\int_0^t \varrho(f'(x(\cdot))(\tau), F(\tau, f(x(\cdot))(\tau))) d\tau \leq \frac{1}{2}\vartheta + \int_0^t l(\tau)\|f(x(\cdot))(\tau) - x(\tau)\| d\tau.$$

Теорема 1. *Для произвольной функции* $\rho_0(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, *удовлетворяющей неравенству* (6), *задано множество* $S_0 := D_0(F, \rho_0(\cdot))$ *(см.* (3)*). Пусть заданы число* $a \in (0, \varepsilon]$, *число* $\delta_1 > 0$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\delta_1 \leq \frac{a}{64(m(1)+1)} e^{-2m(1)},$$

и непрерывная функция $d : B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0)) \to E$ *такая, что* $\|d(x) - x\| < \delta_1$ *при всех* $x \in B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0))$. *Тогда существует непрерывное отображение* $r\colon S_0 \to \mathcal{R}_T(F, d(B_{\varepsilon/4}(\widehat{x}(0))) \cap C_0)$, *удовлетворяющее для любого* $x(\cdot) \in S_0$ *соотношениям:*

$$r(x(\cdot))(0) = d(x(0)),$$

$$\|r(x(\cdot))(t) - x(t)\| \leq \int_0^t e^{m(t)-m(\tau)} \rho_0(\tau) d\tau + \frac{a}{2(m(1)+1)}, \quad \forall t \in T.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988.

2. *Clarke, F. H.* Necessary Conditions in Dynamic Optimization. AMS. Vol. 173, № 816. Providence. 2005.

3. *Половинкин Е. С.* Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 121–141.

4. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физматлит, 2014.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. Ю. Попов (Москва, Россия)

mysfed@rambler.ru

Доказана теорема об оценке снизу наибольшего значения минимума модуля аналитической функции на окружностях, радиусы которых про-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

бегают отрезок с фиксированным отношением концов. Оценка дается через отрицательную степень интегральной нормы на большей окружности.

Возьмем произвольные числа $q \in (0,1)$ и $d > 0$. Положим

$$s = s(q) = \frac{1+q}{1-q},$$
$$A_+(q,d) = \frac{1-q}{4}\left(\left(s+\sqrt{s^2-1}\right)^{\frac{d+1}{d}} + \left(s-\sqrt{s^2-1}\right)^{\frac{d+1}{d}}\right) + \frac{1+q}{2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что всегда верно неравенство $A_+(q,d) > 1$. Через $H^1(\mathcal{R})$ обозначим пространство функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\mathcal{R}} = \sup_{0<x<\mathcal{R}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|f(xe^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Положим также $m(f,r) = \min_{|z|=r}|f(z)|$.

Теорема 1. *Даны три числа $q \in (0,1)$, $d > 0$, $R > 0$ и произвольная функция $f(z) = \sum_{k=\nu}^{\infty} b_k z^k \in H^1(\mathcal{R})$, $b_\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, где $\mathcal{R} \geqslant A_+(q,d)R$. Тогда найдется такое число $r \in (qR, R)$, что справедлива оценка снизу*

$$m(f,r) > c\|f\|_{\mathcal{R}}^{-d}, \qquad c = 4^{-d-1}q^{\gamma+1}|b_\nu|^{1+d}A_+^{\nu d}(q,d)R^{\nu(1+d)}.$$

Верна ли подобная оценка, если $\mathcal{R} < A_+(q,d)R$? Пока доказано, что если $\mathcal{R} \leqslant A_-(q,d)R$, где $A_-(q,d) = A_+(q,d) - q - 1$, то наибольший из минимумов модуля на окружностях радиусов $r \in [qR, R]$ нельзя оценить снизу через $\|f\|_{\mathcal{R}}^{-d}$. Поставим экстремальную задачу о нахождении в пространстве $H^1 = H^1(1)$ точной нижней грани

$$\inf\{\|f\|_1^d \max_{qR\leqslant r\leqslant R} m(f,r) \mid f \in H^1, f(0) = 1\}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Если пара чисел q, d такова, что $A_-(q,d) > 1$, то при $1/A_-(q,d) \leqslant R < 1$ точная нижняя грань* (1) *равна нулю. Если же $0 < R \leqslant 1/A_+(q<d)$, то точная нижняя грань* (1) *положительна.*

Замечание. При любом фиксированном $d > 0$ величина $A_-(q,d)$ возрастает по $q \in (0,1)$ и $\lim_{q\to 1-} A_-(q,d) = +\infty$. В частности, имеем

$$A_-(q,1) = \frac{q^2+3q}{1-q}, \qquad A_+(q,1) = \frac{1+3q}{1-q}.$$

В теории целых функций доказан ряд теорем (см. [1]) о том, что на некотором «достаточно обширном» или хотя бы имеющем предельную точку ∞ множестве значений $r \in \mathbb{R}_+$ (своем для каждой целой функции f) минимум модуля $m(f,r)$ допускает оценку снизу через какую-либо степень $M(f,r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. В известных автору работах по этой тематике максимум модуля, через степень которого оценивался минимум, брался на той же окружности, что и минимум. Выяснилось, что оценки $m(f,r)$ через постоянную степень $M(f,r)$ возможны, вообще говоря, для целых функций f конечного порядка (или, более общо, конечного нижнего порядка). Хэйман [2] построил целую функцию F бесконечного порядка, для которой

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln m(F,r)}{\ln M(F,r)} = -\infty.$$

Вопрос о значении точной нижней грани

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(f,r)}{\ln M(f,r)},$$

взятой по всем целым функциям $f \neq 0$ порядка не выше ρ, решен достаточно давно при $\rho \in [0,1]$ ($\cos \pi\rho$), но при $\rho > 1$ до сих пор открыт. Хэйман [2] нашел порядок $(-\ln \rho)$ этой величины при $\rho \to +\infty$. Теорема 1 дает возможность эффективно оценивать снизу наибольшее по $r \in [qR, R]$ значение $m(f,r)$ через любую (например, минус первую) степень максимума модуля на окружности некоторого радиуса, большего R. Приведем несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Для любой целой функции $f \not\equiv 0$ существует постоянная $c = c(f) > 0$ такая, что справедливо следующее утверждение.*

Для любого $R \geqslant 1$ существует такая точка $r \in (R/3, R)$, что выполняется неравенство

$$m(f,r) > \frac{c}{M(f,3R)}.$$

В частности, существует такая последовательность положительных чисел r_n, что

$$1) \lim_{n\to\infty} r_n = +\infty, \quad 2)\ r_n < r_{n+1} < 3r_n + 3, \quad 3)\ m(f,r_n) > \frac{c}{M(f,9r_n)}.$$

Теорема 3. *Если $q \in (0,1)$, $d > 0$, $a < A_-(q,d)$ то существуют целая функция F и последовательность положительных чисел $R_n \to +\infty$ такие, что справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \left(M^d(F,aR_n) \max_{qR_n \leqslant r \leqslant R_n} \big(m(F,r)\big) \right) = 0.$$

В заключение отметим, что оценки снизу наибольшего из минимумов модуля целой функции на окружностях, радиусы которых пробегают отрезок с постоянным отношением, встречались весьма редко. Автору известны три такие работы [3–5]. В [3] и [4] рассматривались весьма узкие подклассы целых функций. В [5] в рассуждениях имеются неисправимые ошибки, повлекшие за собой неверный результат (следствие 3 на с. 236).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. London, New York, San Francisco : Academic Press, 1990. Vol. 2.

2. *Hayman W. K.* The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. № 2. P. 469–512.

3. *Гельфонд А. О.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 42–67.

4. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 39–60.

5. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М. : Наука, 1979. 320 с.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ [1]

А. Ю. Попов, А. П. Солодов (Москва, Россия)

mysfed@rambler.ru, apsolodov@mail.ru

В работе изучается асимптотическое поведение при $x \to 0+$ сумм рядов по синусам

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}\,, \tag{1}$$

последовательности коэффициентов которых не только монотонно стремятся к нулю, т. е.

$$b_1 > 0, \qquad b_{k+1} \leqslant b_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0, \tag{2}$$

но и принадлежат следующим двум специальным классам.

Один класс — обозначим его $\mathcal{B}\downarrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}$, удовлетворяющих условию (2) и, кроме этого, условию

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

$(k+1)b_{k+1} \leqslant kb_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Другой класс — обозначим его $\mathcal{B}\uparrow$ — состоит из всех последовательностей, удовлетворяющих противоположному условию $kb_k \leqslant (k+1)b_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, и, кроме этого, условию (2).

Для получения двусторонней оценки суммы ряда (1) Р. Салем [1] определил следующую функцию:

$$v(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} kb_k, \quad m(x) = [\pi/x]\,.$$

Он доказал существование для произвольной последовательности $\boldsymbol{b}$ вида (2) таких положительных постоянных C_1, C_2, что верны оценки

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant C_1 v(\boldsymbol{b}, x) \quad \forall x \in (0, \pi], \tag{3}$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant C_2 v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant x_0. \tag{4}$$

Оценка снизу (4) выведена при дополнительных условиях: последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла и $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$.

С. А. Теляковский [2] улучшил эти результаты, выведя оценки (3) и (4) с абсолютными постоянными C_1 и C_2, $x_0 = \pi/2$ и сняв требование $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$. А. Ю. Попов [3] доказал, что в (3) можно взять $C_1 = 1$, улучшить которую в общем случае, вообще говоря, нельзя. В [3] также найдено асимптотически неулучшаемое оптимальное значение постоянной $C_2 = 2\pi^{-2}$.

Нетрудно убедиться в том, что оценки снизу вида (4), если не требовать от последовательности $\boldsymbol{b}$ ничего кроме монотонного стремления к нулю, получить нельзя.

Нами найдены оценка снизу вида (4) с асимптотически неулучшаемой на классе $\mathcal{B}\downarrow$ константой C_2 и усиление оценки (3) с асимптотически неулучшаемой константой $C_1 < 1$ на классе $\mathcal{B}\uparrow$.

Теорема 1. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\downarrow$, то при любом $x \in (0, \pi/3]$ верна оценка снизу $g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \big(\underline{I} - 1/m(x)\big)v(\boldsymbol{b}, x) - 1{,}5 b_{m(x)+1} \sin(x/2)$, где $\underline{I} = (1/\pi)\int_0^{2\pi} (\sin t/t)\,dt = 0{,}451\ldots$*

В то же время существуют такие последовательности $\underline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\downarrow$ и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $x_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \underline{I}\, v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n)$, $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$, то при любом $x \in (0, \pi)$ верна оценка сверху $g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant \overline{I}\big(1 + 1/m(x)\big)v(\boldsymbol{b}, x) + 0{,}5 b_{m(x)+1} \operatorname{tg}(x/4)$, где $\overline{I} = (1/\pi)\int_0^{\pi} (\sin t/t)\,dt = 0{,}589\ldots$*

В то же время существуют такие последовательности $\overline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\uparrow$ и $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $x_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $g(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \overline{I}\, v(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n)$, $n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salem R.* Determination del'ordre de grandeur ál'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. V. 186. P. 1804–1806.

2. *Telyakovskiĭ S. A.* On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. Nouvelle série. 1995. V. 58, № 72. P. 43–50.

3. *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Матем. заметки. 2003. Т. 74, вып. 6. С. 877–888.

УДК 517.51

О НЕРАВЕНСТВЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Н. В. Попов (Москва, Россия)
popov.niikita@gmail.com

Рассмотрим функционал $\|\cdot\|_p$, $0 \le p \le +\infty$. Для $0 < p < +\infty$ считаем, что он определён формулой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Для крайних p полагаем

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_C = \max_{x\in\mathbb{T}}|f(t)|,$$
$$\|f\|_0 = \lim_{p\to0+}\|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(t)|\,dt\right).$$

Исследуется наилучшая константа $\varkappa(\alpha,n,p)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha t_n\|_p \le \varkappa(\alpha,n,p)\,\|t_n\|_p, \quad p\in[0,\infty],$$

где t_n — тригонометрический полином степени не выше n и D^α — оператор дробно-линейного дифференцирования по Вейлю. То есть будем исследовать величину

$$\varkappa(\alpha,n,p) = \sup_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv0}\frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}.$$

Исследованию данной величины посвящено много работ. Отметим среди них [1–4].

Теорема. *Справедливо следующее равенство $\varkappa(\alpha,1,p)=1$ для $\alpha\in\in\mathbb{R}$, $p\in[0;+\infty]$. При $n=2$, 3, 4, 5, 6, 7, 8 справедливо $\varkappa(\alpha,n,p)=n^\alpha$ при любом $\alpha\in\{1,2,\ldots,2n-3\}\cup[2n-2,\infty)$, $p\in[0;+\infty]$.*

Отметим, что случай $n=2$ получен другим способом в работе [5], причём в работе [5] доказано, что $\varkappa(\alpha,2,p)>2^\alpha$ при всех $\alpha\in[0;1)\cup\cup(1;2)$.

Автором ранее анонсировался результат при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В. В.* О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, вып. 6. С. 1289–1292.

2. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 3–22

3. *Kozko A. I.* The exact constants in the Bernstein-Zygmund-Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson-Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 391–416.

4. *Козко А. И.* О неравенстве Арестова – Бернштейна – Сеге для тригонометрических полиномов // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII междунар. конф. Тульский гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 150–153.

5. *Арестов В. В., Глазырина П. Ю.* Неравенство Бернштейна – Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, вып. 1. С. 17–31

6. *Попов Н. В.* О неравенстве для дробных производных // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф.: Воронеж. зимн. матем. шк. (26 января - 1 февраля 2017). Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. С. 168–169

УДК 517.5

УСИЛЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА УЛЬЯНОВА[1]

М. К. Потапов (Москва, Россия),

Б. В. Симонов (Волгоград, Россия)

mkpotapov@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

I. Обозначим через

• $L_p, 1 \le p < \infty,$ – множество измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ одного переменного x таких, что $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p};$$

• L_p^0 — множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx = 0$;

• $\omega_\alpha(f, \delta)_p$ — дробный модуль гладкости порядка $\alpha > 0$ функции $f \in L_p$, т.е.

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup_{|h|\le\delta} || \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h) ||_p,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 16-01-00350).

где $\binom{\alpha}{\nu}=1$ для $\nu=0$, $\binom{\alpha}{\nu}=\alpha$ для $\nu=1$, $\binom{\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu\geq 2$.

Отметим, что если $\alpha=k$, где $k\in N$, то $\omega_\alpha(f,\delta)_p$ есть обычный модуль гладкости $k-$го порядка функции $f(x)$.

Хорошо известно неравенство Ульянова [1]:

если $f\in L_p, 1\leq p<q<\infty,\ \theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ k\in N,\ \delta\in(0,1)$, то

$$\omega_k(f,\delta)_q\leq C_1\Big(\int\limits_0^\delta \big[t^{-\theta}\omega_k(f,t)_p\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}. \tag{1}$$

Применение дробных модулей гладкости позволило получить следующие усиленные неравенства Ульянова ([2–5]):

а) если $f\in L_p^0, 1<p<q<\infty,\ \alpha>0,\ \theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ \delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\leq C_2\Big(\int\limits_0^\delta \big[t^{-\theta}\omega_{\alpha+\theta}(f,t)_p\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \tag{2}$$

неравенство (2) при $p=1$ несправедливо,

б) если $f\in L_1^0, 1=p<q<\infty$, $\theta=1-\frac{1}{q}$, $\alpha>\gamma>0$, $\gamma+\theta>\alpha$, $\delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\leq C_3\Big(\int\limits_0^\delta \big[t^{-\theta}\omega_{\gamma+\theta}(f,t)_1\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}, \tag{3}$$

в) если $f\in L_1^0$, $1=p<q<\infty$, $\theta=1-\frac{1}{q}$, $\beta>\alpha>0$, $\delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\leq C_4\Big(\int\limits_0^\delta \big[t^{-\theta}\omega_{\alpha+\theta}(f,t)_1\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{1/q}+$$

$$+\delta^\alpha\Big(\int\limits_\delta^1 \big[t^{-\alpha-\theta}\omega_{\beta+\theta}(f,t)_1\big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Отметим, что в неравенствах (1)–(4) постоянные C_1-C_4 не зависят от f и δ.

II. Обозначим через

• $L_p, 1\leq p<\infty$, — множество измеримых функций $f(x_1,x_2)$ двух переменных x_1 и x_2, 2π-периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}};$$

• L_p^0 — множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1;

• $\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)$– разность с шагом h_1 положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f \in L_p$, то есть

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

• $\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)$– разность с шагом h_2 положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f \in L_p$, т. е.

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2),$$

• $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$– смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 функции $f \in L_p$, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup_{|h_i| \le \delta_i, i=1,2} ||\Delta_{h_1}^{\alpha_1}\big(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\big)||_p;$$

• $\omega_\alpha(f, \delta)_p$ — полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f(x_1, x_2) \in L_p$, т. е.

$$\omega_\alpha(f, \delta)_p = \sup_{|h_1| \le \delta, |h_2| \le \delta} || \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x_1 + (\alpha - \nu)h_1, x_2 + (\alpha - \nu)h_2)||_p.$$

Для смешанных модулей гладкости справедливы следующие усиленные неравенства Ульянова ([5–8]):

а) если $f \in L_1^0$, $1 < p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_i > 0, \delta_i \in (0,1), i = 1,2$, то

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f, \delta_1, \delta_2\big)_q \le C_5 \Big(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} \big[(t_1 t_2)^{-\theta} \omega_{\alpha_1+\theta,\alpha_2+\theta}(f, t_1, t_2)_p\big]^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \Big)^{\frac{1}{q}}, \quad (5)$$

неравенство (5) при $p=1$ несправедливо,

б) если $f\in L_1^0, 1=p<q<\infty, \theta=1-\frac{1}{q}, \alpha_i>\gamma_i>0, \gamma_i+\theta>\alpha_i$, $\delta_i\in(0,1), i=1,2$, то

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_q \le C_6\Big(\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2}\Big[(t_1t_2)^{-\theta}\omega_{\gamma_1+\theta,\gamma_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad (6)$$

в) если $f\in L_1^0, 1=p<q<\infty, \theta=1-\frac{1}{q}$, $\beta_i>\alpha_i>0, \delta_i\in(0,1)$, $i=1,2$, то

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_q \ll C_7\Big\{\Big(\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2}\Big[(t_1t_2)^{-\theta}\omega_{\alpha_1+\theta,\alpha_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\delta_1^{\alpha_1}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1}\int\limits_0^{\delta_2}\Big[t_1^{-\alpha_1-\theta}t_2^{-\theta}\omega_{\beta_1+\theta,\alpha_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\delta_2^{\alpha_2}\Big(\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_{\delta_2}^{1}\Big[t_1^{-\theta}t_2^{-\alpha_2-\theta}\omega_{\alpha_1+\theta,\beta_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1}\int\limits_{\delta_2}^{1}\Big[t_1^{-\alpha_1-\theta}t_2^{-\alpha_2-\theta}\omega_{\beta_1+\theta,\beta_2+\theta}(f,t_1,t_2)_1\Big]^q\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\}. \quad (7)$$

Отметим, что в неравенствах (5)–(7) постоянные C_5-C_7 не зависят от f, δ_1 и δ_2.

Для полных модулей гладкости справедливы следующие усиленные неравенства Ульянова ([5, 9, 10]):

а) если $f\in L_p^0,\ 1<p<q<\infty,\ \theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\ \alpha>0,\ \delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\le C_8\left(\int\limits_0^{\delta}\Big[t^{-2\theta}\omega_{\alpha+2\theta}(f,t)_p\Big]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (8)$$

б) если $f\in L_1^0,\ 1=p<q<\infty,\ \theta=1-\frac{1}{q},\ 0<\gamma<\alpha,\ \gamma+2\theta>\alpha$, $\delta\in(0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q\le C_9\Big(\int\limits_0^{\delta}\Big[t^{-2\theta}\omega_{\gamma+2\theta}(f,t)_1\Big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}, \quad (9)$$

в) если $f \in L_1^0,\ 1 = p < q < \infty,\ \theta = 1 - \frac{1}{q},\ \ \beta > \alpha > 0,\ \delta \in (0,1)$, то

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \le C_{10}\Big\{\Big(\int\limits_0^\delta \Big[t^{-2\theta}\omega_{\alpha+2\theta}(f,t)_1\Big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\delta^\alpha\Big(\int\limits_\delta^1 \Big[t^{-\alpha-2\theta}\omega_{\beta+2\theta}(f,t)_1\Big]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\}. \qquad (10)$$

Отметим, что в неравенствах (8)–(10) постоянные $C_8 - C_{10}$ не зависят от f и δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123), № 1. С. 104–131.

2. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Об одном неравестве П. Л. Ульянова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 3. С. 33–36.

3. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 3. С. 17–25.

4. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Аналоги неравенства Ульянова для дробных модулей гладкости // Современные проблемы математики и механики. Тр. мех.-матем. фак-та МГУ. Т. VIII, Математика. Вып. 1. К 130-летию Н. Н. Лузина и 85-летию П. Л. Ульянова. М. : Изд-во Попечительского Совета мех.-матем. фак. МГУ имени М. В. Ломоносова, 2013. С. 62–70.

5. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. М. : Макс-Пресс, 2016. 340 с.

6. *Potapov M. K, Simonov B. V., Tikhonov S. Yu.* Mixed moduli of smoothness in L_p, $1 < p < \infty$ // A Survey. Surveys in Approximation Theory. 2013. Vol. 8. P. 1–57.

7. *Potapov M. K, Simonov B. V.* Analogues of Ul'yanov inequalities for mixed moduli of smoothness // Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory. Springer Intern. Publ. Switzerland, 2016. P. 161–179.

8. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* О классах Бесова, Бесова – Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных // Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения. Тр. МИАН. Т. 243. М. : Наука, 2003. С. 244–256.

9. *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Полные модули гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, $1 < p < \infty$ // Современные проблемы математики и механики. Т. X. Математика. Вып. 2. К 100-летию Лузинского семинара по теории функций. М. : Изд-во Попечительского Совета мех.-матем. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2015. С. 101–133.

10. *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства полного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Математика. Вып. 1. К 80-летию В.А. Скворцова. М. : Изд-во Попечительского Совета мех.-матем. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016. С. 76–91.

УДК 517.54

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАСАТЕЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ В ЭВОЛЮЦИИ ЛЕВНЕРА[1]

Д. В. Прохоров (Саратов и Петрозаводск, Россия)
ProkhorovDV@info.sgu.ru

Конформные отображения f верхней полуплоскости H на односвязную область G с локально связной границей непрерывно продолжаются вплоть до границы R полуплоскости H. Граница ∂G области G имеет угол раствора $\alpha\pi$, $0 \le \alpha \le 2$, в простом конце, соответствующем $x_0 \in R$, $f(x_0) \ne \infty$, если

$$\lim_{x\to x_0-} \arg(f(x) - f(x_0)) = \psi, \quad \lim_{x\to x_0+} \arg(f(x) - f(x_0)) = \psi + \alpha\pi, \quad x \in R,$$

см., например, [1, с. 51].

При $\alpha = 0$ появляется так называемый касп с вершиной в точке $f(x_0)$. Конформное отображение H на G ведет себя локально как $(w - x_0)^\alpha$, $0 < \alpha \le 2$, в пересечении H с окрестностью точки x_0, если угол локально ограничен прямолинейными сегментами. Для угла с Дини гладкими границами Поммеренке [1, теорема 3.11] описал асимптотическое представление функции f, содержащее степени $w - x_0$ и логарифмические члены. Более сложное описание было предложено в случае $\alpha = 0$, когда граничные кривые каспа имеют взаимное касание первого порядка [1, с.266]. Варшавский в нескольких работах развил подход к изучению асимптотического поведения конформных отображений бесконечных полос, что соответствует каспу, см., например, [2]. Он получил геометрические достаточные условия, при которых $f(w) \sim (w - w_0)^\alpha$ в угле раствора $\alpha\pi$ [3]. Левай рассмотрел аналитические углы, ограниченные двумя аналитическими кривыми при $\alpha = 1$ [4], а Леман [5] распространил эти результаты на произвольные α, $0 < \alpha \le 2$.

Уравнение Левнера демонстрирует большие возможности, в том числе в исследовании подобных задач. Пусть $\Gamma : [0, T] \to C$ является простой кривой на комплексной плоскости C, $\Gamma(0) = 0$, $\Gamma(0, T] \subset H$. Для заданного $t \in [0, T]$ существует единственное конформное отображение $g(\cdot, t) : H \setminus \Gamma(0, T] \to H$, имеющее гидродинамическую нормировку

$$g(z, t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01229).

Параметр t называется емкостью $\Gamma[0,t]$ относительно полуплоскости. Эволюция $g(z,\cdot)$ описывается дифференциальным уравнением Левнера

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{2}{g(z,t)-\lambda(t)}, \quad g(z,0)=z, \quad z \in H, \tag{1}$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией $\lambda(t) = g(\Gamma(t),t)$. Будем говорить, что g и Γ генерируются функцией λ. Обратная функция $f(w,t) = g^{-1}(w,t) : H \to H \setminus \Gamma[0,t]$ имеет свою гидродинамическую нормировку

$$f(w,t) = w - \frac{2t}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right), \quad w \to \infty.$$

Два отрезка $[\alpha(t),\lambda(t)] \subset R$ и $[\lambda(t),\beta(t)] \subset R$ отображаются функцией f на «левую» и «правую» стороны разреза $\Gamma[0,t]$, соответственно. Обе функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются сингулярными решениями уравнения (1). В аналитическом случае Левай в [4] и Леман в [5] установили асимптотическое разложение функции f в угле раствора π, согласно которому

$$f(w,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(w-\alpha(t))^{n+1}\log^m(w-\alpha(t)), \quad q_{00} \neq 0,$$

где w стремится к $\alpha(t)$ вдоль произвольных путей внутри верхней полуплоскости, включая граничные отрезки. Примененное обозначение $h(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n\chi_n(z)$ означает, что для любого натурального $N \geq 1$,

$$h(z) = \sum_{n=1}^{N} A_n\chi_n(z) + o(\chi_n(z)), \quad \frac{\chi_{n+1}(z)}{\chi_n(z)} \to 0,$$

при z стремящемся к 0 произвольно в замыкании $\overline{H}$ полуплоскости H.

Свойство 1. *Управляющая функция*

$$\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n t^{n/3}, \quad l_1 > 0, \ \ 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

обладает свойством 1, *если она генерирует отображения $f(w,t)$ такие, что*

$$f(\lambda(t),t) = q_{00}(\lambda(t)-\alpha(t)) + q_{11}(\lambda(t)-\alpha(t))^2\log(\lambda(t)-\alpha(t)) +$$

$$+O((\lambda(t)-\alpha(t))^2), \quad t \to 0+.$$

Перейдем к рассмотрению асимптотического поведения отображения в окрестности другой сингулярной точки $\beta(t)$. Пусть функция $f(w,t)$

отображает $\beta(t)$ на вершину аналитического каспа с граничными линиями $[0,\epsilon]\subset R$, $\epsilon>0$, и $\Gamma[0,t]$, которая имеет касание первого порядка с R в нуле. При таких условиях Поммеренке [1, с. 266] показал, что

$$f(w,t)=-\frac{(\frac{\pi}{a}+o(1))}{\log(w-\beta(t))},\ \ a>0,\quad w\to\beta(t),\ \ w\in\overline{H}.$$

Подобная асимптотика установлена в [6] при некоторых условиях.

Свойство 2. *Управляющая функция* (2) *обладает свойством* 2, *если она генерирует отображения* $f(w,t)$ *такие, что*

$$\frac{1}{f(\lambda(t),t)}=\frac{1}{q_{00}(\lambda(t)-\alpha(t))}-\frac{q_{11}}{q_{00}^2}\log(\lambda(t)-\alpha(t))-\frac{a\log(\lambda(t)-\beta(t))}{\pi}+$$

$$o(\log(\lambda(t)-\alpha(t)))+o(\log(\lambda(t)-\beta(t))),\ \ t\to 0+\,.$$

Определение 1. Управляющую функцию (2) будем называть *допустимой*, если она обладает свойствами 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть в дифференциальном уравнении Левнера* (1) *допустимая управляющая функция* (2) *генерирует аналитический разрез* $\Gamma(0,T]\subset H\cup\{0\}$, *который имеет касание первого порядка с* R *в нуле. Тогда существует* $p_1>0$ *такое, что*

$$\Gamma(t)=p_1l_1\sqrt[3]{t}+\frac{\kappa}{2\pi}(p_1l_1\sqrt[3]{t})^2(\log\sqrt[3]{t}+i\pi)+o(\sqrt[3]{t^2}),\quad t\to 0+,$$

где κ *обозначает кривизну кривой* Γ *в точке* 0.

Теорема 1 дает частичный ответ на некоторые открытые задачи [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pommerenke Ch.* Boundary Behaviour of Conformal Maps. Berlin : Springer-Verlag, 1992. 300 p.

2. *Warschawski S. E.* On conformal mapping of infinite strips // Trans. Amer. Math. Soc. 1942. Vol. 51. P. 280–335.

3. *Warschawski S. E.* Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung // Math. Z. 1932. Vol. 35. P. 321–456.

4. *Lewy H.* Developments at the confluence of analytic boundary conditions // Univ. California Publ. Math. 1950. Vol. 1, № 7. P. 247–280.

5. *Lehman R. S.* Development of the mapping function at an analytic corner // Pacific J. Math. 1957. Vol. 7, № 3. P. 1437–1449.

6. *Prokhorov D.* Conformal mapping asymptotics at a cusp // Rev. Math. Comput. 2017. Vol. 30, № 1. P. 79–89.

7. *Prokhorov D.* Harmonic measures of slit sides, Loewner-Kufarev evolution and extremum problems // In: Complex Analysis and Dynamical Systems. New Trends and Open Problems. M. Agranovsky, M. Golberg, F. Jacobzon, D. Shoikhet, L. Zalcman (Eds.). Ser. : Trends in Mathematics. Basel : Birkhäuser, 2017. 310 p.

УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. И. Рафиков (Уфа, Россия)
azat@rafikov.me

Пусть даны кратная последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k, \nu_k\}$ с единственной предельной точкой ∞ и ограниченная выпуклая область $D \subset \mathbb{C}$. Обозначим символом $H(\overline{D})$ пространство функций, аналитических в замыкании области D, с топологией равномерной сходимости на компактах.

Цель работы — представление функций из этого пространства с помощью рядов экспоненциальных многочленов с показателями λ_n. Известен результат А. Ф. Леонтьева [3, гл. IV, § 6, п. 4, теорема 4.6.8] о разложении функции $f(z)$, аналитической в $\bar{D}$, в ряд для случая, когда каноническое произведение $L(\lambda)$, построенное по точкам последовательности Λ, имеет хорошие оценки снизу, в частности, когда оно является функцией вполне регулярного роста:

$$f(z) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega_L(\mu,\alpha,f)e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ — параметр, а $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots$ — неограниченная последовательность радиусов, для которой выполнены условия: $\rho_{k+1}/\rho_k \longrightarrow 1$ при $k \to +\infty$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдётся номер $K(\varepsilon)$, начиная с которого на окружностях $\partial B(0,\rho_k)$ выполняется подходящая оценка снизу на $L(\lambda)$; $\omega_L(\mu,\alpha,f)$ — интерполирующая функция Леонтьева:

$$\omega_L(\mu,\alpha,f) = e^{-\alpha\mu} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \gamma(t) \left(\int\limits_0^t f(t-\xi+\alpha) e^{\mu\xi} d\xi \right) dt.$$

Здесь C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$, на котором (и внутри которого) функция $f(z)$ аналитична, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$.

Выяснилось, что применение техник, описанных в работах [1] и [2], позволяет улучшить этот результат. Во-первых, перейти от колец к «относительно малым» группам, тем самым существенно уменьшив разброс точек Λ внутри групп. Во-вторых, подобрать линейные комбинации элементов системы $\{z^k e^{\lambda_n z}\}_{n=1,k=0}^{+\infty,\nu_n-1}$ так, что разложения по ним имеют более простой вид. Наконец, записать условие теоремы в терминах геометрических характеристик последовательности.

Введём необходимые понятия и обозначения.

Семейство непустых множеств $U = \{U_m\}_{m=1}^{+\infty}$ назовём разбиением последовательности Λ, если все множества U_m состоят из точек Λ, попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} U_m = \Lambda$. В таком случае естественно ввести ещё одну нумерацию точек Λ, зависящую от U: точки группы U_m пронумеруем произвольным образом как $\{\lambda_{m,k}\}_{k=1}^{N_m}$ (N_m — количество точек λ_k, лежащих в U_m), кратность $\lambda_{m,k}$ обозначим как $\nu_{m,k}$. Разбиение U назовём относительно малым, если

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \max_{1\le k,l\le N_m} \left|\frac{\lambda_{m,k}-\lambda_{m,l}}{\lambda_{m,k}}\right| = 0.$$

Наконец, за $W_D(\varphi,\psi)$ обозначим длину дуги этой области между точками касания опорных прямых, проведённых в направлениях $\arg t = \varphi$ и $\arg t = \psi$; за $W_\Lambda(\varphi,\psi)$ — функцию угловой плотности последовательности Λ. Обе эти функции определены для всех $0 \le \varphi \le \psi \le 2\pi$, кроме не более чем счётного набора значений.

Теорема. *Пусть дана ограниченная выпуклая область $D \subset \mathbb{C}$ и правильно распределённая при порядке 1 последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$, для которой $W_\Lambda(\varphi,\psi) = \frac{1}{2\pi}W_D(\varphi,\psi)$.*

Тогда существует такая система $\{e_{m,k}\}_{m=1,k=1}^{+\infty,N_m}$ экспоненциальных многочленов, что всякая функция $f(z) \in H(\overline{D})$ раскладывается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{m=1,k=1}^{+\infty,N_m} d_{m,k}e_{m,k}(z),$$

сходящийся в $H(\overline{D})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 12. С. 49–104.

2. *Кривошеев А. С.* Базисы по «относительно малым группам» // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, № 2. С. 67–89.

3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976. 536 с.

4. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М. : Наука, 1983. 176 с.

5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956. 632 с.

УДК 517.518

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША К ПОСТРОЕНИЮ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

М. Г. Робакидзе, Ю. А. Фарков (Москва, Россия)
irubak@gmail.com, farkov@list.ru

Пусть $N = 2^n$, где n — натуральное число. Множество $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ является абелевой группой с операцией покоординатного сложения по модулю 2:

$$a \oplus b := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu - b_\nu|\, 2^\nu, \quad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где числа a_ν, b_ν берутся из двоичных разложений

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu 2^\nu, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu 2^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1\}.$$

Пространство $\mathbb{C}_N$ состоит из комплексных последовательностей

$$x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots),$$

таких, что $x(j + N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности произвольная последовательность x из $\mathbb{C}_N$ может быть задана вектором $(x(0), x(1), \ldots, x(N-1))$. Линейные операции в пространстве $\mathbb{C}_N$ определяются покомпонентно, а скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}_N$ вводятся по формулам

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)}, \quad \|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Векторы $f_0, f_1, \ldots, f_m$ образуют *фрейм Парсеваля* для $\mathbb{C}_N$, если для каждого $x \in \mathbb{C}_N$ выполнено равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{m} |\langle x, f_k\rangle|^2$$

(см., например, [1]). Об ортогональных базисах в $\mathbb{C}_N$ и некоторых их применениях для цифровой обработки сигналов см., например, в [2, гл. 11] и [3]. Ортогональные всплески в $\mathbb{C}_N$, ассоциированные с дискретным преобразованием Уолша, построены в [4]. В настоящем сообщении конструкция всплесковых базисов из [4] обобщается на фреймы Парсеваля.

Для любых $k, j \in \mathbb{Z}_N$ положим $\{k,j\}_2 := \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} k_{n-\nu-1} j_\nu$, где

$$k = \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu 2^\nu, \quad j = \sum_{\nu=0}^{n-1} j_\nu 2^\nu, \quad k_\nu, j_\nu \in \{0,1\}.$$

Функции Уолша для пространства $\mathbb{C}_N$ обозначаются

$$w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$$

и определяются равенствами

$$w_k^{(N)}(j) = (-1)^{\{k,j\}_2}, \qquad w_k^{(N)}(l) = w_k^{(N)}(l+N),$$

где $k, j \in \mathbb{Z}_N$, $l \in \mathbb{Z}$.

Функции $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, причем $\|w_k^{(N)}\|^2 = N$ для всех $k \in \mathbb{Z}_N$. *Дискретное преобразование Уолша* сопоставляет произвольному вектору x из $\mathbb{C}_N$ последовательность $\widehat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$:

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j), \quad \widehat{x}(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) w_k^{(N)}(j), \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор двоичного сдвига $T_k : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \oplus k), \quad x \in \mathbb{C}_N, \quad j \in \mathbb{Z}_N.$$

Из определений следует, что для любых $x, y \in \mathbb{C}_N$, $k, l \in \mathbb{Z}_N$, имеют место равенства

$$\langle x, y \rangle = N \langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle, \qquad \widehat{(T_k x)}(l) = w_k^{(N)}(l)\, \widehat{x}(l).$$

Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{C}_N$ и $N_1 = 2^{n-1}$. Если система

$$B(u_0, u_1, \ldots, u_r) = \{T_{2k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{2k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \cdots \cup \{T_{2k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля в $\mathbb{C}_N$, то $B(u_0, u_1, \ldots, u_r)$ называется *фреймом Парсеваля первого этапа в* $\mathbb{C}_N$, *порожденным набором векторов* $u_0, u_1, \ldots, u_r$.

Теорема. *Пусть векторы* $u_0, u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{C}_N$, $r \geq 1$, *таковы, что для матрицы*

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \ldots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \widehat{u}_1(l+N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+N_1) \end{pmatrix} \tag{1}$$

при каждом $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ *выполнено равенство*

$$M(l)M^*(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда система $B(u_0, u_1, \ldots, u_r)$ *является фреймом Парсеваля первого этапа в* $\mathbb{C}_N$, *порожденным набором векторов* $u_0, u_1, \ldots, u_r$.

При условии (2) матрицу $M(l)$ можно дополнить до унитарной матрицы порядка $r+1$. Поэтому из (1) и (2) следуют неравенства

$$|\widehat{u}_s(l)|^2 + |\widehat{u}_s(l+N_1)|^2 \leq \frac{2}{N^2} \quad \text{для} \quad s = 0, 1, \ldots, r, \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1.$$

Из сформулированной теоремы видно, что для построения фрейма Парсеваля первого этапа в $\mathbb{C}_N$ достаточно выбрать вектор $u_0 \in \mathbb{C}_N$, удовлетворяющий условию

$$|\widehat{u}_0(l)|^2 + |\widehat{u}_0(l+N_1)|^2 \leq \frac{2}{N^2}, \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,$$

а затем найти векторы $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{C}_N$ такие, что для матрицы $M(l)$ выполнено равенство (2). Далее по аналогии с [4] для каждого натурального m, $m \leq n$ определяется последовательность диадических фреймов Парсеваля m-го этапа для $\mathbb{C}_N$. Подобный подход может быть реализован с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона (соответствующая конструкция ортогональных всплесковых базисов приведена в [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Christensen O.* An Inroduction to Frames and Riesz Bases. Boston : Birkhäuser, 2002. 440 p.

2. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. Изд. 2-е. М. : ЛКИ, 2008. 352 с.

3. *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.

4. *Фарков Ю. А., Строганов С. А.* О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений // Изв. вузов. Матем. 2011. № 7. С. 57–66.

5. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914–928.

УДК 517.988

РАВНОМЕРНЫЕ РАВНОУГОЛЬНЫЕ ФРЕЙМЫ С ПОЛНЫМ И НЕПОЛНЫМ СПАРКОМ

Д. А. Рогач (Самара, Россия)
ida@ssau.ru

Фреймы находят широкое применение в цифровой обработке сигналов. Весьма перспективным представляется применение фреймов для решения дискретной фазовой проблемы.

Пусть $\mathbb{H}^N = \mathbb{R}^N$ ($\mathbb{H}^N = \mathbb{C}^N$) — евклидово (унитарное) конечномерное пространство со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \quad (\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n}).$$

Определение 1. Набор элементов $F = \{f_m,\ m = 1, ..., M\} \subset \mathbb{H}^N$ называется *фреймом для пространства* $\mathbb{H}^N$, если существуют положительные числа A и B такие, что для любого $x \in \mathbb{H}^N$

$$A\|x\|^2 \le \sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 \le B\|x\|^2. \tag{1}$$

Определение 2. Фрейм $\{f_m\}_{m=1}^M$ будем называть *равномерным*, если существует число β такое, что $\|f_m\| = \beta$ для любого $m = 1, ..., M$.

Пусть система векторов $\{f_m\}_{m=1}^M \in \mathbb{H}^N$, удовлетворяет условиям:

1) $\|f_m\| = 1$, для $m = 1, \ldots, M$;

2) существует $c \neq 0$ такое, что $|\langle f_i, f_j\rangle| = c$, для $i \neq j = 1, \ldots, M$,

тогда данную систему будем называть *жестким равноугольным фреймом.*

В пространстве $\mathbb{H}^N$ рассмотрим оператор синтеза V^*, представимый в виде матрицы, в которой столбцы-векторы из фрейма F.

Введем понятие спарка.

Определение 2.

$$\operatorname{spark}(F) = \min\{\|x\|_0 : V^*x = 0,\ x \neq 0\}, \tag{2}$$

где $\|x\|_0$ — обозначение количества ненулевых координат вектора x.

Иными словами, спарк — это размер минимальной линейно зависимой системы в матрице V^* размерности $N \times M$.

Из определения получим:

– $\operatorname{spark}(\{e_n\}_{n=1}^N) = 0$, где $\{e_n\}_{n=1}^N$ — базис в $\mathbb{H}^N$;

– если в матрице V^* содержится ноль-столбец, то $\operatorname{spark}(F) \geq 1$;

– для любой $M \times N$ матрицы F $0 \leq \operatorname{spark}(F) \leq M+1$.

– если $\operatorname{spark}(F) = N+1$, то говорят, что система $\{f_m\}_{m=1}^M$ имеет полный спарк.

Из работы [3] нам известна следующая теорема:

Теорема 1. *Всякий фрейм $F = \{f_m\}_{m=1}^M$ с полным спарком в $\mathbb{R}^N$, где $M \geq 2N-1$, удовлетворяет свойству альтернативной полноты.*

Таким образом, мы получили, что фрейм с полным спарком, содержащий, по крайней мере, $2N-1$ векторов, удовлетворяет свойству альтернативной поноты.

Естественно возникло предположение, что равномерные равноугольные фреймы имеют полный спарк.

Пример 1. Пусть нам дана система векторов G. Непосредственно проверяется, что она является равноугольным и равномерным фреймом.

$$G = \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \phi & -\phi \\ 1 & 1 & \phi & -\phi & 0 & 0 \\ \phi & -\phi & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (3)$$

Докажем, что данный фрейм имеет полный спарк.

Рассмотрим миноры третьего порядка.

$$A_{1,2,3} = A_{1,2,4} = -A_{1,3,6} = -A_{1,4,5} = A_{1,5,6} = -A_{2,3,5} = -A_{2,4,6} =$$

$$= A_{2,5,6} = A_{3,4,5} = A_{3,4,6} = -2\phi = -1-\sqrt{5};$$

$$A_{1,2,5} = -A_{1,2,6} = A_{1,3,} = A_{1,3,5} = -A_{1,3,6} = -A_{1,4,5} = A_{1,4,6} = -A_{2,3,4} =$$

$$= A_{2,3,6} = A_{2,4,5} = A_{3,5,6} = -A_{4,5,6} = -\phi^3 - 1 = -3-\sqrt{5}.$$

Получаем, что любые три вектора линейно независимы, $\operatorname{spark}(G) = 4$.

Следующий пример показывает, что выдвинутое выше предположение не оправдывается. Построен равномерный равноугольный фрейм с неполным спарком.

Пример 2: Возьмем систему D в $\mathbb{C}^3$, которая является равномерным и равноугольным фреймом.

Найдем чему равен спарк данной системы.

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & \sqrt{\frac{1}{5}} & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i4}{5}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i4}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}}e^{\frac{-2\pi i}{5}} & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Результаты расчетов миноров третьего порядка $A_{i,j,k}$, где i, j, k — столбцы из системы D, можно привести к такому виду:

$$A_{1,2,3} = A_{1,4,5} = -A_{1,3,5} = -\frac{6\sqrt{5}}{25}, \quad A_{1,2,4} = \frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$A_{1,3,4} = \frac{3\sqrt{5}}{25}(\sqrt{3}i + 1), \; A_{1,3,6} = -A_{1,4,6} = \frac{1}{5}(3 + \sqrt{3}i),$$

$$A_{2,3,4} = A_{3,4,5} = \frac{\sqrt{5}}{25}(3\sqrt{3}i - 7),$$

$$A_{2,3,6} = A_{3,4,6} = A_{4,5,6} = -A_{2,4,6} = -A_{3,5,6} = \frac{1}{5}(-3 + \sqrt{3}i).$$

Миноры третьего порядка:

$$A_{1,2,5} = A_{1,2,6} = A_{1,5,6} = A_{2,3,5} = A_{2,4,5} = A_{2,5,6} = 0.$$

Значит $\operatorname{spark}(D) \leq 3$. Рассматривая произвольные пары векторов на линейную зависимость, получим, что любые два вектора в данной системе будут линейно независимы.

$\operatorname{spark}(D) = 3$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casazza P. G.* Custom building finite frames // Contemporary Math. 2004. Vol. 345. P. 61—86.

2. *Alexeev B., Cahill J., Mixon D. J.* Full spark frames // Journal of Fourier Analysis and Application. 2012. Vol. 18, № 6. P. 1167-1194.

3. *Mixon D. G.* Sparse Signal Processing with Frame Theory // PhD. Princeton University. 2012. arXiv:1204.5958vl [math.FA].

4. *Новиков С. Я., Лихобабенко М. А.* Фреймы конечномерных пространств // УОП СамГУ. 2013. С.5–24.

5. *Mixon D. G.* SOFT 2016: Summer of Frame Theory. URL: http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory (дата обращения: 15.06.2017).

УДК 517.53

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ В КЛАССЕ И. И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия)
evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И. И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q \, d\theta < +\infty \right\}.$$

Отметим, что классы Π_q впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [1]. При $q = 1$ они совпадают с хорошо известным классом Р. Неванлинны (см. [2]). Исследованию пространств Привалова в случае $q > 1$ посвящена монография [3]. Случай $0 < q < 1$ в научной литературе мало изучен.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Если* $f \in \Pi_q$ $(0 < q < 1)$, *то*

$$\ln^+ M(r, f) = o((1-r)^{-1/q}), \quad r \to 1-0, \tag{1}$$

где $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Теорема 2. *Если* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ *— ряд Тейлора функции* $f(z)$, $f \in \in \Pi_q$ $(0 < q < 1)$, *то*

$$\ln^+ |a_k| = o\left(k^{\frac{1}{1+q}}\right), \quad k \to +\infty. \tag{2}$$

Пусть X — некоторый класс аналитических в единичном круге D функций. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ называется *коэффициентным мультипликатором* из класса Π_q $(0 < q < +\infty)$ в класс X, если $\forall\ f \in \Pi_q$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция $\Lambda(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k a_k z^k \in X$. Обозначается $CM(\Pi_q, X)$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $0 < q < 1$, $0 < p \le +\infty$, $\alpha > -1$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \subset \mathbb{C}$, H^p *— класс Харди,* H^∞ *— класс ограниченных аналитических функций в* D, A^p_α *— класс Бергмана:*

$$H^p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta < +\infty \right\},$$

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-r)^\alpha |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta r dr < +\infty \right\}.$$

Для того чтобы $\Lambda = CM(\Pi_q, X)$, *где* $X = H^p\,(0 < p \le +\infty)$ *или* $X = A^p_\alpha\,(p > 0, \alpha > -1)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda_k| = O\left(\exp\left(-c \cdot k^{\frac{1}{q+1}}\right)\right), \quad c > 0, \quad k \to +\infty.$$

Следствие. *Оценки* (1) *и* (2) *неулучшаемы.*

Замечание. Аналогичные результаты в классах аналитических в круге функций типа Р. Неванлинны были получены автором в [4] и [5]. Мультипликаторы из пространств Π_q $(q > 1)$ в классы Харди $H^p\,(p > 0)$ описаны в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. 206 с.
2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.
3. *Гаврилов В. И., Субботин А. В., Ефимов Д. А.* Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад). М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012. 264 с.
4. *Родикова Е. Г.* Об оценках коэффициентов разложения некоторых классов аналитических в круге функций // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводской междунар. конф. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУб 2012. С. 64–69.
5. *Родикова Е. Г.* О коэффициентных мультипликаторах в одном весовом пространстве аналитических в круге функций // Вестн. Брянск. гос. ун-та. Сер. Точные и естественные науки. 2012. № 4. С. 61–69.

УДК 517.9

О S_∞ СИСТЕМАХ

А. И. Рубинштейн (Москва, Россия)

rubinstein_aleksandr@mail.ru

Система $\{\varphi_k(x)\}$ определенных на $[0,1]$ функций называется *слабо мультипликативной*, если для любых номеров $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, $s \geqslant 2$

$$\int_0^1 \varphi_{k_1}(x)\varphi_{k_2}(x)\ldots\varphi_{k_s}(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

(см. работу В. Ф. Гапошкина [1]). При $s = 2$ из (1) следует ортогональность системы $\{\varphi_k(x)\}$. Будем считать функции $\varphi_k(x)$ нормированными в $L_2(0,1)$.

В [1] для ортонормальных слабо мультипликативных систем доказано неравенство Хинчина: при любом $2 < p < \infty$

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant A_p\left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

ОНС, удовлетворяющие (2) при любом $2 < p < \infty$ и называются S_∞ системами.

А. Я. Хинчин установил (2) для первой S_∞ системы — системы Радемахера

$$r_k(x) = \operatorname{sgn}\sin(2^k\pi x), \qquad k = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

Как установлено, S_∞ системы обладают рядом замечательных свойств: при $\{c_n\} \in l_2$ ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ безусловно сходятся во всех $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, безусловно сходятся почти всюду на $(0,1)$, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ на множестве положительной меры следует принадлежность $\{c_k\}$ пространству l_2, выполняется неравенство

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right| dx \geqslant C \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2}$$

($\{\varphi_k(x)\}$ — система Банаха).

Для системы Радемахера подобные результаты (частично) установлены Радемахером, Хинчиным и Колмогоровым.

В предлагаемой работе определяется достаточно богатое множество S_∞ систем.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная измеримая ограниченная на $(0,1/4)$ функция. Определим с ее помощью две функции

$$\Psi^{(1)}(x) = \begin{cases} \Phi(x) & 0 < x < \frac14, \\ \Phi\left(\frac12 - x\right) & \frac14 < x < \frac12, \\ -\Phi\left(x - \frac12\right) & \frac12 < x < \frac34, \\ -\Phi(1-x) & \frac34 < x < 1; \end{cases} \qquad \Psi^{(2)}(x) = \begin{cases} \Phi(x) & 0 < x < \frac14, \\ -\Phi\left(\frac12 - x\right) & \frac14 < x < \frac12, \\ -\Phi\left(x - \frac12\right) & \frac12 < x < \frac34, \\ \Phi(1-x) & \frac34 < x < 1. \end{cases}$$

В точках 0, 1/4, 1/2, 3/4 функции $\Psi^{(1;2)}(x)$ произвольны. Пусть далее

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1^{(1;2)}(x) = \left\|\Psi^{(1;2)}(x)\right\|_2^{-1} \cdot \Psi^{(1;2)}(x), \quad 0 \leqslant x < 1, \\ &\varphi_1^{(1;2)}(x+1) = \varphi_1^{(1;2)}(x). \end{aligned}\right\}$$

Определим две ОНС

$$\varphi_k^{(1)}(x) = \varphi_1^{(1)}(2^{k-1}x), \quad \varphi_k^{(2)}(x) = \varphi_1^{(2)}(2^{k-1}x), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots .$$

При $\Phi(x) = 1$ система $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$ есть система Радемахера, при $\Phi(x) = 4x$ система $\{|\varphi_k^{(1)}(x)|\}$ — подсистема системы Фабера – Шаудера, при $\Phi(x) = \sin 2\pi x$ система $\{\varphi_k^{(1)}(x) = \sin 2^k\pi x\}$. При $\Phi(x) = 1$ система $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$ — подсистема Уолша – Пэли, состоящая из произведений двух соседних функций Радемахера, при $\Phi(x) = 1 - 4x$ система $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$ — линейно преобразованная система Фабера – Шаудера, при $\Phi(x) = \cos 2\pi x$ — $\{\varphi_k^{(2)}(x) = \cos 2^k\pi x\}$.

Утверждение 1. *Системы* $\{\varphi_k^{(1)}(x)\}$, $\{\varphi_k^{(2)}(x)\}$ *— слабо мультипликативные системы и, естественно,* S_∞ *— системы.*

Утверждение 2. *Ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k^{(1)}(x), \qquad \{c_k\} \in l_2$$

наилучше сходятся во всех $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *то есть*

$$\inf_{\{a_m\}} \left\| \sum_{k \geqslant \nu} c_k \varphi_k^{(1)}(x) + \sum_{m=1}^{\nu-1} a_m \varphi_m^{(1)}(x) \right\|_p = \left\| \sum_{k \geqslant \nu} c_k \varphi_k^{(1)}(x) \right\|_p,$$

где $1 \leqslant p < \infty$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Понятие наилучше сходящегося ряда для тригонометрической системы и $\mathbb{C}(0, 2\pi)$ введено в 1937 г. С. Н. Бернштейном [2].

Практически дословно повторяя рассуждения из [3] можно установить следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для любого модуля непрерывности* $\omega(\delta)$ *такого, что* $\overline{\lim\limits_{\delta \to +0}} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = +\infty$ *существуют функции*

$$f_\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}^{(1;2)}(x),$$

где $\varphi_k^{(1;2)}(x)$ *— абсолютно непрерывные, такие, что*

$$|f_\omega(x+h) - f_\omega(x)| \leqslant C_1 \omega(h)$$
$$\overline{\lim_{|h| \to 0}} \frac{|f_\omega(x+h) - f_\omega(x)|}{\omega(|h|)} \geqslant C_2 > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Дело в том, что для $g(t)$ — нечетной системы $\{g(\varphi_k^{(1;2)}(x))\}$ также слабо мультипликативны и $\{\int \varphi_k^{(1;2)}(x)\, dx$, с нулевым средним по $(0,1)\}$ тоже слабо мультипликативны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гапошкин В. Ф.* О сходимости рядов по слабо мультипликативным системам функций // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 3. С. 355–365.

2. *Бернштейн С. Н.* О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье // Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1905–1930]. М. : АН СССР, 1952. С. 178–183.

3. *Рубинштейн А. И.* Об ω-лакунарных рядах и о функциях классов H^ω // Матем. сб. 1964. Т. 65, № 2. С. 239–271.

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАСПАДАЮЩИМИСЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)
RykhlovVS@yandex.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \le l \le n-1$.

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная $(1 \le m \le n)$ полнота системы собственных и присоединенных или, по-другому, корневых функций (к.ф.) этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1, 2].

В [2] рассмотрен случай, когда корни характеристического многочлена пучка расположены на двух лучах, исходящих из начала. В теореме 1 из [2] получены достаточные условия кратной полноты системы к.ф. для вроде бы более общего класса пучков вида (1)–(3) в случае полураспадающихся в широком смысле краевых условий (то есть, когда не только $2l \ge n$, но и $2l < n$ в случае $1 \le l \le n-1$). Но, несмотря на то, что краевые условия (2)–(3) являются частным случаем полураспадающихся в широком смысле краевых условий из [2], тем не менее, теорема 1 о полноте из [2] не может быть непосредственно применена к случаю распадающихся краевых условий, так как соответствующие определители в этой теореме обращаются в ноль.

Видоизменив доказательство теоремы 1 из [2], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в случае распадающихся краевых условий. Чтобы сформулировать полученные результаты, введем необходимые предположения и обозначения.

Предположим, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала в количествах k и $n-k$ $(0 \le k \le n)$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{0, q\}$, $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$ и положим при $j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^\nu, \ i = \overline{1,l}; \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^\nu, \ i = \overline{l+1,n}.$$

Используя эти обозначения, введем условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \ne 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \ne 0 \text{ в случае } n-k \le l; \quad (4)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \ne 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \ne 0 \text{ в случае } n-k > l; \quad (5)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \ne 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \ne 0, \text{ в случае } k \le l; \quad (6)$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \ne 0, \ \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \ne 0 \text{ в случае } k > l. \quad (7)$$

Теорема 1. *Если $[k, n-k]_+ \le l$ и выполняются условия (4) и (6), то при $m \le 2(n-l)$ система к.ф. пучка* (1)–(3) *m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$ в случае $m < n$ или в случае $m = n$, если по-крайней мере для одного $i = \overline{1,n}$ выполняется неравенство $\varkappa_i > n-1$, и с нулевым дефектом в случае $m = n$ при выполнения неравенств $\varkappa_i \le n-1$ для всех $i = \overline{1,n}$.*

Теорема 2. *Если $l < [k, n-k]_-$ и выполняются условия* (5) *и* (7), *то при $m \le 2l$ система к.ф. пучка* (1)–(3) *m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Доказательство теоремы 1 следует схеме доказательство теоремы 1 из [2]. Доказательство же теоремы 2 проводится по другой схеме, так как такого случая в теореме 1 из [2] не было выделено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыхлов И. С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // СМФН. 2017. Т. 63, вып. 2. С. 340–361.

2. *Rykhlov V. S.* Multiple Completeness of the Root Functions for a Certain Class of Pencils of Ordinary Differential Operators // Results in Math. 2017. Vol. 72, iss. 1–2. P. 281–301.

УДК 517.9

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Т. А. Сафонова (Архангельск, Россия)
t.Safonova@narfu.ru

Известно, что обобщенная якобиева матрица J, возникающая при матричном представлении минимального оператора, порожденного симметрическим дифференциальным выражением с полиномиальными коэффициентами в гильбертовом пространстве $L^2(R)$, имеет ряд специфических свойств (подробнее см. [1]). Эти свойства позволяют получить подробную информацию о дефектных числах и других спектральных характеристиках операторов, порожденных матрицами J в гильбертовом пространстве последовательностей l^2, и, благодаря указанной выше связи, соответствующих дифференциальных операторов.

В данной работе приводятся примеры операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами J с известными спектральными свойствами, и устанавливаются спектральные характеристики соответствующих им дифференциальных операторов шестого порядка с полиномиальными коэффициентами.

I. Рассмотрим обобщенную якобиеву матрицу J с элементами c_{jk} такими, что

$$c_{n,n} = h_4 + h_3 n + h_2(n-1)n + h_1(n-2)(n-1)n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ — вещественные числа и $c_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Поэтому, диагональная матрица J, очевидно, порождает в гильбертовом пространстве l^2 самосопряжённый оператор с чисто дискретным спектром и собственными значениями $\lambda_n = c_{nn}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Эта матрица является матричным представлением минимального симметрического оператора, порожденного выражением

$$l_6^0[y] = \frac{1}{8}\{-h_1 y^{(6)} + ((2h_2 - 9h_1 + 3h_1 x^2)y'')'' +$$

$$+((-4h_3 + 8h_2 - 15h_1 + 2(-2h_2 + 9h_1)x^2 - 3h_1 x^4)y')' +$$

$$+(8h_4 - 4h_3 + 2h_2 + 3h_1 + (4h_3 - 8h_2 + 9h_1)x^2 + (2h_2 - 9h_1)x^4 + h_1 x^6)y\}.$$

Таким образом, минимальный симметрический дифференциальный оператор, порожденный выражением $l_6^0[y]$ в гильбертовом пространстве $L^2(R)$, наследует спектральные характеристики оператора, порожденного матрицей J.

II. Пусть элементы c_{jk} матрицы J таковы, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n+2} = \sqrt{(n+1)(n+2)}(h_3 + h_2 n + h_1(n-1)n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, 2, 3)$, а $c_{jk} = 0$ при $k \neq j+2$. Тогда

$$l_6^2[y] = \frac{1}{4}\{\alpha_1 y^{(6)} + ((-2\alpha_2 + 8\alpha_1 - \alpha_1 x^2)y'')''+$$

$$+((4\alpha_3 - 6\alpha_2 + 11\alpha_1 - \alpha_1 x^4)y')'+$$

$$+(4\alpha_3 - 6\alpha_2 + 9\alpha_1 + 2(\alpha_2 - 4\alpha_1)x^2 + \alpha_1 x^4)x^2 y\}+$$

$$+\frac{i}{4}\{-\beta_1((xy''')'' + (xy'')''')+$$

$$+2((\beta_2 - 4\beta_1 + \beta_1 x^2)xy'')' + 2((\beta_2 - 4\beta_1 + \beta_1 x^2)xy')''+$$

$$+(-4\beta_3 + 6\beta_2 - 9\beta_1 + 2(-\beta_2 + 4\beta_1)x^2 - \beta_1 x^4)xy'+$$

$$+((-4\beta_3 + 6\beta_2 - 9\beta_1 + 2(-\beta_2 + 4\beta_1)x^2 - \beta_1 x^4)xy)'\}.$$

III. Пусть элементы c_{jk} матрицы J таковы, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n+4} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(h_2 + h_1 n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, 2)$, а $c_{jk} = 0$ при $k \neq j+4$. Тогда

$$l_6^4[y] = \frac{1}{4}\{-\alpha_1 y^{(6)} + ((2\alpha_2 - 5\alpha_1 - 5\alpha_1 x^2)y'')''+$$

$$+((-5\alpha_1 + 6(2\alpha_2 - 5\alpha_1)x^2 + 5\alpha_1 x^4)y')'+$$

$$+(6\alpha_2 - 15\alpha_1 + 15\alpha_1 x^2 + (2\alpha_2 - 5\alpha_1)x^4 + \alpha_1 x^6)y\}+$$

$$+\frac{i}{2}\{\beta_1((xy''')'' + (xy'')''') + (-2\beta_2 + 5\beta_1)((xy'')' + (xy')'')+$$

$$+(-2\beta_2 + 5\beta_1 - \beta_1 x^2)x^3 y' + ((2\beta_2 + 5\beta_1 - \beta_1 x^2)x^3 y)'\}.$$

IV. Пусть элементы c_{jk} матрицы J таковы, что $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ и

$$c_{n,n+6} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}h, \quad n = 0, 1, \ldots$$

где $h = \alpha - i\beta$ и $\alpha \neq 0$, а $c_{jk} = 0$ при $k \neq j+6$. Тогда

$$l_6^6[y] = \frac{\alpha}{4}\{y^{(6)} + 15(x^2 y'')'' + 15(1 + x^4)y')' + (45 + x^4)x^2 y\}+$$

$$+\frac{i\beta}{4}\{3((xy''')'' + (xy'')''') + 10((x^3 y'')' + (x^3 y')'')+$$

$$+3(((5+x^4)xy)' + (5+x^4)xy')\}.$$

Порядок всех рассматриваемых дифференциальных выражений равен 6, дефектные числа соответствующих операторов удовлетворяют условиям $n_+ = n_- = 2$ в случае II, $n_+ = n_- = 4$ в случае III и $n_+ = n_- = 6$ в случае IV, а спектры их самосопряжённых расширений являются дискретными.

Автор выражает глубокую благодарность профессору К. А. Мирзоеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients // Func. Anal. and Its Appl. 1999. Vol. 33, № 1. P. 25–37.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПОРОЖДАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ ЛАКСА[1]

А. К. Свинин (Иркутск, Россия)
svinin@icc.ru

Представление Лакса интегрируемых эволюционных уравнений впервые было найдено для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Пусть $u = u(x,t)$ — действительная функция действительных аргументов. Уравнение КдФ $u_t = u_3 + 6uu_1$ может быть записано с помощью операторного уравнения $\partial L/\partial t = [A, L] := AL - LA$ с парой дифференциальных операторов[2] $L = \partial^2 + u$ и $A = 4\partial^3 + 6u\partial + 3u_1$. Важно отметить, что представление Лакса, по сути, возникло в рамках метода обратной задачи рассеяния [2], который существенно использует спектральную теорию опратора L [4]. С помощью этого метода впервые были найдены многосолитонные решения. В дальнейшем были найдены другие аспекты интегрируемости для уравнения КдФ. Выяснилось, что это уравнение является гамильтоновым и даже би-гамильтоновым и обладает бесконечным набором обобщенных симметрий, которые также выражаются уравнением Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t_{2s+1}} = [A_{2s+1}, L], \quad \forall s \geq 1,$$

[1]Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, государственная поддержка ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

[2]Здесь обозначается $u_k := u^{(k)}(x)$.

где A_{2s+1} — соответствующий дифференциальный оператор порядка $2s+1$, а $(t_1, t_3, \ldots)$ — бесконечный набор эволюционных параметров. Способ построения операторов A_{2s+1} был найден в работе [3]. Если эволюционное уравнение обладает бесконечным набором обобщенных симметрий, то говорят, что это уравнение включается в интегрируемую иерархию. В частности, само уравнение КдФ соответствует эволюционному параметру t_3.

Рассмотрим искомую функцию $T = T(i,t)$ от $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ и уравнение

$$\dot{T}(i) = T(i)\left(T(i+1) - T(i-1)\right)$$

известное как цепочка Вольтерра или дискретное уравнение Кортевега-де Фриза. Это уравнение, по всей видимости, было первым дискретным уравнением проинтегрированным с помощью метода обратной задачи, который использует спектральную теорию дискретных операторов. Важной характеристикой цепочки Вольтерра, как и уравнения КдФ, является наличие бесконечного набора обобщенных симметрий. Пусть $(t_1, t_2, \ldots)$ — бесконечный набор эволюционных параметров. В работе [5] было показано, что иерархию высших симметрий для цепочки Вольтерра можно записать в явном виде

$$\partial_s T(i) = T(i)\left(S_s^s(i-s+2) - S_s^s(i-s)\right), \quad \forall\ s \geq 1,$$

где $\partial_s := \partial/\partial t_s$. Здесь в правые части уравнений входят дискретные многочлены, определяемые по формуле[1]

$$S_s^r(i) = \sum_{0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r \leq s-1} T(i+\lambda_1+r-1) \cdots T(i+\lambda_{r-1}+1) T(i+\lambda_r). \quad (1)$$

У цепочки Вольтерра и ее интегрируемой иерархии, как известно существует интегрируемое обобщение [1], а именно, счетный класс уравнений вида

$$\dot{T}(i) = T(i)\left(\sum_{j=1}^{n} T(i+j) - \sum_{j=1}^{n} T(i-j)\right). \quad (2)$$

О. И. Богоявленским в работе [1], было показано, что уравнение (2), при любом $n \geq 1$ допускает непрерывный предел к уравнению КдФ. В работе автора [5], был найден явный вид интегрируемой иерархии обобщенных симметрий эволюционного уравнения (2). В работе [6], являющейся естественным продолжением [5], автором был предложен подход, позволяющий представить многие известные интегрируемые эволюционные

[1] В частности, мы полагаем $S_s^0(i) := 1$.

диффериниально-разностные уравнения (системы уравнений) допускающие представление Лакса в явной форме. Определим класс дискретных многочленов вида

$$S_s^r(i) = \sum_{0\le\lambda_1\le\cdots\le\lambda_r\le s-1} T(i+\lambda_1+(r-1)n)\cdots T(i+\lambda_{r-1}+n)T(i+\lambda_r),$$

которые очевидно обобщают (1).

Теорема 1. *Интегрируемая иерархия обобщенных симметрий цепочки Богоявленского* (1) *определяется по формуле*

$$\partial_s T(i) = T(i)\left(S_{sn}^s(i-sn+n+1) - S_{sn}^s(i-sn)\right), \quad s\ge 1. \tag{3}$$

Теорема 2. *Уравнения интегрируемой иерархии* (2) *допускают представление Лакса* $\partial_s L = [A_s, L]$ *с дискретными операторами*

$$L = \Lambda^{-1} + T(i-1)\Lambda^{-1-n}, \quad A_s = \Lambda^{sn} + \sum_{q=1}^{s} S_{sn}^q(i-(q-1)n)\Lambda^{(s-q)n},$$

где Λ *— элементарный оператор сдвига действующий по правилу* $\Lambda(f(i)) = f(i+1)$ *для произвольной функции дискретного аргумента.*

Замечание. В работе [7], используя явное представление (2) эволюционных уравнений интегрируемой иерархии цепочки Богоявленского, была найдена их би-гамильтонова структура.

Явное представление (3) имеет свои преимущества, например при исследовании непрерывного предела. Разобьем числовую ось $\mathbb{R}$ на малые интервалы одинаковой длины ϵ. Пусть $u_i := u(x)|_{x=i\epsilon}$, где $u(x)$ — искомая функция непрерывного аргумента. Для построения непрерывного предела интегрируемой иерархии (3), рассмотрим подстановку вида

$$T(i) = 1 + \frac{\kappa}{2}u_i, \quad \kappa := n(n+1) \tag{4}$$

Заметим, что эта подстановка хорошо известна [1]. Возьмем линейную комбинацию потоков $\dot{T}(i) = \sum c_q \partial_q T(i)$. Как результат, подстановка (4) дает

$$\dot{u} = \sum_{j\ge 0} \epsilon^{2j+1} F_{2j+1}, \tag{5}$$

где F_{2j+1} — некоторые дифференциальные многочлены. В частности,

$$F_1 = \frac{\kappa^2}{2}\left(\sum_{k\ge 1} g_k c_k\right) u_1, \quad F_3 = \frac{\kappa^3}{24}\left(\sum_{k\ge 1} k g_k c_k\right)(u_3 + 6uu_1),$$

$$F_5 = \frac{\kappa^4}{960}\left(\sum_{k\geq 1} P(k) g_k c_k\right) u_5 + \frac{\kappa^4}{48}\left(\sum_{k\geq 1} k^2 g_k c_k\right) u u_3$$

$$+\frac{\kappa^4}{24}\left(\sum_{k\geq 1} k(k-1) g_k c_k\right) u_1 u_2 + \frac{\kappa^4}{16}\left(\sum_{k\geq 1} k(k-1) g_k c_k\right) u^2 u_1,$$

где

$$P(k) := k\left(2k - \frac{2(\kappa+1)}{3\kappa}\right), \quad g_k := \frac{k}{(k-1)!}\prod_{q=1}^{k-1}(kn+q).$$

Разумеется, что мы можем брать только конечные линейные комбинации потоков. Подходящим преобразованием координат типа Галилея мы можем исключить F_1, так чтобы сумма (5) начиналась с $u_3 + 6uu_1$. Тогда в непрерывном пределе при $\epsilon \to 0$, мы получаем уравнение КдФ. Если мы наложим условие $\sum_{k\geq 1} k g_k(n) c_k = 0$, так чтобы $F_3 = 0$, то

$$F_5 = \frac{\kappa^4}{480}\left(\sum_{j\geq 1} k(k-1) g_k(n) c_k\right)(u_5 + 10uu_3 + 20u_1u_2 + 30u^2u_1)$$

и в этом случае, также с использованием преобразования независимых аргументов, в непрерывном пределе мы получаем «высшее» уравнение КдФ .

$$\dot{u} = u_5 + 10uu_3 + 20u_1u_2 + 30u^2u_1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Интегрируемые динамические системы, связанные с уравнением КдВ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51, № 6 С. 1123–1141.

2. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg-deVries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19, № 19 P. 1095.

3. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. 1976. Т. 10, № 4. С. 13-29.

4. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М. : Наука, 1980.

5. *Svinin A. K.* On some class of homogeneous polynomials and explicit form of integrable hierarchies of differential-difference equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. Vol. 44, № 16. Art. No. 165206.

6. *Svinin A. K.* On some classes of discrete polynomials and ordinary difference equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2014. V. 47. No. 15. Art. No. 155201.

7. *Wang J. P.* Recursion operator of the Narita-Itoh-Bogoyavlensky lattice // Stud. Appl. Math. 2012. V. 129. No. 3. P. 309-327.

УДК 517.9

О ПОСТРОЕНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНДЕКСА $(K,0)$ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ[1]

С. В. Свинина (Иркутск, Россия)
gaidamak@icc.ru

При описании поведения сплошной среды (газ, жидкость, твердое тело) возникают различные модели, которые приводят как правило к нелинейным системам уравнений в частных производных, к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными или к нелинейным дифференциально-алгебраическим системам уравнений в частных производных [1, 2]. Под нелинейной дифференциально-алгебраической системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными понимают систему вида

$$\mathcal{F}_s\left(x,t,u^1,u^2,\ldots,u^n,p^1,p^2,\ldots,p^n,q^1,q^2,\ldots,q^n\right)=0, \tag{1}$$

$$p^s=\partial_t u^s,\quad q^s=\partial_x u^s,\quad s=1,2,\ldots,n,$$

в которой предполагается, что матрицы Якоби

$$\partial_p\mathcal{F}=\left(\frac{\partial\mathcal{F}_{s_1}}{\partial p^{s_2}}\right),\quad \partial_q\mathcal{F}=\left(\frac{\partial\mathcal{F}_{s_1}}{\partial q^{s_2}}\right),\quad s_1=1,2,\ldots,n,\quad s_2=1,2,\ldots,n,$$

тождественно вырождены в области определения $\mathcal{U}$. Если в каждой точке области $\mathcal{U}$ пучок матриц $\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}$ при любом значении u является регулярным, то его индекс или индекс системы (1) определяется парой чисел $(k,0)$, где k – это максимальная степень элементарных делителей пучка $\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}$, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена $\det\left(\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}\right)$ во всей области $\mathcal{U}$. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}$ не содержит сингулярной составляющей. При численном решении линейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных определенного вида классическими методами, возникают «пограничные слои ошибок» [3, 4], а при решении линейных систем общего вида или более того квазилинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, применение классических методов вовсе

[1]Работа выполнена в рамках проекта СО РАН Качественная теория и численный анализ дифференциально-алгебраических уравнений (проект № 0348-216-0009).

невозможно. В настоящей работе предлагается новый алгоритм, который основан на расщеплении матричного пучка системы и решает проблему численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных индекса $(k, 0)$ [5]. Предлагаемый алгоритм состоит в следующем. Выполняется расщепление матричного пучка, построенного по коэффициентам диффренциально-алгебраической системы, на два пучка: один из них имеет только простые элементарные делители, соответствующие нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена, а другой не имеет регулярного ядра. В соответствующей расщепленной системе производные, относящиеся к регулярному пучку аппроксимируются сплайном произвольного порядка, а производные, относящиеся к сингулярному пучку аппроксимируются сплайном меньшего порядка по каждой переменной. В результате строится нелинейная разностная схема. Такая разностная схема называется сплайн-коллокационной разностной схемой с расщепленным пучком. Она является достаточно эффективной и дает высокую точность во всей области решения. В настоящем докладе ограничимся частным случаем нелинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных, а именно квазилинейной системой вида

$$A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u + F(x,t,u) = 0, \tag{2}$$

в которой $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ — заданные квадратные матрицы порядка n, тождественно-вырожденные в области определения, $F(x,t,u)$ — известная n-мерная вектор-функция, $u \equiv u(x,t)$ — искомая n-мерная вектор-функция. Элементы матриц $A(x,t,u)$, $B(x,t,u)$ и вектора $F(x,t,u)$ из пространства $C^1(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U} = \{(x,t,u)| \quad (x,t) \in \in U, \quad \|u(x,t)\|_{C(U)} < \mathcal{Q}\}$, $\mathcal{Q}$ — некоторая постоянная величина, $U = = \{(x,t)|\ x \in [x_0; X],\ t \in [t_0; T]\}$.

Зададим для системы (2) начально-краевые условия

$$u(x_0, t) = \psi(t), \quad u(x, t_0) = \phi(x), \tag{3}$$

где $\psi(t)$ и $\phi(x)$ — известные n-мерные вектор-функции, согласованные в точке (x_0, t_0) вместе со своими производными. Будем предполагать, что для пучка $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u) = A(x,t,u) + \lambda B(x,t,u)$ системы (2) выполнены все условия теоремы о канонической структуре из [6]. В этом случае найдутся невырожденные матрицы $P(x,t,u)$ и $Q(x,t,u)$, которые преобразуют его к канонической форме

$$\mathrm{diag}\{E_d, M(x,t,u), E_p\} + \lambda \mathrm{diag}\{J(x,t,u), E_l, N(x,t,u)\},$$

где E_d — единичная матрица порядка d; $M(x)$ и $N(x)$ — верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка l и p, соответственно; $\mathcal{O}_l$ — квадратная нулевая матрица порядка l; $J(x,t,u)$ — невырожденная блочно-диагональная матрица порядка d. Матрицы $M(x,t,u)$ и $N(x,t,u)$ являются нильпотентными в $\mathcal{U}$. Пусть ind $M(x,t,u) = k_1$ и ind $N(x,t,u) = k_2$ в $\mathcal{U}$, т. е. $k_1 = \min\{\bar{k} : \ M(x,t,u)^{\bar{k}} = 0 \ \ \forall\, (x,t,u) \in \mathcal{U}\}$. Аналогично определяется k_2. Тогда ind $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u) = (k, 0)$, где $k = \max\{k_1, k_2\}$ и, соответственно, индекс системы (2) также равен $(k, 0)$. Построим в прямоугольной области U равномерную сетку U_Δ с шагами h и τ соответственно по пространственной и временной переменным

$$U_\Delta = \{x_i = x_0 + ih,\ t_j = t_0 + j\tau,\ \ i = 0,1,\ldots,n_1,\ j = 0,1,\ldots,n_2\},$$

тогда в области $\mathcal{U}$ будем иметь соответствующее сеточное пространство

$$\mathcal{U}_\Delta = \{x_i = x_0 + ih,\ t_j = t_0 + j\tau,\ u_{i,j} = u(x_i, t_j),\ i = 0,\ldots,n_1,\ j = 0,\ldots,n_2\}.$$

Будем искать решение $u(x,t)$ задачи (2), (3) в виде сплайна $\delta^{m_1,m_2}(x,t) \in C^1(\mathcal{U})$ со старшими степенями равными m_1 и m_2 по каждой независимой переменной, соответственно. Разделяя пучок $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u)$ на регулярную и сингулярную составляющие и выполняя соответствующую аппроксимацию производных, входящих в систему (1), мы получим разностную схему

$$A_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}u_{i+l_1,j+l_3} + B_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1}\bar{\gamma}_{l_1,l_3}u_{i+l_3,j+l_2} = F_{i+l_1,j+l_2} -$$

$$-A_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2-1}\beta_{l_2-1,l_3}u_{i+l_1,j+l_3+1} - B_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1-1}\bar{\beta}_{l_1-1,l_3}u_{i+l_3+1,j+l_2},$$

$$u_{0,j} = \psi_j,\ \ u_{i,0} = \phi_i,\ \ i = 0,1,\ldots,n_1-1,\ j = 0,1,\ldots,n_2-1, \tag{4}$$

где γ_{l_2,l_3}, $\bar{\gamma}_{l_1,l_3}$, β_{l_2,l_3} – известные коэффициенты. Разностную схему (4) назовем нелинейной сплайн-коллокационной разностной схемой с расщеплением. Система (4) представляет собой целый набор нелинейных разностных схем, порядки аппроксимации которых определяются порядками сплайнов и составляют величину, равную $O(h^{m_1-1}) + O(\tau^{m_2-1})$. С помощью замены переменной $w_{i,j} = Q_{i,j}^{-1}v_{i,j}$, где $Q_{i,j} = Q(x_i, t_j, u_{i,j})$ — невырожденная матрица из [5], при условии, что якобиан

$$\frac{\partial[w_1, w_2, \ldots, w_n]}{\partial[v_1, v_2, \ldots, v_n]} \neq 0 \quad \forall\ (x,t) \in U$$

разностную схему (4) можно записать в нормальной форме разностного опрераторного уравнения

$$\mathcal{V} = \Pi(\mathcal{V}), \tag{5}$$

где $\Pi(\mathcal{V}) = L^{-1}(\mathcal{V})\left[\tau\bar{g} - H(\mathcal{V})w_0 - Q(\mathcal{V})w^0\right] + \delta(\mathcal{V},h,\tau)$ и $\delta(\mathcal{V},h,\tau)$ — вектор, для которого $\|\delta(\mathcal{V},h,\tau)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = O(h) + O(\tau)$. В (5) $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3)^\top$ и $\mathcal{V}^s = (\bar{w}^s_{1,1}, \bar{w}^s_{2,1}, \ldots, \bar{w}^s_{n_1,1}, \bar{w}^s_{1,2}, \bar{w}^s_{2,2}, \ldots, \bar{w}^s_{n_1,2}, \ldots, \bar{w}^s_{1,n_2}, \bar{w}^s_{2,n_2}, \ldots, \bar{w}^s_{n_1,n_2})^\top$ — искомый вектор. Матрица $L(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{L^1(\mathcal{V}), L^2(\mathcal{V}), L^3(\mathcal{V})\}$ невырожденная, каждый ее блок является блочно-двухдиагональной матрицей $L^s(\mathcal{V}) = \left(L^s_{i,j}(\mathcal{V})\right)$, где $i,j = 1,2,\ldots,n_1$. Блоки $L^s_{i,i}(\mathcal{V})$, расположенные на главной диагонали имеют вид

$$L^s_{i,i}(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} E_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \mathcal{K}^k_{2,i} & E_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{K}^k_{3,i} & E_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & E_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} \\ \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \mathcal{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{K}^k_{n_1,i} & E_{\nu^s} \end{pmatrix},$$

где ν^s принимает значения: m_1m_2d, m_1m_2l и m_1m_2p, соответственно $s = 1,2,3$. Блоки $L^s_{i,j}(\mathcal{V})$, расположенные под главной диагональю имеют вид $L^s_{i,j}(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{\mathcal{F}^s_{1,i},\ \mathcal{F}^s_{2,i}, \ldots, \mathcal{F}^s_{n_1,i}\}$, где $i = 2,3,\ldots,n_1$, $j = i-1$. В (5) $\bar{g} = (\bar{g}^1, \bar{g}^2, \bar{g}^3)$ — известный вектор размера $\bar{n} = \tilde{n}n$, $\tilde{n} = n_1n_2m_1m_2$, который определяется по вектору $F(x,t,u)$. Блоки $\bar{g}^s$ имеют размеры $\tilde{n}d$, $\tilde{n}l$ и $\tilde{n}p$, соответственно значениям $s = 1,2,3$,

$$\bar{g}^s = (g^s_{1,1}, g^s_{2,1}, \ldots, g^s_{n_1,1}, g^s_{1,2}, g^s_{2,2}, \ldots, g^s_{n_1,2}, \ldots, g^s_{1,n_2}, g^s_{2,n_2}, \ldots, g^s_{n_1,n_2})^\top.$$

Матрица $H(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{H^1, H^2, H^3\}$ имеет блоки $H^s = \operatorname{diag}\{H^s_{1,1}, \mathcal{O}_s\}$, где $H^s_{1,1} = \operatorname{diag}\{\mathcal{F}^s_{1,1}, \mathcal{F}^s_{2,1}, \ldots, \mathcal{F}^s_{n_1,1}\}$, $\mathcal{O}_{\nu^s}$ — нулевой квадратный блок порядка $\nu^s = (n_2-1)n_1m_1m_2\nu$, где ν принимает значения d, l и p, соответственно значениям $s = 1,2,3$. Матрица $Q(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{Q^1, Q^2, Q^3\}$ с блоками $Q^s = \operatorname{diag}\{Q^s_{1,1}, Q^s_{1,2}, \ldots, Q^s_{1,n_2}\}$, где $Q^s_{1,j} = \operatorname{diag}\{\mathcal{K}^s_{1,j}, \mathcal{O}_{\nu^s}\}$, $\nu^s = (n_1-1)m_1m_2\nu$. Векторы $w_0 = (w^1_0, w^2_0, w^3_0)^\top$ и $w^0 = (w^{0,1}, w^{0,2}, w^{0,3})^\top$ имеют блоки: $w^s_0 = e_{n_2} \otimes (\bar{w}^s_{1,0}, \bar{w}^s_{2,0}, \ldots \bar{w}^s_{n_1,0})^\top$ и $w^{0,s} = (e_{n_1} \otimes w^s_{0,1}, e_{n_1} \otimes w^s_{0,2}, \ldots, e_{n_1} \otimes w^s_{0,n_2})^\top$, которые определяются по начально-краевым условиям (3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) собственные значения $\xi^{s_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}}$, $\xi^{s_2}_{\gamma_{m_2}}$ и $\xi^{s_3}_{J_{i,j}}$ матриц $\bar{\gamma}_{m_1}$, γ_{m_2} и $J_{i,j}$, соответственно, в каждом узле разностной сетки $\mathcal{U}_\Delta$ удовлетворяют условию

$$r\xi^{s_1}_{\bar{\gamma}_{m_1}} \cdot \xi^{s_3}_{J_{i,j}} \neq -\xi^{s_2}_{\gamma_{m_2}} \quad \forall s_1, s_2, s_3,$$

где $s_1 = 1,2,\ldots,m_1$, $s_2 = 1,2,\ldots,m_2$, $s_3 = 1,2,\ldots,k$;

2) собственные значения $\xi^s_{J_{i,j}}$ положительные в сеточном пространстве $\mathcal{U}_\Delta$;

3) отношение шагов разностной сетки τ/h является постоянной величиной.

Тогда разностная схема (5) в сеточном пространстве $\mathcal{U}_\Delta$ имеет решение равномерно-ограниченное по начально-краевым условиям и по правой части, для которого справедлива оценка

$$\|\mathcal{V}\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \leq \mathcal{M}_1\|\tilde{F}_{i,j}\|_{C(U_\Delta)} + \mathcal{M}_2\|\phi_i\|_{C(U_\Delta)} + \mathcal{M}_3\|\psi_j\|_{C(U_\Delta)},$$

где $\mathcal{M}_\nu$ — постоянные величины, $i = 1, \ldots, n_1$, $j = 1, \ldots, n_2$.

Предложенный в работе метод позволяет с высокой точностью, которая на единицу меньше порядка сплайна, численно решать рассмотренные квазилинейные дифференциально-алгебраические системы индекса $(k, 0)$. Особенность этого метода носит аналитический характер и заключается в предварительном расщеплении матричного пучка системы $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u)$. Отметим также, что если система (2) полулинейная, т. е. коэффициенты $A(x, t)$ и $B(x, t)$ не зависят от искомой функции $v(x, t)$, то с помощью замены переменной $w(x, t) = Q^{-1}(x, t)v(x, t)$ всегда можно привести разностную схему (4) к каноническому виду (5). Для квазилинейной системы (2) это преобразование можно выполнить не всегда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М. : Наука, Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. 668 с.

2. *Рущинский В. М.* Пространственные линейные и нелинейные модели котлогенераторов // Вопросы идентификации и моделирования. 1968. С. 8—15.

3. *Бормотова О. В., Чистяков В. Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши – Ковалевской // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 8. С. 1380–1387.

4. *Гайдомак С. В.* Об одной краевой задаче для линейной параболической системы первого порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 4. С. 73–83.

5. *Гайдомак С. В.* Об одном алгоритме численного решения линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 9. С. 1530–1544.

6. *Гайдомак С. В.* О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций // Изв. вузов. Матем. 2012. № 2. С. 23–33.

О ВАРИАЦИОННОМ И РИМАНОВСКОМ ПОДХОДАХ К НЕКОТОРЫМ ИНТЕГРАЛАМ ЛУЗИНСКОГО ТИПА[1]

П. А. Своровский (Быдгощ, Польша)
piotrus@ukw.edu.pl

Вскоре после открытия своего знаменитого интеграла (эквивалентного узкому интегралу Данжуа, также известного как интеграл Данжуа – Перрона), Ральф Хенсток отметил в своей книге (см. [1]), что похожий подход в стиле Римана может привести к другому интегралу Данжуа, сейчас известному под именем широкий интеграл Данжуа (а также интеграл Данжуа – Хинчина). Поскольку он не привел подробного доказательства, это замечание породило в последствии ряд работ на эту тему (см. [2–4]). При этом рассматривался более общий случай, чем предложил Хенсток, обычная непрерывность (первообразных в определении широкого интеграла Данжуа) была заменена на обобщенную непрерывность.

В нашей предыдущей работе на данную тему (см. [5]) мы изучали, как понятия, введенные в [2–4], связаны с различными интегралами лузинского типа, в частности с интегралом Данжуа – Хинчина.

Недавно появилась статья Томсона (см. [6]) о теоретико-множественных характеристиках ACG и VBG свойств. Отталкиваясь от этой работы, благодаря непрерывности слабых и q-слабых мер Томсона, у нас появилась идея использовать их для характеристики обобщенный широких интегралов Данжуа. Одновременно нам удалось получить упрощенные определения в стиле Римана для интегралов, введенных в [2–4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Henstock R.* Linear Analysis. London : Butterworths, 1967.

2. *Ene V.* Characterizations of $VBG \cap (N)$ // Real Analysis Exchange. 1997/98. Vol. 23, iss. 2. P. 611–630.

3. *Lee T.-Y., Lee P.-Y.* The Kubota integral II // Mathematica Japonica. 1995. Vol. 42, iss. 2. P. 257–263.

4. *Soedijono B.*, *Lee P.-Y.* The Kubota integral // Mathematica Japonica. 1991. Vol. 36, iss. 2. P. 263–270.

5. *Sworowski P.* Riemann-type definition for the wide Denjoy integral // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2011. Vol. 126. P. 175–200.

6. *Thomson B.S.* On *VBG* functions and the Denjoy – Khintchine integral // Real Analysis Exchange. 2015/16. Vol. 41, iss. 1. P. 173–226.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики университета Казимира Великого, Быдгощ.

УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p И C

А. М. Седлецкий (Москва, Россия)
sedlet@mail.ru

Пусть $B = B[-\pi, \pi]$ — какое-нибудь из пространств $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leq \leq p < \infty, p \neq 2, C[-\pi, \pi]$, пусть $B_a = B[-a+\pi, a+\pi]$, $a \in \mathbb{R}$. Получен ряд условий (как необходимых, так и достаточных) для того, чтобы «возмущённая тригонометрическая система» $e^{i(n+\alpha_n)t}$, $n \in \mathbb{Z}$ была эквивалентна тригонометрической системе e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ в B_a при любом $a \in \mathbb{R}$. Вот один из результатов. Если $(\alpha_n) \in l^s$, где $1/s = |1/p - 1/2|$, то указанная эквивалентность имеет место, причём показатель s является точным. С использованием (в том числе) его доказано существование в $L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < 2$ базисов из экспонент, не являющихся эквивалентными тригонометрическому базису.

Доказательства основаны на применении мультипликаторов Фурье.

УДК 517.5

СВОЙСТВА ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИНУСАМ И КОСИНУСАМ[1]

Б. В. Симонов, И. Э. Симонова (Волгоград, Россия)
simonov-b2002@yandex.ru, simonova-vstu@mail.ru

В данной работе исследованы суммы двойных тригонометрических рядов по синусам и косинусам с кратно монотонными коэффициентами по подпоследовательностям.

Будем рассматривать двойные тригонометрические ряды вида

$$\frac{1}{2}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1,0} \sin n_1 x_1 + \sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2. \qquad (1)$$

Пусть $r_1 \in N$, $r_2 \in N$, $j_1 = 1, 2$, $j_2 = 1, 2$, $[a]$ — целая часть числа a, $k_1 = 0, 1, ..., [\frac{r_1}{2}]$, $k_2 = 0, 1, ..., [\frac{r_2}{2}]$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{10}^{(r_1,0)}(a_{n_1 n_2}) = a_{n_1 n_2} - a_{n_1+r_1 n_2},$$
$$\Delta_{01}^{(0,r_2)}(a_{n_1 n_2}) = a_{n_1 n_2} - a_{n_1 n_2+r_2},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 16-01-00350).

$$\Delta_{20}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2})=\Delta_{10}^{(r_1,0)}(\Delta_{10}^{(r_1,0)}(a_{n_1n_2})),$$
$$\Delta_{02}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})=\Delta_{01}^{(0,r_2)}(\Delta_{01}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})),$$
$$\Delta_{i_1i_2}^{(r_1,r_2)}(a_{n_1n_2})=\Delta_{i_10}^{(r_1,0)}(\Delta_{0i_2}^{(0,r_2)}(a_{n_1n_2})),$$
$$\delta_{(r_1,k_1;0)}^{(j_1,0)}(a_{n_1,n_2})=a_{r_1n_1,r_2n_2}+(-1)^{j_1+1}a_{r_1n_1+(r_1-k_1)\mathrm{sign}k_1,r_2n_2},$$
$$\delta_{(0;r_2,k_2)}^{(0,j_2)}(a_{n_1,n_2})=a_{r_1n_1,r_2n_2+k_2}+(-1)^{j_2+1}a_{r_1n_1,r_2n_2+(r_2-k_2)\mathrm{sign}k_2},$$
$$\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2})=\delta_{(r_1,k_1;0)}^{(j_1,0)}(\delta_{(0;r_2,k_2)}^{(0,j_2)}(a_{n_1,n_2})),$$
$$\sum(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\})=$$
$$=\Big(\sum_{k_2=0}^{[\frac{r_2}{2}]}\sum_{k_1=0}^{[\frac{r_1}{2}]}\sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1-\mathrm{sign}k_1}^{\infty}|\Delta_{j_1-1,2-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))|^p\times$$
$$\times(n_1+1)^{j_1p-2}(n_2+1)^{(3-j_2)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}=$$
$$=\Big(\sum_{k_2=0}^{[\frac{r_2}{2}]}\sum_{k_1=0}^{[\frac{r_1}{2}]}\sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_1=1}^{2}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1-\mathrm{sign}k_1}^{\infty}A(k_1,k_2,j_1,j_2,r_1,r_2)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема. *Пусть $0<p<\infty$, $r_1\in N$, $r_2\in N$, последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ такова, что $a_{n_1n_2}\to 0$ при $n_1+n_2\to\infty$ и для каждого $k_1=$ $=0,1,...,[\frac{r_1}{2}]$, каждого $k_2=0,1,...,[\frac{r_2}{2}]$, каждого $j_1=1,2$, каждого $j_2=$ $1,2$ справедливы следующие неравенства*

$\Delta_{j_1,3-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))\geq 0$ *для всех* n_1,n_2 *или*

$\Delta_{j_1,3-j_2}^{(r_1,r_2)}(\delta_{(r_1,k_1;r_2,k_2)}(a_{n_1,n_2}^{(i_1,i_2)}))\leq 0$ *для всех* n_1,n_2.

Тогда

$$C_1\cdot\sum(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\})\leq\|\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1,0}\sin n_1x_1+$$

$$+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2\|_p\leq C_2\cdot\sum(r_1,r_2,p,\{a_{n_1n_2}\}),\qquad(2)$$

где положительные постоянные C_1, C_2 не зависят от последовательности $\{a_{n_1n_2}\}$.

Доказательство. Для $r_1=r_2=1$ оценка (2) доказана в работе [1].

При доказательстве теоремы будут использованы обозначения: $B_0^0(x)=\frac{1}{2}$, $B_n^0(x)=\cos nx, n\in\mathbb{N}$. Пусть $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $B_l^1(x)=\sum\limits_{m=0}^{l}B_m^0(x)$, $B_l^2(x)=\sum\limits_{m=0}^{l}B_m^1(x)$, $BC_l^0(x)=\cos((2l+1)x)$, $BC_l^1(x)=\sum\limits_{m=0}^{l}BC_m^0(x)$,

$BC_l^2(x)=\sum\limits_{m=0}^{l}BC_m^1(x)$, $\overline{BC}_l^0(x)=\sin((2l+1)x)$, $\overline{BC}_l^1(x)=\sum\limits_{m=0}^{l}\overline{BC}_m^0(x)$.

Приведем доказательство для случая, когда $r_1=2$, $r_2=3$, а коэффициенты $a_{n_1n_2}$ ряда (1) удовлетворяют следующим условиям: для каждого $k_1=0,1$, каждого $k_2=0,1$, каждого $j_1=1,2$, каждого $j_2=1,2$ справедливы неравенства $\Delta_{j_1,3-j_2}^{(2,3)}(\delta_{(2,k_1;3,k_2)}^{(j_1,j_2)}(a_{n_1,n_2}))\geq 0$ для всех n_1,n_2. Аналогично доказательству из [1] получаем, что ряд (1) сходится по Прингсхейму, т.е. существует функция $f(x_1,x_2)-$ сумма ряда (1). Рассмотрим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2=\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1,x_2)|^pdx_1dx_2+$$

$$+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1,x_2+2\pi/3)|^pdx_1dx_2+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1,x_2-2\pi/3)|^pdx_1dx_2+$$

$$+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1-\pi,x_2-2\pi/3)|^pdx_1dx_2+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1-\pi,x_2)|^pdx_1dx_2+$$

$$+\int\limits_{0}^{\pi/3}\int\limits_{0}^{\pi/2}|f(x_1-\pi,x_2+2\pi/3)|^pdx_1dx_2=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6,$$

т.е. $\|f\|_p^p$ есть сумма шести интегралов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6.

Оценим I_1. Почти всюду справедливо представление:

$$f(x_1,x_2)=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2})\overline{B}_{n_1}^1(2x_1)B_{n_2}^2(3x_2)+$$

$$+\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2})\overline{BC}_{n_1}^1(x_1)B_{n_2}^2(x_2)+$$

$$+\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}(\cos(x_2/2)\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1}+a_{2n_1,3n_2+2})\overline{B}_{n_1}^1(2x_1)BC_{n_2}^2(3x_2/2)-$$

$$-\sin(x_2/2)\Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1}-a_{2n_1,3n_2+2})\overline{B}_{n_1}^1(2x_1)\overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2))+$$

$$+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(\cos(x_2/2)\Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1}+a_{2n_1+1,3n_2+2})\overline{BC}_{n_1}^1(2x_1)\times$$

$$\times BC_{n_2}^2(3x_2/2)-\sin(x_2/2)\Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1}-a_{2n_1+1,3n_2+2})\times$$

$$\times\overline{BC}_{n_1}^1(x_1)\overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2))).$$

Тогда

$$I_1 \le C_3\Big(\int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2}) \overline{B}_{n_1}^1(2x_1) B_{n_2}^2(3x_2)|^p dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2}) \overline{BC}_{n_1}^1(x_1) B_{n_2}^2(x_2)|^p dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1} + a_{2n_1,3n_2+2}) \overline{B}_{n_1}^1(2x_1) \times$$

$$\times BC_{n_2}^2(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 + \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1,3n_2+1} - a_{2n_1,3n_2+2}) \times$$

$$\times \overline{B}_{n_1}^1(2x_1) \overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 + \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \Delta_{12}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1} +$$

$$+ a_{2n_1+1,3n_2+2}) \overline{BC}_{n_1}^1(2x_1) BC_{n_2}^2(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/3} \int\limits_0^{\pi/2} |\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{11}^{(2,3)}(a_{2n_1+1,3n_2+1} - a_{2n_1+1,3n_2+2}) \overline{BC}_{n_1}^1(x_1) \times$$

$$\times \overline{BC}_{n_2}^1(3x_2/2)|^p dx_1 dx_2 \Big) = C_3(I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} + I_{16}),$$

где постоянная C_3 не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Оценим сверху каждый из полученных шести интегралов.

Оценим I_{11}. Проводя доказательство аналогично доказательству теоремы А из [1], будем иметь $I_{11} \le C_4(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$. Аналогично оцениваются $I_{12}, ..., I_{16}$. Наконец, объединяя оценки для $I_{11}, .., I_{16}$, получаем, что $I_1 \le C_5(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$. Аналогично проверяется , что каждый из интегралов I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 не превосходит $C_6(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$. Тогда их сумма не превосходит $C_7(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$, то есть оценка (2) сверху верна. Эта же схема доказательства применима и для остальных значений $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Для доказательства снизу строятся специальные функции, которые получаются преобразованием функции $f(x_1, x_2)$. Сумма $(\sum(2,3,p,\{a_{n_1 n_2}\}))^p$ при $r_1 = 2, r_2 = 3$ будет иметь шесть следующих слагаемых: $A(0,0,1,1,2,3)$, $A(0,1,1,1,2,3)$, $A(0,1,1,2,2,3)$, $A(1,0,1,1,2,3)$, $A(1,1,1,1,2,3)$, $A(1,1,1,2,2,3)$.

Покажем, например, что $\|f\|_p^p \ge C_8 \cdot A(0,0,1,1,2,3)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\frac{1}{2}\sum_{m_2=1}^{2}(f(x_1,x_2+m_2\frac{2\pi}{3})+$$

$$+f(x_1,x_2-m_2\frac{2\pi}{3}))+f(x_1+\pi,x_2)+\frac{1}{2}\sum_{m_2=1}^{2}(f(x_1+\pi,x_2+m_2\frac{2\pi}{3})+$$

$$+f(x_1+\pi,x_2-m_2\frac{2\pi}{3}))=6\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}2^{\operatorname{sign}n_2-1}a_{2n_1,3n_2}\sin(2n_1x_1)\cos(3n_2x_2).$$

Отсюда следует, что $C_9\|f\|_p\geq\|f_1\|_p$. Так как

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_1(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2=$$

$$=\int_0^{6\pi}\int_0^{4\pi}\left|\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}2^{\operatorname{sign}n_2-1}a_{2n_1,3n_2}\sin(n_1x_1)\cos(n_2x_2)\right|^p dx_1dx_2,$$

то, применяя теорему А из [1], имеем: $\|f_1\|_p^p\geq C_{10}\cdot A(0,0,1,1,2,3)$, где положительная постоянная C_{10} не зависит от последовательности $\{a_{n_1n_2}\}$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Замечание. Свойства сумм двойных рядов по синусам, а также двойных рядов по косинусам с кратно монотонными коэффициентами по подпоследовательностям рассматривались в работах [2] и [3] соответственно.

Свойства сумм одномерных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами рассматривались в [4].

Свойства сумм одномерных тригонометрических рядов с коэффициентами, монотонными по подпоследовательностям, рассматривались в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* Оценки норм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1994. № 7. С. 20–28.

2. *Симонов Б. В., Симонова И. Э.* Оценки норм сумм одного класса двойных тригонометрических рядов по синусам // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж : ВГУ, 2017. С. 178–179.

3. *Симонов Б. В., Симонова И. Э.* Оценки норм сумм одного класса двойных тригонометрических рядов по косинусам // Современные проблемы теории краевых задач. Воронеж : ВГУ, 2017. С. 152–153.

4. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1995. № 3. С. 22–32.

5. *Симонов Б. В.* О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Матем. 2013. № 10. С. 24–42.

УДК 517.17+517.51

ОБ ОСНОВНЫХ ПЕРИОДАХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. К. Соколова, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)
98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

Математическое моделирование самоподобных объектов и их свойств, а также различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве, естественным образом приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. В частности, оно возникает в зонной теории твердого тела [1], когда на волновую функцию ψ, описывающую состояние кристалла, накладывают условия Борна – Кармана

$$\psi(\bar{r} + N_i\bar{a}_i) = \psi(\bar{r}),\ i = 1, \ldots, d,$$

где $\bar{a}_i$ — элементарные трансляционные векторы решётки Бравé, d — её размерность, N_i — целые числа. В этих исследованиях предполагается существование у периодической функции $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *базисных* периодов $\bar{a}_i$ таких, что любой её период является трансляционным вектором, т. е. линейной комбинацией с целыми коэффициентами периодов $\bar{a}_i$. Данные условия продиктованы спецификой рассматриваемой задачи и следуют из структуры множества, на котором задана волновая функция, нежели из самого нелокального свойства периодичности.

Известно, что у произвольной периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не всегда существует основной период. Это имеет место даже в одномерном случае, т. е. при $n = 1$. Примерами таких функций служат постоянная функция, имеющая периодом любое действительное число, индикатор множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел или функция Дирихле с множеством периодов $\mathbb{Q}$ и многие другие. Критериев существования у периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ основного периода авторам работы неизвестно. Достаточные условия доставляет теорема, которая приведена в книгах [2, с. 8] и [3, с. 450].

Теорема 1. *Если периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной, то она имеет основной период.*

Другой более известный факт состоит в том, что, если периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет основной период T_0, то любой её период T

определяется как $T = kT_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В настоящей работе аналог теоремы 1 доказан для периодических функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданных всюду на $\mathbb{R}^n$. Введено понятие основного векторного периода в данном направлении и изучена его роль в описании множества всех векторных периодов периодической функции нескольких переменных.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *периодической с периодом* $\bar{T}$, если существует вектор $\bar{T} \neq \bar{0}$, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$.

Из определения 1 следует, что, если $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ — периоды функции f, то для любых k, $m \in \mathbb{Z}$ таких, что $k^2 + m^2 \neq 0$, вектор $k\bar{T}_1 + m\bar{T}_2$ также является периодом этой функции.

Рассмотрим n-мерные прямые $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором $\bar{T}$, где $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$. Эту точку можно выбирать, например, в линейном многообразии $\langle \bar{r}, \bar{T} \rangle = 0$, тогда соответствие $\bar{a} \to \ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ будет взаимно однозначным. Параметрическое уравнение прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ имеет вид $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{\mathcal{T}}$. Здесь и всюду далее $t \in \mathbb{R}$ — переменная, $\bar{T} = |\bar{T}|\, \bar{\mathcal{T}}$. Вдоль каждой такой прямой функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принимает значения $f(\bar{r})\big|_{\bar{r} \in \ell_{\bar{T}}(\bar{a})} = f(\bar{a} + t\bar{\mathcal{T}})$, т. е. является функцией $g_{\bar{a}}(t) = f(\bar{a} + t\bar{\mathcal{T}})$ одной переменной.

Лемма. *Всякая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, периодическая с периодом $\bar{T}$, является периодической с периодом $|\bar{T}|$ вдоль каждой прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором $\bar{T}$.*

Для доказательства следует показать периодичность с периодом $|\bar{T}|$ функций $g_{\bar{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом $\bar{T}$. Период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовем *основным периодом функции f в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.*

Теорема 2. *Если периодическая с периодом $\bar{T}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$, то она имеет основной период в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.*

Предположим, что у периодической функции f нет основного периода в направлении $\bar{\mathcal{T}}$, тогда существует её период $\bar{S}$ сколь угодно малого модуля, сонаправленный с $\bar{T}$. По лемме $|\bar{S}|$ — период функций $g_{\bar{a}}$, при этом хотя бы одна из них, согласно теореме 1, имеет основной период, что противоречит малости $|\bar{S}|$.

Теорема 3. *Если у периодической функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует основной период $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$, то любой её период $\bar{T}$, коллинеарный $\bar{\mathcal{T}}$, имеет вид $\bar{T} = k\bar{T}_0$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Пусть $\bar{T}_0$ — основной период периодической функции f в направлении $\bar{\mathcal{T}}$. Предположим, что существует коллинеарный $\bar{\mathcal{T}}$ её период

$\bar{S} = \alpha\bar{T}_0$, где $|\alpha| > 1$ и $\alpha \notin \mathbb{Z}$, тогда вектор $\bar{S} - [\alpha]\bar{T}_0$, сонаправленный с $\bar{\mathcal{T}}$, также будет периодом функции f как нетривиальная линейная комбинация её периодов $\bar{S}$ и $\bar{T}_0$ с целыми коэффициентами, но $|\bar{S} - [\alpha]\bar{T}_0| = \{\alpha\}|\bar{T}_0|$, т. е. его модуль меньше $|\bar{T}_0|$, а это противоречит тому, что $\bar{T}_0$ — основной период функции f в направлении $\bar{\mathcal{T}}$. Здесь $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ обозначены целая и дробная части числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Пусть множество периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является m-мерной решёткой, порождённой периодами $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$, тогда все эти периоды являются основными в данных направлениях $\bar{\mathcal{T}}_1, \bar{\mathcal{T}}_2, \ldots, \bar{\mathcal{T}}_m$ соответственно.*

Согласно определению из [4, с. 13], m-мерной решёткой называют множество всех возможных нетривиальных линейных комбинацией с целыми коэффициентами m линейно независимых n-мерных векторов. Пусть $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$ являются периодами функции f, но период $\bar{T}_i$ не является основным в направлениях $\bar{\mathcal{T}}_i$ и $-\bar{\mathcal{T}}_i$, тогда по теореме 3 его вид $\bar{T}_i = k_i\bar{T}_{0i}$, где $\bar{T}_{0i}$ — основной период функции f в направлении $\bar{\mathcal{T}}_i$, а $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $k_i \neq \pm 1$. Поскольку множество всех периодов функции f является решеткой, то период $\bar{T}_{0i}$ представим нетривиальной линейной комбинацией $\bar{T}_{0i} = \alpha_1\bar{T}_1 + \alpha_2\bar{T}_2 + \cdots + \alpha_m\bar{T}_m$ векторов $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$ с коэффициентами $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$. Справедливо равенство

$$\sum_{j \neq i} k_i\alpha_j\bar{T}_j + (k_i\alpha_i - 1)\bar{T}_i = \bar{0}.$$

В силу линейной независимости векторов $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$, из него следует $k_i\alpha_j = 0$ при всех $j \neq i$, и $k_i\alpha_i = 1$, т. е. $k_i = -1$ или $k_i = 1$, что противоречит исходному предположению о векторе $\bar{T}_i$. Таким образом, *все базисные векторы решётки периодов данной периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ являются основными в своих направлениях.*

Обратное неверно, т. е. не всякий набор из m линейно независимых основных периодов данной периодической функции f в соответствующих направлениях будет базисом m-мерной решётки её периодов. В качестве примера приведем функцию $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ вида $(x, y, z) \to \sin x \sin y + z^2$, которая имеет двумерную решётку периодов, порождённую базисными векторными периодами $\bar{T}_1\{\pi;\ \pi;\ 0\}$ и $\bar{T}_2\{-\pi;\ \pi;\ 0\}$, основными в направлениях $\bar{\mathcal{T}}_1\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\}$ и $\bar{\mathcal{T}}_2\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\}$. Но пара векторов $\bar{T}_1\{2\pi;\ 0;\ 0\}$ и $\bar{T}_2\{0;\ 2\pi;\ 0\}$, основных периодов данной функции в направлениях $\bar{i}$ и $\bar{j}$ соответственно, базисными векторами решётки периодов не являются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твёрдого тела. Том 1. М. : Мир, 1979. 400 с.

2. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970. 304 с.

3. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Курс высшей математики и математической физики. Кратные интегралы и ряды. М. : Наука, 1965. 608 с.

4. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3–122.

УДК 517.518.87

К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю. С. Солиев (Москва, Россия)
su1951@mail.ru

Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов рассматривалась в работах И. В. Бойкова, Б. Г. Габдулхаева, И. К. Лифанова, А. М. Линькова и их последователей. Некоторый обзор работ по этой тематике содержится в работе [1]. Из зарубежных работ отметим работу [2], где построены квадратурные формулы типа Гаусса для гиперсингулярного интеграла с весовой функцией.

Ниже рассматривается приближенное вычисление гиперсингулярного интеграла [3, 4]

$$Af = A(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2}dt, x \in (-\infty;+\infty), \tag{1}$$

понимаемого в смысле конечной части по Коши – Адамару, где $f(x)$ — плотность интеграла.

Будем придерживаться обозначений классов функций как в работах [5–7].

Пусть $L_nf = L_n(f;x)$ — дробно-рациональная функция, интерполирующая $f(x)$ по узлам

$$x_k = \mathrm{tg}(k\pi/N), \quad k = \overline{-[(N-1)/2], n}, \quad n = [N/2], \tag{2}$$

где $[\xi]$ — целая часть числа ξ.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением L_nf получим квадратурную формулу

$$Af = A(L_nf;x) + R_nf = \frac{1}{N}\sum_{k=-[(N-1)/2]}^{n} a_k^{(n)}(x)f(x_k) + R_nf, \tag{3}$$

где

$$a_k^{(n)}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{p(x)} \sum\limits_{v=1}^{n} v(C_v(x)C_v(x_k) + S_v(x)S_v(x_k)), \quad N = 2n+1; \\ -\frac{2}{p(x)} \sum\limits_{v=1}^{n-1} v(C_v(x)C_v(x_k) + S_v(x)S_v(x_k)) - \frac{n}{p(x)} C_n(x)C_n(x_k), \ N = 2n, \end{cases}$$

а $R_n f = R_n(f; x)$ — остаточный член.

Теорема 1. *Если* $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A)$, $0 < \beta \le 1$, $r \ge 1$, *то для остаточного члена квадратурной формулы* (3) *справедлива оценка*

$$\|R_n f\|_C = O(n^{-r-\beta+1} \ln n), \quad r + \beta > 1.$$

Если же $f(x) \in W_p^{(r)}(M)$, $r > 1$, *то* $\|R_n f\|_C = O(n^{-r+1} \ln n)$, $r > 1$. *Пусть* $P_n f = P_n(f; x)$ *— дробно-рациональная функция, интерполирующая* $f(x) \in W_m,\ p^{(r)}\ \ (M, \delta, -\infty, +\infty)$, $r > 1$, *по узлам* (2).

Теорема 2. *Если* $f(x) \in W_{m,p}^{(r)}\ \ (M, \delta, -\infty, +\infty)$, $r > 1$, *то справедлива оценка*

$$\|R_n f\|_C = \|A(f - P_n f)\|_C = O(n^{-r+1} \ln n), \quad r > 1.$$

Пусть $H_n f = H_n(f; x)$ — дробно-рациональная функция, интерполирующая $f(x)$ по узлам (2) в том смысле, что $H_n(f; x_k) = f(x_k)$, $H_n'(f; x_k) = f'(x_k)$.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A)$, $0 < \beta \le 1$, $r \ge 1$, *то справедлива оценка*

$$\|R_n f\|_C = \|A(f - H_n f)\|_C = O(n^{-r-\beta+2} \ln n), r + \beta > 2.$$

Если же $f(x) \in W_p^{(r)}(M), r > 1$, *то* $||R_n f||_C = ||A(f - H_n f)||_C = O(n^{-r+2} \ln n)$, $r > 2$.

Приводятся явные виды интерполяционных и квадратурных формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойков И. В.* Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов : монография в 2 ч. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. 252 с.

2. *Tsamasphyros G., Dimou G.* Gauss quadrature rules for finite part integrals // Int. Journal for numerical methods in engineering. 1990. Vol. 30. P. 13–26.

3. *Анфиногенов А. Ю., Лифанов И. К., Лифанов П. И.* О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях // Матем. сб., 2001, т.192, № 8, с.3–46.

4. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М. : Янус-К, 2001. 508 с.

5. *Онегов Л. А.* Дробно-рациональная аппроксимация сингулярных интегралов по действительной оси // Изв. вузов. Матем. 1976. № 3. С. 43–55.

6. *Пыхтеев Г. Н.* О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1969. № 5. С. 55-63.

7. *Пыхтеев Г. Н., Шешко М. А.* Приближенное вычисление интеграла Шварца и интеграла Гильберта при помощи полилогарифмов // ИАН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1973. № 2. С. 11–22.

УДК 517.9

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СВОЙСТВА ЯДРА СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ состоит из всех аналитических функций $f(z)$, $z \in \mathbb{D} = (|z| < 1)$, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Известно, что пространство H^2 является функциональным гильбертовым пространством и имеет воспроизводящее ядро, которое называется ядром Сеге

$$f(\zeta) = (f, K_\zeta), \qquad K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta} z}, \qquad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Рассмотрим вопрос: возможно ли представление произвольной функции $f \in H^2$ в виде ряда по элементам системы $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ с коэффициентами $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

$$f = \sum_{n=1}^\infty x_n K_{\zeta_n}$$

при выполнении некоторых условий на последовательность попарно различных точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$.

Прежде всего, необходимым условием существования представления является отрицание условия Бляшке, т.е. условие

$$\sum_{n=1}^\infty (1 - |\zeta_n|) = \infty,$$

так как оно равносильно полноте в H^2 системы $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^\infty$ (см., напр., [1]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Зададим последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ специального вида, а именно, разбитую на блоки

$$\zeta_n = \zeta_{k,j} = r_k e^{2\pi i j/N_k}, \qquad j = 0, \dots, N_k - 1, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{1}$$

Далее предполагаем, что последовательность «радиусов» $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < r_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1 \tag{2}$$

и $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что

$$\frac{a}{N_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{N_k}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

для некоторых постоянных $0 < a \le b < \infty$.

Теорема 1. *Пусть последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида* (1) *удовлетворяет условиям* (2) *и* (3). *Тогда система $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ образует фрейм в пространстве H^2 относительно модельного пространства $\ell^{1,2}$, состоящего из всех последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{k,j}\}_{k=1,j=0}^{\infty\ \ N_k-1}$, для которых конечна норма*

$$\|x\|_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N_k}\sum_{j=0}^{N_k-1}|x_{k,j}|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Здесь используется следующее определение фрейма из работы [2]. Банахово пространство X, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется *модельным*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X. Сопряженное пространство X^* к модельному пространству X изометрически изоморфно банахову пространству Y, состоящему из числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Соответствующий изоморфизм дается равенством $y_n = (e_n, x^*)$, $n = 1, 2, \dots$, где $x^* \in X^*$, причем $\|y\|_Y := \|x^*\|_{X^*}$.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *фреймом в F относительного модельного пространства X*, если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для каждого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \le \|\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G.$$

Всякий фрейм $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F относительно X является системой представления.

Следствие. *В предположениях теоремы* 1 *для любой функции* $f \in H^2$ *существует числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{1,2}$ *такая, что справедливо представление* $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n K_{\zeta_n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Partington J.* Interpolation, Identification, and Sampling. Oxford :C larendon Press, 1997.

2. *Терехин П. А.* Системы представления и проекции базисов // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 6. С. 944–947.

3. *Сперанский К. С., Терехин П. А.* Фреймовые свойства ядра Сеге в пространстве Харди // Тр. Матем.атического центра им. Н. И. Лобачевского. 2017. Т. 54. С. 337–339.

УДК 517.987

О ПРОДОЛЖЕНИИ КОМПОЗИЦИОННОЙ СУБМЕРЫ ПО ЛЕБЕГУ

Т. А. Срибная (Самара, Россия)

sribnayata@mail.ru

При решении задачи о продолжении неаддитивной функции множества наряду с применением общего топологического принципа продолжения по непрерывности (см., например, [1, 2]), используется конструктивный подход ([3, 4]).

В предлагаемой работе для продолжения композиционной субмеры используется лебеговская конструкция продолжения меры ([5], [6]).

Пусть T — некоторое множество, Σ — некоторый непустой класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$, $R(\Sigma)$ — кольцо множеств, порожденное классом Σ.

Класс множеств, замкнутый относительно образования разности, будем называть m-классом.

Будем говорить, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$, — непрерывна в нуле (соответственно, непрерывна сверху в нуле) на Σ, если для любой последовательности множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$, сходящейся к пустому множеству (соответственно, $E_n \downarrow \varnothing$) справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = 0. \qquad (1)$$

Будем говорить, что функция множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$, — исчерпывающая на Σ, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение (1).

Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$, — множество непрерывных, строго возрастающих функций, удовлетворяющих условию $f(x) \geq x$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Монотонную функцию множества $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$, будем называть композиционной субмерой первого рода, если существуют функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ такие, что для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, справедливо

$$\varphi(A \cup B) \leq f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B);$$

и композиционной субмерой второго рода, если существуют функции $g, f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ такие, что для любых непересекающихся множеств $A, B \in \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, справедливо

$$\varphi(A \cup B) \leq g(f_1\varphi(A) + f_2\varphi(B)).$$

Если $f_1(x) = g(x) = x$, $f_2(x) = f(x)$, $f \in \mathcal{F}$, то функцию φ будем называть f-композиционной субмерой.

Пусть $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(\varnothing) = 0$, $\varphi'(E) = \sup\{\varphi(A), A \subset E, A \in \Sigma\}$, $E \subset T$, — супремация функции φ.

Пусть Σ_σ — класс счетных объединений множеств класса Σ, $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ — наследственное σ-кольцо, порожденное классом Σ_σ. Для каждого множества $E \in \mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$ положим

$$\varphi^*(E) = \inf\{\varphi'(F), E \subset F, F \in \Sigma_\sigma\}.$$

Обозначим через Σ_φ совокупность множеств σ-кольца $\mathcal{H}(\Sigma_\sigma)$, удовлетворяющих условию:

$$E \in \Sigma_\varphi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists e \in R(\Sigma) : \varphi^*(E \triangle e) < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Пусть φ — композиционная субмера первого рода, заданная на m-классе Σ. Пусть субмера φ непрерывна сверху в нуле и исчерпывающая на Σ. Тогда*

1) $\Sigma \subset \Sigma_\varphi$ и функция множества φ^* совпадает с φ на Σ;

2) совокупность множеств Σ_φ является σ-кольцом, причём ограничение φ^* на Σ_φ является композиционной субмерой второго рода, непрерывной в нуле на Σ_φ;

3) если Σ — кольцо множеств, а φ — f-композиционная субмера на Σ, то φ^* единственная непрерывная в нуле f-композиционная субмера, являющаяся продолжением φ на σ-кольцо Σ_φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусельников Н. С.* О продолжении квазилипшицевых функций множества // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 21–31.

2. *Савельев Л. Я.* Внешние меры и внешние топологии // Сиб. матем. журн. 1983. № 2. С. 133–149.

3. *Климкин В. М.* Срибная Т. А. Продолжение квазитреугольной субмеры // Изв. вузов. Матем. 1992. № 2. С. 42–48.

4. *Срибная Т. А.* Продолжение функции множества со значениями в частично упорядоченной полугруппе // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. 2007. № 6 (56). С. 269–280.

5. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир. 1969. 309 с.

6. *Богачев В. И.* Основы теории меры. М.; ИжевскЁ: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. 2006. Т. 1. 583 с.

УДК 517.538.52+517.538.53

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ[1]

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, М. В. Сидорцов
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com, sidortsov@mail.ru

Пусть $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — произвольные различные действительные числа, а $n_0 = n, n_1 = \alpha n, n_2 = \beta n$, где n, α, β – натуральные числа (α, β — фиксированы). Будем рассматривать многочлены $A^p_{n_p}(z)$, $deg\, A^p_{n_p} \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, 2$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{2} A^p_{n_p}(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+n_2-1}\right) , \quad z \to 0 . \tag{1}$$

Многочлены $\{A^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^2$ введены Эрмитом [1] в связи с исследованием алгебраической природы числа e. Согласно современной терминологии (см. [2]) их называют *многочленами Эрмита – Паде 1-го рода (Latin type)* для системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$. Диагональному случаю соответствует набор параметров, при котором $n = n_0 = n_1 = n_2$.

В настоящее время теория многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде (определение аппроксимаций Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода см. в [2, 3]) активно развивается и составляет самостоятельное направление комплексного анализа и теории приближений. Традиционно аппроксимации Эрмита – Паде имеют приложения к теории диофантовых приближений, к задачам приближения аналитических функций и аналитического продолжения. Они оказались полезными в теории несимметричных разностных операторов и в теории случайных матриц.

До недавнего времени в основном изучались свойства диагональных многочленов (подробнее см. [4]). В [5] К. Драйвер и Н. Темме исследовали асимптотику недиагональных квадратичных многочленов Эрмита – Паде

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

и получили соответствующий результат в случае, когда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $n_0 = n$, $n_1 = \alpha n$, $n_2 = n$.

В данной работе получено обобщение результата К. Драйвер и Н. Темме. Нами исследуются асимптотические свойства недиагональных квадратичных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{2}$, которые представляются (см. [1]) в следующем виде

$$A_{n_p}^{p}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int\limits_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \leqslant p \leqslant 2\,, \tag{2}$$

где $\varphi(\xi) = \xi(\xi-\lambda_1)^{\alpha}(\xi-\lambda_2)^{\beta}$, а C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга.

Пусть x_j, $j = 1, 2$ нули функции $\varphi'(\xi)$, т.е. $\varphi'(x_j) = 0$, $j = 1, 2$. Ясно, что x_j – действительные числа и $x_1 \in (0, \lambda_1)$, $x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Считаем, что G – такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^{2} \subset G \subset \mathbb{C} \backslash \{\lambda_p\}_{p=0}^{2}$. Тогда (см. [6]) функция (везде далее i — мнимая единица)

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi),$$

где

$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)|, \text{ если } \varphi(x_1) > 0,$$

$$S(x_1) = -\ln|\varphi(x_1)| - i\pi, \text{ если } \varphi(x_1) < 0,$$

является однозначной аналитической функцией в G. Значение функции $S(\xi)$ вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -\ln|\varphi(\xi)| - i[Im S(x_1) + \Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\Delta_\gamma \arg \varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_j) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_j)}}\, e^{nS(x_j)}, \quad j = 1, 2.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть $n_0 = n$, $n_1 = \alpha n$, $n_2 = \beta n$. Тогда для каждого фиксированного числа $z \in \mathbb{C}$ при $n \to \infty$*

$$A_{n_0}^{0}(z) = B_n(x_1) e^{x_1 z} \left(1 + O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^1_{n_1}(z) = B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_1)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right) - B_n(x_1)e^{(x_1-\lambda_1)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^2_{n_2}(z) = -B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_2)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right).$$

Введем обозначения

$$\rho = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2}},$$

$$D_{n,\alpha} = \rho^{1-\alpha}(2n+\alpha n)(2n+\alpha n-2)\dots(\alpha n+2).$$

Из теоремы получаем следствие равносильное (с учётом нормировки многочленов) теореме 3.2 из работы [5].

Следствие. *Пусть* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $n_0 = n+1$, $n_1 = \alpha(n+1)$, $n_2 = n+1$. *Тогда для каждого фиксированного числа* $z \in \mathbb{C}$ *при* $n \to \infty$

$$A^0_{n_0}(z) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{2^{n+1}n!}D_{n,\alpha}e^{(1-\rho)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^1_{n_1}(z) = \frac{(-1)^{n_2}}{2^{n+1}n!}D_{n,\alpha}\left[e^{\rho z} + (-1)^{n_1+1}e^{-\rho z}\right]\left(1+O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^2_{n_2}(z) = \frac{(-1)^{n_2+1}}{2^{n+1}n!}D_{n,\alpha}e^{-(1-\rho)z}\left(1+O\left(1/n\right)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. № 21. P. 289–308.

2. *Stahl H.* Asymptotics fo quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function // Electron. Trans. Numer. Anal. 2002. Vol. 14. P. 195–222.

3. *Лопес Лагомасино Г., Медина Перальта С., Фидальго Прието У.* Аппроксимации Эрмита – Паде для некоторых систем мероморфных функций // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 2. С. 57–76.

4. *Старовойтов А. П., Кечко Е. П.* О некоторых свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 338–355.

5. *Driver K. A., Temme N. M.* On polynomials related with Hermite–Pade approximants to the exponential function // J. Approx. Theory. 1998. № 95. P. 101–122.

6. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1989. 479 с.

УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ В ВЫПУКЛЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОНУСАХ[1]

Ф. С. Стонякин (Симферополь, Россия)
fedyor@mail.ru

Многие задачи анализа приводят к необходимости вместо линейных пространств рассматривать так называемые абстрактные выпуклые конусы. Теория выпуклых конусов с нормой (далее — нормированных конусов) активно развивается, в этой области известно немало современных работ (см., например [1–3]). Отметим, что класс нормированных конусов значительно шире класса линейных пространств: даже в двухмерном линейном пространстве можно определить топологически неэквивалентные нормированные конусы, не допускающие линейного инъективного изометричного вложения ни в какое нормированное пространство.

Пример 1. Множество X числовых пар (a, b), где $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$, причём $b = 0$ означает $a = 0$. Норма в X вводится следующим образом: $\|(a, b)\|_X = a + b^2/a$ при $a \neq 0$ и $\|(0, 0)\|_X = 0$. Отметим, что единичный шар $B_X(0) = \{(a, b) \in X \mid \|(a, b)\|_X \leqslant 1\}$ есть круг радиуса $1/2$ с центром в точке $(0, 1/2)$.

Настоящая работа посвящена аналогу известной теоремы Банаха-Алаоглу о $*$-слабой компактности единичного шара в сопряжённом пространстве для специального класса нормированных конусов, а также некоторым приложениям к экстремальным задачам.

Недавно нами (см. [4]) был выделен класс отделимых нормированных конусов X, точки которых можно разделить функционалами вида

$$p_\ell(x) = \max\{0, \ell(x)\} \ \forall x \in X, \tag{1}$$

где $\ell : X \to \mathbb{R}$ — линейны и ограничены по норме ($\ell(x) \leqslant C||x|| \ \forall x \in X$ при некотором $C > 0$), причем $\ell(x_0) \geqslant 0$ для некоторого $x_0 \neq 0$.

Набор $\widehat{X}^*_{sub}$ функционалов вида (1) мы назовём *субсопряженным конусом.* На этом множестве можно ввести операции сложения и умножения на неотрицательный скаляр следующим образом: $p_{\ell_1} \oplus p_{\ell_1} := p_{\ell_1+\ell_2}$, $\lambda \cdot p_\ell := p_{\lambda \cdot \ell}$ для произвольных ℓ_1, ℓ_2 и $\lambda \geqslant 0$. Относительно введённых операций $\widehat{X}^*_{sub}$ будет нормированным конусом с нормой

$$||p_\ell||_{\widehat{X}^*_{sub}} := \sup_{x \neq 0} \frac{p_\ell(x)}{||x||}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (проект МК-176.2017.1).

Отметим (см. [4]), что всякий отделимый нормированный конус можно метризовать. Точнее говоря, в отделимом нормированном конусе существует такая однородная метрика $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$, что $d_X(0, x) = ||x||$ $\forall\, x \in X$. При этом в нормированных пространствах $(E, ||\cdot||)$ будут верны неравенства:

$$\frac{1}{2}||x - y|| \leqslant d_E(x, y) \leqslant ||x - y|| \quad x, y \in E.$$

Естественно можно ввести $*$-слабую сходимость последовательность в субсопряженном конусе $\widehat{X}^*_{sub}$ к нормированному конусу X:

$$p_\ell = *\text{-}\lim_{n\to\infty} p_{\ell_n}, \text{ если } p_\ell(x) = \lim_{n\to\infty} p_{\ell_n}(x) \quad \forall x \in X.$$

Справедлив следующий аналог теоремы Банаха-Алаоглу в классе нормированных конусов.

Теорема 1. *Если (X, d_X) — сепарабельное метрическое пространство, то $B^* = \{p_\ell \in \widehat{X}^*_{sub} \mid ||p_\ell||_{\widehat{X}^*_{sub}} \leqslant 1\}$ — компактное метрическое пространство для некоторой метрики.*

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение о существовании минимума функционала, заданного на $*$-замкнутом подмножестве конуса $X = \widehat{Y}^*_{sub}$ для некоторого отделимого d_Y-сепарабельного нормированного конуса Y.

Теорема 2. *Пусть $X = \widehat{Y}^*_{sub}$, Y — отделимый d_Y-сепарабельный нормированный конус, $f : A \to \mathbb{R}$ — собственный функционал ($f(x) > > -\infty\ \forall x \in A$), непрерывный на замкнутом выпуклом множестве A в стандартной конус-топологии, порождённой системой окрестностей $B_\varepsilon(x) = \{x+h \mid \|h\| \leqslant \varepsilon,\, h \in X\}$ точек $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой элемент $a_0 \in A$, что $f(a_0) = \min\limits_{x\in A} f(x)$, а также последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in A$, для которой $f(a_0) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(a_k)$.*

Отметим, что функционал f может быть собственным в конусе X, но несобственным во всяком нормированном пространстве $E_X \supset X$. К примеру, этот будет верно для функционала $f((a, b)) = -b^2/a$ в нормированном конусе X из примера 1.

Теоремы 1 и 2 удобно применять в случае $X = \widehat{X}^*_{sub}$. Будем называть такие конусы X *самосопряжёнными*. Самосопряжённым будет, например, нормированный конус из примера 1.

С использованием теоремы 2 можно доказать разрешимость задачи о существовании ближайшей к $x_0 \notin A$ точки $*$-слабо компактного выпуклого множества A, если для некоторого нормированного конуса Y верно

$X = \widehat{Y}^*_{sub}$. Заметим, что аналогичные задачи в линейных пространствах с несимметричной нормой рассмотрены Г. Е. Ивановым, например, в [5].

Расстоянием от точки $x_0 \in A$ до множества A будем называть величину

$$\rho(x_0, A) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \cap x_0 + \varepsilon B_X(0) \neq \varnothing\},$$

где $B_X(0) = \{x \in X \mid ||x|| \leqslant 1\}$.

В отличие от расстояний в нормированных (и несимметрично нормированных [5]) пространствах, в нормированном конусе X возможно $A \cap \{x_0 + \varepsilon B_X(0)\} = \varnothing \ \forall \varepsilon > 0$. В таком случае будем полагать, что $\rho(x_0, A) = +\infty$. Например, так будет в случае $X = \{(a,b) \mid a, b \geqslant 0\}$ при $||(a,b)||_X = \sqrt{a^2 + b^2}$ для множества $A = \{(a,b) \mid \max\{a,b\} \leqslant 1\}$ и точки $x_0 = (2,2)$.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи нахождения ρ-ближайшей точки множества A к точке $x_0 \notin A$.

Теорема 3. *Пусть A — $*$-слабо замкнутое подмножество нормированного конуса $X = \widehat{Y}^*_{sub}$ для некоторого нормированного конуса Y, где (Y, d_Y) — сепарабельное метрическое пространство. Если $\rho(x_0, A) < +\infty$, то существует $a_0 \in A : a_0 = x_0 + h$, где $h \in X$ и $||h|| = \rho(x_0, A)$.*

В нормированных конусах можно ввести, вообще говоря, отличную от ρ, функцию расстояния от точки $x_0 \in X$ до множества $A \subset X$:

$$\widehat{\rho}(x_0, A) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid x_0 \in A + \varepsilon B_X(0)\}.$$

Для задачи о наилучшем приближении с точки зрения $\widehat{\rho}$ справедлив аналог теоремы 3 для $*$-слабо компактного подмножества $A \subset X$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Selinger P.* Towards a semantics for higher-order quantum computation // Proc. 2nd Intern. Workshop on Quantum Programming Languages. 2004. Vol. 33. P. 127–143.

2. *Garcia-Raffi L. M., Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* Metrizability of the unit ball of the dual of a quasi-normed cone // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2004. 7-B:8. P. 483–492.

3. *Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* A Characterization of Generalized Monotone Normed Cones // Acta Math. Sinica. English Ser. 2007. Vol. 23, iss. 6. P. 1067–1074.

4. *Stonyakin F. S.* Subdifferential calculus in abstract convex cones // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov). 2017. P. 316–319.

5. *Ivanov G. E.* Weak convexity of sets and functions in a Banach space // J. Convex Analysis. 2015. Vol. 22, iss. 2. P. 365–398.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. И. Страхов (Самара, Россия)
www.stepan121@mail.ru

Замкнутое подпространство H симметричного пространства X на $[0,1]$ называется сильно вложенным в X, если в H сходимость по X-норме эквивалентна сходимости по мере. Рассматриваются симметричные пространства X, все рефлексивные подпространства которых сильно вложены в X. Приведем один из результатов.

Теорема 1 [1]. *Предположим, что симметричное пространство* X *на отрезке* $[0,1]$ *обладает следующим свойством: если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \overset{w}{\to} 0$ *в* X *и* $x_n \overset{\mu}{\to} 0$, *то* $\|x_n\|_X \to 0$. *Тогда любое рефлексивное подпространство* $Y \subset X$ *сильно вложено в* X.

Теорема 1 является усилением результатов работы [2], где аналогичное утверждение было доказано для пространств Орлича, в которых выполнен аналог классического описания Данфорда-Петтиса относительно слабо компактных подмножеств пространства L_1 (см., например, [3, теорема 5.2.9]). Заметим, что согласно [4] в классе симметричных пространств X следующие свойства эквивалентны:

(1) из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \overset{w}{\to} 0$ в X и $x_n \overset{\mu}{\to} 0$ следует: $\|x_n\|_X \to 0$;

(2) в X имеет место аналог описания Данфорда – Петтиса относительно слабо компактных подмножеств пространства L_1.

В то же время для широкого класса симметричных пространств обратное утверждение к теореме 1 не имеет места. Если $\varphi(t)$ — вогнутая возрастающая функция на $[0,1]$, то пространство $M_0(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(s)$ таких, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\int_0^t x^*(s)\,ds}{\varphi(t)} = 0,$$

с нормой

$$||x||_{M_0(\varphi)} := \sup_{0<t\le 1} \frac{\int_0^t x^*(s)\,ds}{\varphi(t)}.$$

Тогда, если $\varphi(t) \ge ct\ln^{1/2}(e/t)$ для некоторого $c > 0$ и всех $0 < t \le$ ≤ 1, то пространство $M_0(\psi)$ не обладает свойством (1) (и эквивалентно (2)), однако любое его рефлексивное подпространство силбно вложено в $M_0(\varphi)$.

Результаты получены совместно с С. В. Асташкиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асташкин С. В., Страхов С. И.* О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. (Принята к печати).

2. *Lavergne E.* Reflexive subspaces of some Orlicz spaces // Colloquium Math. 2008. Vol. 113, iss. 2. P. 333–340.

3. *Albiac F., Kalton N. J.* Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics 233 (Springer, New York, 2006).

4. *Astashkin S. V., Kalton N. J., Sukochev F. A.* Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces // Positivity. 2008. Vol. 12. P. 387–406.

УДК 517.521

NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS AND POLYNOMIALS, ORTHOGONAL IN THE SOBOLEV SENSE AND GENERATED BY CLASSICAL CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF DISCRETE VARIABLE

M. S. Sultanakhmedov (Makhachkala, Russia)
sultanakhmedov@gmail.com

We consider the Cauchy problem for the nonlinear difference equation

$$\Delta y(x) = hf(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad h > 0, \tag{1}$$

in which the function $f(x, y)$ we shall assume as given on the Cartesian product $\Omega_N \times \mathbb{R}$, where $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Here and below $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$ is the finite difference operator.

It is required to approximate with a specified accuracy defined on Ω_{N+1} function $y = y(x)$, which represents the solution of problem (1).

Let us consider the system of polynomials $\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(x, N)$, $(n = 0, 1, \ldots, N)$, also defined on the net Ω_{N+1} and orthogonal in the Sobolev sense with respect to the following scalar product

$$\langle \tau_{1,n}^{\alpha,\beta}, \tau_{1,m}^{\alpha,\beta} \rangle = \tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(0)\tau_{1,m}^{\alpha,\beta}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(j)\Delta\tau_{1,m}^{\alpha,\beta}(j)\mu(j),$$

where $\alpha, \beta > -1$, $\mu(x)$ – discrete weight function given by equality

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}.$$

Polynomials $\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(x, N)$ are determined through the classical Chebyshev polynomials of discrete variable by the following expressions:

$$\tau_{1,0}^{\alpha,\beta}(x, N) = 1, \quad \tau_{1,k+1}^{\alpha,\beta}(x, N) = \sum_{t=0}^{x-1} \tau_k^{\alpha,\beta}(t, N).$$

In current work we propose a new approach to the approximate solution of (1), based on decomposition of the function $y(x)$ on the grid Ω_{N+1} into a finite Fourier series by polynomials $\tau_{1,n}^{\alpha,\beta}(x,N)$:

$$y(x) = y(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_{1,k+1}\tau_{1,k+1}^{\alpha,\beta}(x,N), \quad x \in \Omega_{N+1}.$$

where

$$\hat{y}_{1,k+1} = \sum_{t=0}^{N-1} \Delta y(j)\tau_k^{\alpha,\beta}(j,N)\mu(j), \quad (k \geq 0).$$

We note that the obtained results can be generalized to systems of difference equations of the form $\Delta y(x) = hf(x,y)$, $y(0) = y_0$, with $f = (f_1,\ldots,f_m)$, $y = (y_1,\ldots,y_m)$.

Moreover, problem (1) is of interest in connection with the fact, that the issue of the approximate solution of the Cauchy problem for ordinary differential equation

$$y'(x) = hf(x,y), \quad y(0) = y_0, \quad h > 0,$$

can be reduced to it.

УДК 517.5

РАСХОДИМОСТЬ СУММ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

С. А. Теляковский, Н. Н. Холщевникова (Москва, Россия)
sergeyaltel@ya.ru, kholshchevnikova@gmail.com

Пусть f — функция ограниченной вариации на промежутке $[0,1)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x)$$

ее ряд Фурье – Уолша. Рассматривается система Уолша в нумерации Пэли. Как известно, ряды Фурье функций ограниченной вариации по тригонометрической системе всюду сходятся. В случае системы Уолша такие ряды сходятся в каждой точке непрерывности функции f (и даже в точках, где выполняется более слабое условие непрерывности), но могут расходиться в точках разрыва, хотя и ограниченно. Пусть $\{n_j\}$ —

строго возрастающая последовательность номеров. Рассмотрим вопрос о сходимости ряда по модулям блоков

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)|,$$

в метрике $L^\infty[0,1)$.

В работах [1–4] для тригонометрических рядов Фурье функций ограниченной вариации исследовались условия на последовательность их разбиения на блоки, при которых ряд по блокам абсолютно сходится к суммируемой функции, к ограниченной функции, к функции суммируемой с квадратом. Напомним первый и второй результаты, так как для соответствующих вопросов получены решения и в случае системы Уолша.

Пусть $\{n_j\}$ — строго возрастающая последовательность номеров, f — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$ и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ее ряд Фурье.

В работе [1] установлено достаточное условие на последовательность $\{n_j\}$ для того, чтобы для всякой функции ограниченной вариации ее ряд Фурье абсолютно сходился по блокам к суммируемой функции, а именно,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)| \in L[-\pi, \pi]. \tag{1}$$

Это следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log(\min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1))}{n_j} < \infty.$$

В статье [2] показано, что это условие является и необходимым в данном вопросе. При этом само условие можно записать в эквивалентной форме:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log(n_{j+1} - n_j + 1)}{n_{j+1}} < \infty.$$

В работе [5] рассмотрена аналогичная задача для рядов Фурье функций ограниченной вариации по системе Уолша – Пэли.

Приведем несколько обозначений и определений. Всякое неотрицательное целое число n имеет двоичное разложение вида $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1. *Вариацией* такого числа n называется величина

$$V(n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| + \varepsilon_0.$$

Пусть n_{j+1} и n_j имеют двоичные разложения $n_{j+1} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_\nu} + 2^{l_{\nu+1}} + \ldots + 2^{l_s}$, $n_j = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_\mu} + 2^{l_{\nu+1}} + \ldots + 2^{l_s}$, причем $m_\mu < l_\nu$. Тогда положим $\tilde{n}_{j+1} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_\nu}$, $\tilde{n}_j = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_\mu}$.

В [5] доказана

Теорема 1. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того, чтобы для всякой функции ограниченной вариации сумма ряда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)|,$$

где c_n — коэффициенты Фурье-Уолша этой функции, принадлежала пространству $L[0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\max(V(\tilde{n}_{j+1}, V(\tilde{n}_j)}{n_{j+1}}.$$

Показано, что условие на $\{n_j\}$ слабее, чем соответствующее условие в тригонометическом случае.

В случае сходимости ряда (1) к ограниченной функции необходимые и достаточные условия получены в работе [3].

Теорема 2. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того, чтобы для каждой функции ограниченной вариации*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \in L^{\infty}[-\pi, \pi],$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье этой функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{n_j} \min(n_i, n_{i+1} - n_i) \le M, \quad i = 1, 2, ...,$$

где M — некоторая постоянная.

Для рядов по системе Уолша в аналогичном случае получается совсем другой результат, а именно, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *— строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда найдется функция ограниченной вариации, для которой существенная верхняя грань величины*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) \Big|$$

равна бесконечности.

Для каждой последовательности эта верхняя грань достигается на характеристической функции некоторого отрезка $[0,\xi]$, зависящего от последовательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Telyakovskii S. A.* Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, № 1–2. P. 215–218.

2. *Trigub R. M.* A note on the paper of Telyakovski “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation” // East J. Approx. 2007. Vol. 13, № 1. P. 1–6.

3. *Белов А. С., Теляковский С. А.* Усиление теорем Дирихле–Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Матем. сб. 2007 Т. 198, № 6. С. 25–40.

4. *Теляковский С. А.* Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.

5. *Малыхин Ю. В., Теляковский С. А., Холщевникова Н. Н.* Интегрируемость суммы модулей блоков рядов Фурье-Уолша функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. С. 323–334.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Т. Е. Тилеубаев (Астана, Казахстан)

Tileubaev@mail.ru

Пусть $1 \le p \le \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0,\infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^{\infty} |f|^p x^{2\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0,\infty)$.

Норма в пространстве определяется

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{x\in[0,\infty)} |f|.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{p,\alpha}(1 \leq p \leq \infty)$ оператор обобщенного сдвига [1] функции $f(x)$

$$T^h f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})$$

$$\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha}d\varphi.$$

Отметим, что некоторые свойства оператора $T^h : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$ (см.[2])

$$T^h j_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda h),$$

$$j_\alpha(u) = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{u^\alpha} J_\alpha(u),$$

где $J_\alpha(u)$ — функция Бесселя первого рода порядка α,

$$\left\|T^h(f)\right\|_{p,\alpha} \leq C\left\|f\right\|_{p,\alpha}, 1 \leq p \leq \infty$$

$$\int_0^\infty T^h f(x) g(x) x^{2\alpha+1}dx = \int_0^\infty f(x) T^h g(x) x^{2\alpha+1}dx.$$

Известно [4] если $\frac{4(\alpha+1)}{2(\alpha+3)} < p < \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}$, то

$$\|f - S_n f\|_{p,\alpha} \to 0, n \to \infty, f \in L_{p,\alpha}.$$

Теорема 1. *1. Пусть* $f \in L_{p,\alpha}, 1 < p \leq 2, \alpha > -\frac{1}{2}$. *Если* $\hat{f}(k)$ *— коэффициенты Фурье –Бесселя для* f *по системе* $(j_\alpha(\lambda_k x))$, *то*

$$\left\{\sum_{k=1}^\infty |\hat{f}(k)|^p k^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C_p M^{\frac{2-p}{p}} \left\|f\right\|_{p,\alpha}.$$

2. Пусть (c_k) *последовательность для которой* $\left(\frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1} > q \geq 2\right)$

$$\sum_{k=1}^\infty |c_k|^q k^{q-2} < \infty,$$

тогда существует функция $f \in L_{q,\alpha}$ имеющая (c_k)– своими коэффициентами Фурье–Бесселя по системе $(j_\alpha(\lambda_k x))$ такая, что

$$\|f\|_{q,\nu} \leq C_q M^{\frac{q-2}{q}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^q k^{q-2} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

функция $f = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$ в $L_{q,\alpha}$, где $S_n(f) = S_n(f,x) = c_1 j_\alpha(\lambda_1 x) + c_2 j_\alpha(\lambda_2 x) + \cdots + c_n j_\alpha(\lambda_n x)$.

Доказательство. Пусть ν — мера равная $\frac{1}{n^2}$ для множества, состоящегося из отдельной точки $n, n = 1, 2, \ldots$ и равная нулью для множеств не содержащих ни одной из этих точек.

Определим оператор $h = Tf = \{n\hat{f}(n)\}$ на всю $L_{p,\alpha}$, $1 < p < 2$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ с нормой

$$\|h\|_{p,\nu} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |n\hat{f}(n)|^p n^{-2} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Из неравенства Бесселя

$$\|Tf\|_{2,\nu}^2 = (\frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)})^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2\alpha+1} dx$$

следует, что оператор T имеет сильный тип $(2,2)$, а значить имеет слабый тип $(2,2)$.

Покажем, что оператор T имеет тип $(1,1)$, а точнее покажем, что

$$\nu(E_y(h)) \leq \frac{2M}{y} \|f\|_{1,\alpha}, \quad \nu(E_y(h)) = \sum_{n:|n\hat{f}(n)|>y} \frac{1}{n^2}.$$

Если $|n\hat{f}(n)| > y$, то учитывая следующее неравенство $|j_\alpha(\lambda_n x)| \leq 1$ имеем

$$y < |n\hat{f}(n)| = n \int_0^\infty |f(x) j_\alpha(\lambda_n x)| x^{2\alpha+1} dx \leq$$

$$\leq n \int_0^\infty |f(x)| x^{2\alpha+1} dx = n \|f\|_{1,\alpha},$$

откуда $n > \frac{y}{\|f\|_{1,\alpha}}$. Поэтому

$$\nu(E_y(h)) = \sum_{n:|n\hat{f}(n)|>y} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2y}{\|f\|_{1,\alpha}}$$

и нам нужное неравенство установлено.

Применяя интерполяционную теорему типа Марцинкеевича с параметром $\gamma = \frac{2-p}{p}$ и с учетом результата S. Herz из[4] получим

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}} = \|Tf\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\alpha}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 при $\alpha = -\frac{1}{2}$ сводиться к теореме Харди–Литтлвуда [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6:2, вып. 1. С. 102–143.
2. *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.
3. *Зигмунд. А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. 569 с.
4. *Carl S. Herz* On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1954. Vol. 40, № 10. P. 969–999.

УДК 517.9

ВЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

И. В. Тихонов (Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru

Давно известно (см. [1]), что задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

имеет нетривиальные решения $u(x,t) \not\equiv 0$ из класса $C^\infty(\mathbb{R} \times [0,1])$. Соответствующий пример можно получить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{(k)}(t)\, \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{2}$$

при подходящем выборе неквазианалитической функции $\gamma(t) \not\equiv 0$ в пространстве $C^\infty[0,1]$. Более того, общая теория (см. [2, с. 32]) гарантирует существование нужных функций со свойствами

$$\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1) = 0, \qquad |\gamma^{(k)}(t)| \leqslant Mq^k\,(k!)^p, \qquad 0 < t < 1, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

при всех $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$ со значениями $M > 0$, $q > 0$ и $p \in (1, 2)$. Нетрудно видеть, что (3) обеспечивает сходимость ряда (2) и выполнение условий

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

еще более специфичных, чем (1). Система (4) представляет интерес для теории обратных задач (см. [3]). Другие применения похожих конструкций к обратным задачам для эволюционных уравнений указаны в [4, 5].

Возникает естественный вопрос: можно ли наглядно «увидеть» нетривиальные решения задач типа (1) и (4), или же существование таких решений надо принять лишь умозрительно?

Теоретические соображения показывают, что соответствующие функции $u(x,t)$ должны обладать исключительным ростом при $|x| \to +\infty$ в полосе $\mathbb{R} \times [0,1]$ в том смысле, что ни оценка сверху

$$u(x,t) \leqslant C \exp\left(\sigma |x|^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{5}$$

ни оценка снизу

$$u(x,t) \geqslant -C \exp\left(\sigma |x|^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in [0,1], \tag{6}$$

не могут быть выполненными ни с какими константами $C > 0$ и $\sigma > 0$. Точнее, из выполнения любой оценки (5) или (6) для классического решения задачи (1) следует, что $u(x,t) \equiv 0$ всюду в полосе $\mathbb{R} \times [0,1]$.

Несмотря на отмеченный феноменальный рост, современные системы компьютерной математики позволяют проводить (хотя и достаточно условное) построение искомых решений. Так, для получения нетривиального решения задачи Коши (1) можно взять функцию $\gamma(t) = \exp(-1/t^2)$, обеспечивающую должную сходимость ряда (2). Результат удается вычислить на множестве $|x| \leqslant R$, $\varepsilon \leqslant t \leqslant 1$ при не слишком больших значениях $R > 0$ и существенно отделенных от нуля значениях $\varepsilon \in (0,1)$. Возникающее решение $u(x,t)$ обладает интересными геометрическими особенностями, некоторые из которых еще ждут своего теоретического объяснения. Особенно трудны для обработки малые значения $t_0 > 0$, когда проявляется истинный «взрывной» характер решения — ведь в простой линейной задаче (1) из начального состояния $u(x,0) \equiv 0$ возникает ненулевое состояние $u(x,t_0)$ сверхэкспоненциального роста.

Конструкция подобных «взрывных» решений допускает перенос на общее эволюционное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7}$$

взятое в пространстве Фреше. Надо только, чтобы линейный замкнутый оператор A в уравнении (7) обладал собственным значением $\lambda = 0$ с бесконечной цепочкой присоединенных векторов. Эти присоединенные векторы должны достаточно быстро стремиться к нулю по мере возрастания номера в цепочке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.

2. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М. : Мир, 1986. 464 с.

3. *Тихонов И. В., Гаврисъ Ю. В., Аджиева Т. З.* Структура решений модельной обратной задачи теплопроводности в классах функций экспоненциального роста // Челябинский физ.-матем. журн. 2016. Т. 1. Вып. 3. С. 38–63.

4. *Тихонов И. В.* Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегр. преобр. и спец. функции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 119–128.

5. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 2. С. 273–290.

УДК 517

РЕЗУЛЬТАТЫ КАЗАХСТАНСКОЙ ПОДШКОЛЫ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ П. Л. УЛЬЯНОВА[1]

Н. Темиргалиев (Астана, Казахстан)
ntmath10@mail.ru

Казахстанская подшкола научной школы П. Л. Ульянова в составе Мирбулат Сихов, Алшынбаева Есентай, Жайнибекова Мехрибану, Кудайбергенов Сабит, Айдосов Еркара, Баилов Едил, Шерниязов Кайрат, Ажгалиев Орынбасар, Ажгалиев Шапен, Утесов Адилжан, Ковалева Ирина, Шангереев Ержан, Ташатов Нурлан, Альжанова Нуржан, Сарсекеев Абдрахман, Берикханова Маржан, Нурмолдин Ерик, Абикенова Шолпан, Шоманова Анар, Ибатуллин Ибрагим, Сулейменов Кенесары, Наурызбаев Нурлан, Таугынбаева Галия, Жубанышева Аксауле ведет исследования по следующим темам и направлениям:

1. Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как синтез известного и нового в численном анализе, который, согласно К. Флетчеру, «включает в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты»;

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

2. Классы (и пространства) функций, что, по словам А. Н. Колмогорова, решает проблему «Нас много», т.е. «многих» обеспечить публикациями;

3. Математический инструментарий прямого применения: алгебраическая теория чисел в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного интегрирования и теории случайных чисел;

4. Математический инструментарий прямого применения: тензорные произведения функционалов в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного анализа, восстановления функций и дискретизации уравнений в частных производных по значениям в точках;

5. Иррегулярные распределения и метод квази-Монте Карло как, согласно К. Роту, перспективные направления исследований в математике-информатике XXI века с обширными применениями;

6. Восстановление функций в контексте К(В)П;

7. Численное дифференцирование функций в контексте К(В)П;

8. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте К(В)П;

9. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: конструирование вероятностных мер на классах функций;

10. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов численного интегрирования «в среднем» относительно вероятностных мер на классах функций;

11. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных «в среднем» относительно вероятностных мер на классах функций;

12. Теория вложений и приближений — решенные и нерешенные задачи (в сотрудничестве с В. И. Колядой);

13. Ряды Фурье: преобразование коэффициентов и суммирование;

14. Предпоперечник Колмогорова по Сихову Мирбулату;

15. Теория «Морри» не как «тривиальные обобщения заменой нормы Лебега на норму Морри»;

16. Дискретные и быстрые «алгебраические» преобразования Фурье;

17. Генераторы случайных чисел в контексте новых формул дискретных «алгебраических» преобразований Фурье;

18. «Геометрия чисел» в контексте алгебраической теории чисел;

19. Метод Галеркина и новые теоретические разработки с последующими применениями в контексте всегда сопровождающей его уязвимости;

20. Генерирование случайных чисел Лехмера с максимальным периодом по требованиям Ковею-Макферсона и обширные их применения

и еще научно-методического содержания по школьной и вузовской математике.

Вот некоторые из результатов 2016 года получения:

1. Полное спектральное тестирование по методу Ковэю – Макферсона генераторов случайных чисел Лехмера с максимальным периодом;

2. Новая концепция БПФ на основе куммеровской версии теоремы Эйлера – Ферма;

3. Метод Галеркина в условиях вычислительной уязвимости;

4. «Геометрия чисел» в контексте алгебраической теории чисел;

5. Сравнительная эффективность явных квадратурных формул и алгоритмов перебора.

Тысячи студентов и сотни преподователей вузов Казахстана получили математическое и общечеловеческое воспитание в лучших традициях Московской математической школы и персонально в лице П. Л. Ульянова.

УДК 517.518.85, 517.518.68

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА – ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

А. Ю. Трынин (Саратов, Россия)
tayu@rambler.ru

Г. И. Натансон в [1] получил признак Дини-Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$ процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})l_{k,n}^{SL}(x), \qquad (1)$$

где U_n есть n-я собственная функция регулярной задачи Штурма – Лиувилля $U''+[\lambda-q]U=0$, $U'(0)-hU(0)=0$, $U'(\pi)+HU(\pi)=0$ с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и граничными условиями $h\neq\pm\infty$, $\quad H\neq\pm\infty$. Здесь через $0<x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{n,n}<\pi$ обозначены нули функции U_n. Изучению аппроксимативных свойств операторов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) посвящены также работы [2–6]. Свойства операторов интерполирования функций (1), тесно связанны с поведением синк-приближений

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

До появления работ [7–22] приближение такими операторами на отрезке, или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. Здесь приводятся полученные с помощью концепций работ [23–30] достаточные условия равномерной внутри интервала $(0,\pi)$ сходимости интерполяционных процессов (1) в терминах односторонних модулей непрерывности и изменения.

Обозначим $\mathbf{\Omega}$ множество всех действительнозначных, неубывающих, выпуклых вверх на $[0, b-a]$, исчезающих в нуле функций ω. Пусть $C(\omega^l, [a,b])$ и $C(\omega^r, [a,b])$ есть множества элементов пространства $C[a,b]$ таких, что для произвольных x и $x+h$ $(a \le x < x+h \le b)$ имеют место неравенства $f(x+h)-f(x) \ge -K_f\omega(h)$ или $f(x+h)-f(x) \le K_f\omega(h)$, соответственно, где $\omega \in \mathbf{\Omega}$. Назовём положительным (отрицательным) модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$, соответственно, функции натурального аргумента $v^+(n,f) = \sup\limits_{T_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1})-f(t_k)\big)_+$ и $v^-(n,f) = \inf\limits_{T_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(f(t_{k+1})-f(t_k)\big)_-$, где $z_+ = \frac{z+|z|}{2}$ и $z_- = \frac{z-|z|}{2}$ и $T_n = \{a \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \le b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что f принадлежит классу $V^+(v)$ или $V^-(v)$, если существует константа M_f, такая, что для любого натурального n справедливо неравенство $v^+(n,f) \le M_f v(n)$ или $v^-(n,f) \ge -M_f v(n)$ соответственно.

Теорема 4. *Пусть $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Если неубывающая вогнутая функция натурального аргумента $v(n)$ и функция $\omega \in \mathbf{\Omega}$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\le m\le k_2-k_1-1}\left\{\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1}\frac{v(k)}{k^2}\right\}=0,$$

где k_1 и k_2+1 — номера наименьшего и наибольшего из $x_{k,n}$, попадающих в отрезок $[a,b]$ после добавления к их множеству точек $x_{0,n}=0$ и $x_{n+1,n}=\pi$, то для любой функции $f \in C(\omega^l[a,b]) \cap V^-(v)$ $(f \in C(\omega^r[a,b]) \cap V^+(v))$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\|f - L_n^{SL}(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учён. записки Ленинград. пед. ин-та. 1958. Т. 166. С. 213–219.

2. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2010. № 11. С. 74–85.

3. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2000. № 9(460). С.60–73.

4.*Трынин А. Ю.* Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения. LAP LAMBERT Academic Publ. RU, 2016. 479 с.

5. *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма – Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2011. Т.3, № 4. С.133–143

6. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма – Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 116–129

7. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999

8.*Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53-128.

9. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing. 2008. Vol. 7, № 3. С. 263–270.

10. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.

11. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. матем. журн. 2007. Т 48, № 5. С. 1155–1166.

12.*Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 10. С. 141–158.

13. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6. С. 66–78.

14. *Трынин А. Ю.* Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 288–298.

15. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East Journal on Approximations. 2008. Vol. 14, iss. 2. P. 183–192.

16.*Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 4. С. 232–256.

17. *Умаханов А. Я., Шарапудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавк. матем. журн. 2016. Т. 18, № 4. С. 61–70.

18. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 116–132.

19. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 5. С. 170–194.

20. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Матем. 2016. № 3. С. 72–81.

21. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108.

22. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа -– Якоби // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 6. С. 129–162.

23. *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера – Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 506–514.

24. *Голубов Б. И.* Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 1. С. 13–24.

25. *Дьяченко М. И.* Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 3. С. 3–18.

26. *Скопина М. А., Максименко И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 2. С. 1–39.

27.*Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 723–731.

28.*Борисов Д. И., Знойил М.* О собственных значениях PTPT-симметричного оператора в тонком слое // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 2. С. 3–30; Borisov D. I., Znojil M. On eigenvalues of a PTPT-symmetric operator in a thin layer // Sb. Math. 2017. Vol. 208, № 2. P. 173–199

29. *Фарков Ю. А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 5. С. 185–212; J. Math. Sci. 2016. Vol. 218, № 5. P. 678–698.

30. *Иванникова Т. А., Тимашова Е. В., Шабров С. А.* О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатикаю 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 3–8

УДК 629.7:518.5

О ЧЕБЫШЕВСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ В $C(Q)$

Г. М. Устинов (Екатеринбург, Россия)
shevchenko@imm.uran.ru

Пусть Q — метризуемый компакт, $C(Q)$ — банахово пространство определенных на Q вещественных непрерывных функций f, $\|f\| = \max\limits_{q\in Q}|f(Q)|$. Давно известен следующий вопрос: существует ли сепарабельное пространство $C(Q)$, содержащее чебышевское подпространство L, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$. В частном случае ответ содержится в следствии к теореме.

Теорема. *Пусть T — счетный метризуемый компакт, T_0 — множество предельных точек T, если $L \subset C(T)$ — чебышевское подпространство, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, $f \in L$, $f \neq 0$, то из $f\Big|_{T_0} = 0$ следует, что $f \equiv 0$.*

Следствие. *Если множество T_0 предельных точек T конечно, то $C(T)$ не содержит чебышевских подпространств L, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$.*

УДК 517.518

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВЫХ БАЗИСОВ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Ю. А. Фарков (Москва, Россия)
farkov@list.ru

Пусть p и n — натуральные числа, $p \geq 2$, $N = p^n$, и пусть $w_k(\omega)$ — функции Уолша для группы Виленкина G_p. Масштабирующее уравнение с N коэффициентами для пространства $L^2(G_p)$ определяется своей маской, т.е. полиномом вида

$$m(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \overline{w_k(\omega)}, \quad \omega \in G_p, \tag{1}$$

где c_k — коэффициенты масштабирующего уравнения. Обозначим через $m_{\boldsymbol{b}}$ маску вида (1), коэффициенты которой вычислены по вектору $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона. Компоненты вектора $\boldsymbol{b}$ представляют собой значения маски $m_{\boldsymbol{b}}$, по которым она восстанавливается однозначно (см., например, [1]).

Пусть $\boldsymbol{G}(p,n)$ — множество векторов $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ из $\mathbb{C}^N$ таких, что

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+p^{n-1}}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)p^{n-1}}|^2 = 1, \tag{2}$$

для всех $0 \leq l \leq p^{n-1} - 1$. Метод построения по произвольному вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}(p,n)$ ортогонального всплескового базиса в пространстве N-периодических последовательностей изложен в [2]. Из этой конструкции в пространствах периодических последовательностей получаются дискретные системы типа Хаара и аналоги всплесков Ленга (см. [2, примеры 1, 2]). В методах параметризации ортогональных всплесков с компактными носителями на вещественной прямой $\mathbb{R}$ основные ограничения связаны со свойством ортонормированности системы целых сдвигов масштабирующей функции (см., например, [3]). При определении ортогональных всплесков в $L^2(G_p)$ роль множества целых чисел играет дискретная группа H. Для того чтобы H-сдвиги масштабирующей функции, ассоциированной с маской $m_{\boldsymbol{b}}$, были ортонормированы в $L^2(G_p)$, необходимо, чтобы вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежал множеству $\boldsymbol{G}(p,n)$ (см. [4, предложение 3.1]). Обозначим через $\boldsymbol{W}_0(p,n)$ множество векторов $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ из $\boldsymbol{G}(p,n)$, у которых $b_s \neq 0$ для всех $0 \leq s \leq p^{n-1} - 1$, а через $\boldsymbol{W}(p,n)$ — множество векторов $\boldsymbol{b}$ из $\boldsymbol{G}(p,n)$, для которых маски $m_{\boldsymbol{b}}$ удовлетворяют доказанному в [1] критерию Коэна. В общем случае задача построения ортогональных всплесков на группе G_p редуцируется [5] к проверке ортонормированности H-сдвигов масштабирующей функции, определяемой по маске $m_{\boldsymbol{b}}$ (т.е. к проверке принадлежности вектора $\boldsymbol{b}$ множеству $\boldsymbol{W}(p,n)$). Такую проверку осуществляют тремя способами: 1) по критерию Коэна, 2) по критерию отсутствия у маски блокирующих множеств, 3) с помощью N-валидных деревьев (см. [6; 7, замечание 3.11; 8]). Метод 3) используется [9] при построении ступенчатых всплесков на локальных полях положительной характеристики. Описание множества $\boldsymbol{S}(p,n) \subset \boldsymbol{G}(p,n)$, которому соответствуют ступенчатые масштабирующие функции на G_p, дано в [7, теорема 9].

Ассоциированная с маской $m_{\boldsymbol{b}}$ масштабирующая функция порождает КМА в том и только в том случае, когда маска $m_{\boldsymbol{b}}$ не имеет блокирующих множеств (по теореме 2 из [1] это равносильно принадлежности вектора $\boldsymbol{b}$ множеству $\boldsymbol{W}(p,n)$). При увеличении p и n вычислительная сложность поиска блокирующих множеств быстро растет и для нахождения подходящих масок $m_{\boldsymbol{b}}$ используются методы 1) и 3). Например, в [6] с помощью критерия Коэна для любого $n \geq 3$ и любого $t \in [0,1)$ найден вектор $\boldsymbol{b}_t \in \boldsymbol{W}(2,n)$ такой, что ассоциированная с этим вектором масштабирующая функция φ_t является ступенчатой и на своем носителе $[0, 2^{n-1})$ представима конечной линейной комбинацией функций Уолша. Из критерия Коэна также следует, что $\boldsymbol{W}_0(p,n) \subset \boldsymbol{W}(p,n)$ (см. [1, пример 5]). Таким образом, всякий вектор $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}_0(p,n)$ задает по формуле (1) маску, приводящую к ортонормированному базису всплесков в $L^2(G_p)$. Известно также, что по любому вектору $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}(p,n) \setminus \boldsymbol{W}(p,n)$ можно построить фрейм Парсеваля в $L^2(G_p)$. Более того, при построении фреймов вместо (2) достаточно [10, 11] предполагать, что $b_0 = 1$ и $\sum_{s=0}^{p-1} |b_{l+s\,p^{n-1}}|^2 \leq 1$ (в пространствах N-периодических последовательностей [2] условие $b_0 = 1$ является лишним). В недавней работе [12] предложен алгоритм построения нестационарных всплесков на группе Виленкина, определяемой по последовательности натуральных чисел $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$, $p_j \geq 2$.

Дискретные вейвлет-преобразования, ассоциированные с указанными выше конструкциями на группах Виленкина, применяются для обработки изображений [13], сжатия фрактальных сигналов [14, 15], анализа финансовых временных рядов [15] и анализа геофизических данных [15, 16]. Каждое из этих преобразований по сравнению с дискретными преобразованиями Фурье, Уолша, Хаара и родственных им преобразованиями обладает большей эластичностью (выбор параметра $\boldsymbol{b}$ с помощью энтропийного, среднеквадратичного или иного критерия позволяет адаптировать применяемое преобразование к обрабатываемому сигналу). Как показано в [15], при кодировании значений обобщенной функции Вейерштрасса построенное для $p = 3$ с помощью функций Уолша дискретное всплесковое преобразование имеет преимущества по сравнению с преобразованием Хаара и методом зонного кодирования. При этом число p оказывается равным числу входных каналов. В связи с этим отметим, что многоканальные всплесковые преобразования применяются в многомерных многоскоростных системах обработки сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.

2. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 6. С. 914—928.

3. *Mansour M. F.* Subspace design of compactly supported orthonormal wavelets // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 66—90.

4. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.

5. *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески в анализе Уолша // Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В.А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ / Под редакцией Т. П. Лукашенко и А. П. Солодова. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. С. 62–75.

6. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сборник. 2006. Т. 197, вып. 10. С. 129–160.

7. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. Vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.

8. *Berdnikov G. S., Lukomskii S. F.* N-valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550037 (23 p.).

9. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic // Turk. J. Math. 2017. Vol. 41, № 2. P. 244—253.

10. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 p.).

11. *Фарков Ю. А.* Фреймы Парсеваля в анализе Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 292–298.

12. *Farkov Yu. A.* Nonstationary multiresolution analysis for Vilenkin groups // 2017 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA, Tallinn, Estonia, 3-7 July 2017). P. 595–598.

13. *Farkov Yu. A., Maksimov A. Yu., Stroganov S. A.* On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2011. Vol. 9. P. 485-–499.

14. *Фарков Ю. А., Борисов М. Е.* Периодические диадические всплески и кодирование фрактальных функций // Изв. вузов. Матем. 2012, № 9. С. 54—65.

15. *Родионов Е. А.* О применении вейвлетов к цифровой обработке сигналов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 217–225. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-217-225.

16. *Любушин А. А., Родионов Е. А., Яковлев П. В.* Многомерный анализ параметров флуктуаций GPS сигналов до и после мегаземлетрясения 11 марта 2011 г. в Японии // Геофизические исследования. 2015. Т. 16, № 1. С. 14–23.

УДК 517.518

ОПЕРАТОРЫ НА ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ [1]

Д. В. Фуфаев (Москва, Россия)
fufaevdv@rambler.ru

Классическая теорема Лебега гласит, что производная неопределенного интеграла суммируемой на отрезке функции почти всюду существует и совпадает с исходной функцией. В терминах теории меры эту теорему можно свести к следующему результату.

Пусть (X,μ) — пространство с мерой, а оператор T действует из $L^0(X,\mu)$ в $L^0(X,\mu)$. Назовем T выпуклым, если из существования Tf_1 и Tf_2 следует существование $T(f_1+f_2)$ и при этом $|T(f_1+f_2)(x)| \leq$ $\leq |Tf_1(x)|+|Tf_2(x)|$. Будем говорить, что выпуклый оператор T имеет слабый тип $(1,1)$ с константой C, если для любого $\lambda>0$ и для любой функции $f\in L^1(X,\mu)$ выполняется следующее неравенство:

$$\mu\{x\in X : |Tf(x)|>\lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}.$$

Пусть $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность линейных операторов, переводящих $L^0(X,\mu)$ в себя. Максимальным оператором относительного данного семейства операторов называется оператор $T : f(x)\mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|T_nf(x)|$. Оператор T оказывается выпуклым.

Теорема 1. *Пусть (X,μ) — пространство конечной меры, последовательность непрерывных линейных операторов $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что соответствующий максимальный оператор T имеет слабый тип $(1,1)$, и пусть для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1(X,\mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}T_n\phi(x)=\phi(x)$ μ-почти всюду . Тогда для любой функции $f\in L^1(X,\mu)$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty}T_nf(x)=f(x)$ μ-почти всюду .*

При этом, теорема Лебега остается верной, если рассматривать локально интегрируемые функции на всей прямой. Теорема 1 теперь оказывается бесполезной — действительная прямая не является пространством конечной меры, и при этом отсутствует понятие локальной интегрируемости для случая абстрактных пространств с мерой. В этой ситуации, одним из вариантов адаптации теоремы Лебега может быть следующий подход.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

Пространство с мерой (X,μ) назовем разложимым ([1, 211E]), если $X=\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $\mu(X_\lambda)<\infty$. При этом множество $E\subset X$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо каждое $E\bigcap X_\lambda$, множество имеет меру ноль тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым X_λ имеет меру ноль, и выполнено равенство $\mu(E)=\sum\limits_{\lambda}\mu(E\bigcap X_\lambda)$. Само разложение будем обозначать как $\widetilde{\Lambda}$. Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ — конечный набор элементов Λ, то через $X_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}$ будем обозначать множество $\bigsqcup\limits_{j=1}^{r} X_{\lambda_j}$.

Измеримую функцию f на разложимом пространстве X будем называть локально интегрируемой относительно разложения $\widetilde{\Lambda}$, если для любого $\lambda\in\Lambda$ выполнено $||f||_\lambda=||f||_{L^1(X_\lambda)}=\int\limits_{X_\lambda}|f(x)|d\mu(x)<\infty$. Это понятие зависит от выбора разложения, так, в случае функции $1/x$ на интервале $(0,1)$ со стандартной мерой Лебега можно выбрать два разложения так, что относительно одного эта функция будет локально интегрируемой, относительно другого — нет. Пространство локально интегрируемых относительно разложения $\widetilde{\Lambda}$ функций на X будем обозначать $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ или $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X)$. Функции $||\cdot||_\lambda$ задают на этом пространстве систему полунорм, определяющих топологию пространства. Функцию $f\in L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X)$ можно представить в виде суммы $f(x)=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} f(x)|_{X_\lambda}$, которая для каждого $x\in X$ конечна. Отсюда, пространство $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X)$ представляется в виде прямого произведения $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} L^1(X_\lambda)$, причем введенная топология совпадает с тихоновской топологией на произведении.

Для локально интегрируемых функций следует обобщить понятие операторов слабого типа, а именно, будем говорить, что выпуклый оператор $T:L^0(X,\mu)\to L^0(X,\mu)$ имеет $\widetilde{\Lambda}$-локально слабый тип $(1,1)$, если для любых $\lambda\in\Lambda$, $t>0$ и для любой функции $f\in L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ найдутся такое число C_λ и конечный набор индексов $\lambda_1,\ldots,\lambda_{r(\lambda)}$, что справедливо следующее неравенство:

$$\mu\{x\in X_\lambda : |Tf(x)|>t\}\leq\frac{C_\lambda}{t}||f||_{L^1(X_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{r(\lambda)}},\mu)}.$$

Теорема 2. *Пусть (X,μ) — разложимое пространство с выбранным разложением $\widetilde{\Lambda}$, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность непрерывных линейных операторов, действующих из $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ в $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$, такая, что максимальный оператор T имеет $\widetilde{\Lambda}$-локально слабый тип $(1,1)$ и, кроме того, для любой функции ϕ из всюду плотного в $L^1_{\widetilde{\Lambda}-loc}(X,\mu)$ множества выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}T_n\phi(x)=\phi(x)$ $\mu-$почти всюду.*

Тогда для любой $f \in L^1_{\tilde{\Lambda}-loc}(X)$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} T_n f(x) = f(x)$ $\mu-$почти всюду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fremlin D. H.* Measure theory. Vol. 2. Colchester :Torres Fremlin, 2001. 563 p.

УДК 517.518.66

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМИ ПРОПУСКАМИ

Ю. Х. Хасанов, Ф. М. Талбаков (Душанбе, Таджикистан)

yukhas60@mail.ru

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ периодическая функция и имеет ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ntdt, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin ntdt.$$

Определение. *Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет пропуски, если $a_n^2 + b_n^2 > 0$ только для $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ натуральные числа.*

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция или функция с ограниченным изменением на отрезке $[-\pi, \pi]$, где $0 < \eta < \pi$, а последовательность n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию малых пропусков, т.е.

$$n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{\eta}. \tag{2}$$

М. Нобль [1] показал, что если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\omega(\frac{1}{n}, f)} < \infty,$$

и, кроме того, если при $k \to \infty$, выполняется соотношения

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{\log n_k} \to \infty,$$

то ряд (1) сходится абсолютно. П. Кеннеди [2] доказал, что для абсолютной сходимости рядов вида (1) достаточно, чтобы выполнялись условия $n_{k+1} - n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Обобщая результаты Нобля и Кеннеди для рядов Фурье с малыми пропусками вида (2), Р. Боянич и М. Томич [3] доказали, что если этот ряд на отрезке $[-\eta, \eta] \subset [-\pi, \pi]$ $(0 < \eta < \pi)$ имеет модуль непрерывности вида

$$\omega(h, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \le h} |f(x_1) - f(x_2)| \quad (x_1, x_2 \in [-\eta, \eta]),$$

то условия

$$\int_{-\eta}^{\eta} |df(t)| < \infty, \;\; \int_0^1 \omega(\frac{1}{t}, f) \left(\sum_{n_k \le t} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} < \infty,$$

влекут сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|).$$

В настоящей работе найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций с малыми пропусками вида (2) в равномерной метрике. Однако в отличие от периодических функций, где условия накладываются только на гладкости функций, здесь потребуются дополнительные условия и на поведения показателей Фурье (см. напр., [4] или [5]).

Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция, т.е. $f(x) \in \in B$ и ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n exp(i\lambda_n x), \tag{3}$$

где

$$A_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) exp(-i\lambda_n x)\, dx$$

— коэффициенты Фурье функций $f(x) \in B$, а $\{\lambda_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — показатели Фурье, которые имеют единственную предельную точку в бесконечности т.е.

$$\lambda_0 = 0, \;\; \lambda_{-n} = -\lambda_n, \;\; \lambda_n \le \lambda_{n+1}, \;\; \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть $f(x) \in B$ имеет ряда Фурье* (3) *с показателями, удовлетворяющих условий* (4). *Если этот ряд допускает малых пропусков вида $n_{k+1} - n_k \geq \frac{4\pi}{T}$ $(T \to \infty)$ и*

$$\int_1^{\infty} \omega_k(f;h)_B \sqrt{S(x)} \frac{dx}{x} < \infty,$$

где $\omega_k(f;h)_B$ — модуль гладкости функции, а

$$S(t) = \sum_{n_k \leq t} 1,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{n_k}| < \infty.$$

Эта теорема содержит результатов Нобля и Кеннеди, потому что из неравенства

$$l = \inf_{k \geq 0} (n_{k+1} - n_k) \geq \frac{4\pi}{T}$$

вытекает, что $n_k \geq lk$ $(k = 1, 2, \ldots)$, поэтому

$$\sum_{n_k \leq x} 1 \leq \sum_{lk \leq x} 1 \leq \frac{x}{l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noble M. E.* Coefficient properties of Fourier series with a gap condition // Math. Ann. 1958. Vol. 128. P. 55–62.

2. *Kennedy P. B.* Fourier series with gap // Quart. Journ. Math. 1956. Vol. 7. P. 224–230.

3. *Боянич Р., Томич М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье с малыми пропусками // Матем. сб. 1966. Т. 70, вып. 112, № 3. С. 297–309.

4. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 5. С. 745–756.

5. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти-периодических функций // Anal. Math. 2013. Т. 39. С. 259–270.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА СИМПЛЕКСАХ

Р. Ш. Хасянов (Саратов, Россия)
hasbendshurich@gmail.com

В работе [2] на треугольнике был построен многочлен третьей степени, производные которого интерполируют производные до третьего порядка включительно функции четвёртого порядка гладкости. Оценки отклонения производных функции от многочлена получены в терминах производных по направлениям сторон треугольника. В [1] аналогичный результат был получен для функции, заданной в тетраэдре. Мы будем строить многочлен третьей степени на симплексе произвольной размерности. Получим оценки отклонения производных функции от производных многочлена, которые будут зависеть от одной геометрической характеристики симплекса в случае размерностей 3 и 4 и от двух в пространствах большей размерности.

Пусть $\overline{T} = A_0 A_1 ... A_n$ есть n-симплекс ($n \geq 3$), d - диаметр этого симплекса (длина наибольшего ребра). Пусть $c_n > 1$. Назовём ребро длинным, если оно больше, чем $\dfrac{d}{c_n}$, и неизвестным в противном случае. Будем предполагать, что симплекс $\overline{T}$ выбран таким образом, что в нём можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере $(n-1)$ длинное ребро и пусть это вершина A_n. Длинные рёбра обозначим $[A_n A_m]$ и $[A_n A_l]$, неизвестные — $[A_n A_s]$.

Пусть

$$M_4 = \max_{0 \leq i_j \leq 4 : \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in T} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|.$$

Будем считать, что точка $\mathbf{x}$ задана своими барицентрическими координатами $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пусть многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i^3 + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} a_{ij} x_i^2 x_j + \sum_{0 \leq i < j < k \leq n} a_{ijk} x_i x_j x_k.$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$f(A_i) = Q(A_i), \quad i = \overline{0,n},$$

$$\frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, \quad i,j = \overline{0,n}, \quad i \neq j,$$

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{nk})}{\partial \mathbf{e}_{np}} = 0, \quad n > k > p \geq 0,$$

$$\frac{\partial (Q-f)(P_{ij})}{\partial \mathbf{e}_{np}} = 0, \quad 0 \leq i,j < p < n,$$

где P_{ij} есть середина отрезка $[A_i A_j]$, $\mathbf{e}_{ij} = \dfrac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$.

Теорема. *Пусть* $f(\mathbf{x}) \in C^4(\overline{T})$, *тогда для любой точки* $\mathbf{x} \in \overline{T}$

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}^i \partial \mathbf{e}_{nl}^j \partial \mathbf{e}_{ns}^{r-i-k}}\right| \le 16 c_n M_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i, j \le r, \quad i+j \le r. \tag{1}$$

Предложение. 1. *В любом тетраэдре можно найти вершину, из которой выходят по крайней мере два ребра, больших* $\dfrac{d}{2}$, *и в любом 4-симплексе есть вершина, из которой исходят по крайней мере три ребра, больших* $\dfrac{d}{2}$.

2. *Для любого натурального* $n \ge 5$ *и для всякого* $c > 0$ *существует такой* n*-симплекс, из всех вершин которого выходят по крайней мере два ребра, длина которых не больше, чем* $\dfrac{d}{c}$.

Следствие. *В случаях размерностей* $n = 3$ *и* $n = 4$ *в неравенствах* (1) *можно избавиться от параметра* c_n *и получить следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^r (Q-f)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{nm}^i \partial \mathbf{e}_{nl}^j \partial \mathbf{e}_{ns}^{r-i-k}}\right| \le 32 M_4 d^{4-r}, \quad 1 \le r \le 3, \quad 0 \le i, j \le r, \quad i+j \le r.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. матем. и матем. физи. 2008. Т. 48. С. 206–211.

2. *Куприянова Ю. В.* Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы конф. Воронеж, 2007. С. 120–121.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Г. В. Хромова (Саратов, Россия)
khromovagv@info.sgu.ru

Рассматривается уравнение

$$Au \equiv \int_0^x \left[\frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \frac{(x-t)^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\right] u(t)dt = f(x), \tag{1}$$

где $\Gamma(*)$ — гамма-функция, $0 < \beta < 1$, $u(x) \in C[0,1]$, а функция $f(x)$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$.

Решается задача нахождения равномерных приближений к $u(x)$ по заданным $f_\delta(x)$ и δ.

Используется метод регуляризации [1], в котором регуляризирующие операторы R_α имеют вид: $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$, где применительно к нашей задаче T_α — любое семейство операторов, дающее равномерные приближения к непрерывным функциям, A^{-1} — оператор, обратный к A. В [2] этот метод был реализован для классического уравнения Абеля, при этом в качестве операторов T_α использовались разрывные операторы Стеклова

$$S_\alpha u = \begin{cases} S_{\alpha 2}u, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}u, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \tag{2}$$

где $S_{\alpha 1}u = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)dt$, $S_{\alpha 2}u = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x}^{x+\alpha} u(t)dt$.

В данном сообщении сначала находится вид оператора A^{-1}, а затем строится метод регуляризации по аналогии с [2]

Теорема 1. *Обратный оператор A^{-1} имеет вид:*

$$A^{-1}f = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\,dt + \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\,dt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\beta) \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\,dt,$$

где $C_n(\beta) = [(1-\beta)(2-\beta)\dots(n-\beta)]^{-1}$.

Построим регуляризирующее семейство операторов для нахождения приближенного решения уравнения (1) по формуле $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Согласно (2) операторы R_α имеют вид

$$R_\alpha f = \begin{cases} R_{\alpha 2}f = S_{\alpha 2}A^{-1}f, & x \in [0, 1/2], \\ R_{\alpha 1}f = S_{\alpha 1}A^{-1}f, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 2. *Каждый из операторов R_α в* (3) *является интегральным оператором с ядром, имеющим вид:*

$$R_\alpha(x,t) = (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} \begin{cases} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0, 1/2], \\ R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$R_{\alpha 2}(x,t)=\begin{cases}(x-t+\alpha)^{-\beta}-(x-t)^{-\beta}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+1}(\beta)\big[(x-t+\alpha)^{n+1-\beta}-\\ -(x-t)^{n+1-\beta}\big],\quad 0\le t\le x,\\ (x-t+\alpha)^{-\beta}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{n+1}(\beta)(x-t+\alpha)^{n+1-\beta},\quad x\le t\le x+\alpha\\ 0,\quad x+\alpha<t\le 1\end{cases}\tag{4}$$

$R_{\alpha 1}(x,t)$ *получается из* (4) *заменой* x *на* $x-\alpha$.

Теорема 3. *При* $0<\beta<\frac{1}{2}$ *операторы* R_α *являются регуляризирующими для уравнения* (1) *и для их норм выполняется двусторонняя оценка*

$$C_1^0\alpha^{-(\frac{1}{2}+\beta)}-\psi(\alpha)\le\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}\le\sqrt{2}C_1^0\alpha^{-(\frac{1}{2}+\beta)}+\psi(\alpha),$$

где $C_1^0=(1-2\beta)^{\frac{1}{2}}[\Gamma(1-\beta)]^{-1}$, $\psi(\alpha)=C_1^0C_1\alpha^{-\frac{1}{2}+\beta}+O(\alpha^{\frac{1}{2}-\beta})$, $C_1=$ $=(1-\beta)^{-2}[I_0(2)-1+2(e-1)^2]$, I_0 *— цилиндрическая функция.*

Перейдем к вопросу о сходимости $\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty}\to 0$ при $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,R_\alpha,u)=\sup\left\{\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty}:\|f_\delta-f\|_{L_2}\le\delta\right\}.$$

На основании аналога теоремы 1 из [3], теоремы 3 и того, что

$$\|R_\alpha f-u\|_{L_\infty}=\|S_\alpha u-u\|_{L_\infty},$$

справедлива

Теорема 4. *Для сходимости* $\Delta(\delta,R_\alpha,u)\to 0$ *при* $0<\beta<1/2$ *и* $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$ *необходимо и достаточно выполнение согласования* $\alpha=$ $=\alpha(\delta)$, *удовлетворяющего условиям:* $\alpha(\delta)\to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-(1/2+\beta)}\to 0$ *при* $\delta\to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромова Г. В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 997–1002.

2. *Хромова Г. В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 597–601.

3. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.

УДК 517.9

КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ε-ВЫБОРОК[1]

И. Г. Царьков (Москва, Россия)
tsar@mech.math.msu.su

В связи с большим количеством различных нелинейных и невыпуклых приближающих объектов в различных функциональных пространствах (например, в L_p, $C(Q)$, W_p^r) становятся актуальными задачи изучения устойчивости как наилучших приближений, так и почти наилучших. И в этом случае теоретический и практический интерес приобретает задача построения устойчивого алгоритма аппроксимации. Часто классические объекты аппроксимации не являются компактными в каком-нибудь смысле (сильном или слабом), и при приближении элементы наилучшего приближения могут не существовать или не быть единственными, тем не менее даже в этом случае удается строить устойчивые выборки из операторов почти наилучших приближений. Для самих же наилучших элементов приближений представляет интерес их характеризация среди других элементов приближающего множества (т.е. изучение их солнечных свойств). Аппарат непрерывных выборок из операторов ε-проекций часто предоставляет возможность для ответа на эти вопросы. Некоторые результаты, связанные с этой тематикой, можно посмотреть в работах [1–[9].

Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ обозначим соответственно замкнутый и открытый шар в линейном полунормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y-x\| \leqslant \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y-x\| < r\}$. Через $S(x,r)$ обозначим сферу с центром x радиуса r, т.е. множество $\{y \in X \mid \|y-x| = r\}$.

Для произвольного множества M в некотором полунормированном пространстве $\mathcal{X}$ через $\varrho(y,M)$ ($y \in X$, $M \subset X$) обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y\|$.

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x| = \varrho(x,M)\}$. Для произвольных $x \in X$ и $\delta > 0$ рассмотрим также метрические δ-проекции $P_M^\delta x$ и $\mathring{P}_M^\delta x$ представляющие собой соответственно множества $\{y \in M \mid \|y-x| \leqslant \leqslant \varrho(x,M)+\delta\} = M \cap B(x, \varrho(x,M)+\delta)$ и $\{y \in M \mid \|y-x| < \varrho(x,M) + +\delta\} = M \cap \mathring{B}(x, \varrho(x,M)+\delta)$. Аналогично определяются соотвествующие проекции и в случае, когда $\delta = \delta(\cdot)$ — положительная функция на X или на каком-то его подмножестве.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295-а).

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to \to M$ называется *аддитивной* (*мультипликативной*) ε-выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(x) - x\| < \varrho(x, M) + \varepsilon$$

(соответственно $\|\varphi(x) - x\| \leqslant (1 + \varepsilon)\varrho(x, M)$). В случае, когда эти неравенства выполняются на некотором множестве $E \subset X$ будем говорить о *ε-выборке на E*.

Определение 2. Множество A в полуметрическом пространстве (Y, ν) называется *бесконечно связным*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного непрерывного отображения $\varphi : \partial B \to A$ существует непрерывное продолжение $\tilde{\varphi} : B \to A$.

Определение 3. Множество $M \subset X$ называется *$\mathring{B}$-бесконечно связным*, если пересечение множества M с любым открытым шаром либо пусто, либо бесконечно связно. Множество $M \subset X$ называется $\mathring{B}$-стягиваемым, если пересечение множества M с любым открытым (замкнутым) шаром либо пусто, либо стягиваемо.

Определение 4. Компакт Y называется *клеточноподобным*, если существует абсолютный окрестностный ретракт Z и вложение $i : Y \to \to Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$ (см. [10]).

Отметим, что счетное пересечение стягиваемых компактов, образующих вложенную последовательность, является клеточноподобным (см. [10]).

Определение 5. Пусть M — непустое подмножество линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$. Точку $x \in X$ называют *точкой аппроксимативной компактности*, если для любой последовательности $\{y_n\} \subset M : \|x - y_n\| \to \varrho(x, M)$ $(n \to \infty)$ существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in M$. Обозначение $x \in AC(M)$. Если $AC(M) = X$, то множество M называется *аппроксимативно компактным.*

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ аппроксимативно компактное множество. Тогда следующие условия равносильны:*

1) M обладает непрерывной ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$;

2) $P_M x$ является UV^∞-множеством для всех $x \in X$;

3) $P_M x$ является клеточноподобным множеством для всех $x \in X$;

4) M является $\mathring{B}$-бесконечно связным множеством;

5) M является $\mathring{B}$-стягиваемым множеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 122–131.

2. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих устойчивой ε-выборкой // Матем. заметки. 2011. Т. 89, № 4. С. 608–613.

3. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 63, № 4. С. 21–91.

4. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84

5. *Царьков И. Г.* Непрерывная ε-выборка //Математический сборник. 2016. Т. 207, № 2 С. 123–142

6. *Царьков И. Г.* Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка // Известия РАН. 2016. Т. 80, № 2. С. 165–184.

7. *Царьков И. Г.* Непрерывные выборки из множества ближайших и почти ближайших точек // ДАН. 2017. Т. 475, № 4. С. 1-4.

8. *Царьков И. Г.* Непрерывная выборка из многозначных отображений // Известия РАН. 2017. Т. 81, № 3. С. 189–216.

9. *А. Р. Алимов* Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 7. С. 3–18

10. *L. Górniewicz.* Topological fixed point theory of multivalued mappings. Springer, Dordrecht. 2006.

УДК 517.518.82

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ НА СТАНДАРТНОМ ОТРЕЗКЕ

Д. Г. Цветкович Д.Г., И. В. Тихонов И.В, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)

dianacve@inbox.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна представлены в [1–3].

В случае простого симметричного модуля

$$f(x) = |2x-1|, \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

полиномы (1) удовлетворяют специальному *правилу склеивания*

$$B_{2m+1}(f,x) = B_{2m}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и для них справедливо разложение

$$B_{2m}(f,x) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, C_{2k}^{k}\left(x(1-x)\right)^{k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

восходящее к работе Поповичу [4] (см. также [5, 6]).

Заменим теперь (2) на произвольный рациональный модуль

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [0,1], \tag{5}$$

с изломом в точке $c = p/q \in (0,1)$, НОД $(p,q) = 1$. Для полиномов Бернштейна от функции (5) правило склеивания приобретает вид

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

очевидно обобщающий формулу (3). Подробнее про правило склеивания см. [6]. Цепочку полиномов $B_{qm}(f,x)$ при выборе (5) целесообразно выделять из общей последовательности полиномов (1).

Оказывается, для полиномов Бернштейна от любого рационального модуля можно установить аналоги разложения Поповичу (4). Используем стандартные обозначения $\lfloor a \rfloor$ и $\lceil a \rceil$ для пола и потолка числа $a \in \mathbb{R}$. Для несократимой дроби $c = p/q \in (0,1)$ и любого $m \in \mathbb{N}$ введем специальные полиномы

$$Q_{p/q,\,m}^{\nu,\,d}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{qk+\nu}\, C_{qk+\nu}^{pk+d}\big(x^{p}(1-x)^{q-p}\big)^{k}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad d \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

и два множества

$$\Delta_{p/q}^{(1)} \;=\; \{\, \nu \in \mathbb{N}:\; \nu \leqslant q-1,\; \lceil c\nu \rceil \leqslant c(\nu+1)\,\},$$

$$\Delta_{p/q}^{(2)} \;=\; \{\, \nu \in \mathbb{N}:\; \nu \leqslant q-1,\; \lceil c\nu \rceil > c(\nu+1)\,\}.$$

Тогда при выборе функции

$$f(x) = |x - c|, \qquad x \in [0,1], \tag{7}$$

с изломом в точке $c = p/q \in (0,1)$, НОД $(p,q) = 1$, справедлива формула

$$B_{qm}(f,x) = c + (1-2c)x - 2\left(P_{c,\,m}^{(1)}(x) \,+\, P_{c,\,m}^{(2)}(x)\right), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$P_{c,\,m}^{(1)}(x) = \sum_{\nu \in \Delta_c^{(1)}} \big(\lceil c\nu \rceil - c\nu\big)\, x^{\lceil c\nu \rceil}(1-x)^{\nu - \lfloor c\nu \rfloor}\, Q_{c,\,m}^{\nu,\,\lceil c\nu \rceil}(x),$$

$$P^{(2)}_{c,m}(x)=\sum_{\nu\in\Delta^{(2)}_c}\bigl(c\nu-\lfloor c\nu\rfloor\bigr)\,x^{\lceil c\nu\rceil}(1-x)^{\nu-\lfloor c\nu\rfloor}\,Q^{\nu,\lfloor c\nu\rfloor}_{c,m}(x).$$

Полиномы $B_{qm+1}(f,x)$ тоже выражаются в виде (8) из-за наличия правила (6). Остальные полиномы

$$B_{qm+r}(f,x),\qquad r=2,\,\ldots\,,\,q-1,$$

от рационального модуля (7) допускают разложения, аналогичные (8), с соответствующими техническими поправками. Коррекция формулы (8) при возвращении к функции (5) очевидна.

В частности, для функции (2) из общей формулы (8) следует разложение Поповичу (4). Для функции $f(x)=|3x-1|$ на $[0,1]$ получим

$$\begin{aligned}B_{3m}(f,x)=1+x-2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{3k-1}\,C^{k}_{3k-1}\bigl(x(1-x)^2\bigr)^k-{}\\ -2x(1-x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{3k+1}\,C^{k}_{3k+1}\bigl(x(1-x)^2\bigr)^k,\qquad m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Для функции $f(x)=|5x-3|$ на $[0,1]$ получим

$$\begin{aligned}B_{5m}(f,x)=3-x-4x(1-x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{5k+1}\,C^{3k+1}_{5k+1}\bigl(x^3(1-x)^2\bigr)^k-{}\\ -2x^2(1-x)^2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{5k+3}\,C^{3k+2}_{5k+3}\bigl(x^3(1-x)^2\bigr)^k-{}\\ -6\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{5k-1}\,C^{3k}_{5k-1}\bigl(x^3(1-x)^2\bigr)^k-{}\\ -2x^2(1-x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{5k+2}\,C^{3k+1}_{5k+2}\bigl(x^3(1-x)^2\bigr)^k,\quad m\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

и так далее. Возникающие формулы отнюдь не очевидны.

С помощью подобных разложений можно исследовать скорость сходимости полиномов Бернштейна для любого рационального модуля (5) в области сходимости, ограниченной лемнискатой

$$\bigl|z^p\,(1-z)^{q-p}\bigr|=\Bigl(\frac{p}{q}\Bigr)^p\Bigl(1-\frac{p}{q}\Bigr)^{q-p},\qquad z\in\mathbb{C}.\tag{9}$$

Эти же разложения полезны при изучении сходимости нулей полиномов Бернштейна к лемнискате (9), как к своему аттрактору (см. [7]).

Имеются аналогичные разложения для полиномов Бернштейна в случае произвольного модуля (7) с любым (не обязательно рациональным) значением $c \in (0,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : Univ. of Toronto Press, 1953. 130 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
3. *Bustamante J.* Bernstein Operators and Their Properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.
4. *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. T. 10. P. 49–54.
5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 15. № 26. С. 6–40.
6. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Том. 8. Часть 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
7. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

УДК 517.5

ДВОИЧНЫЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ[1]

С. А. Чумаченко (Саратов, Россия)

chumachenkosergei@gmail.com

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \ (x \in [0,1])$ — оператор интегрирования, $W_{2^m-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{m-1} r_k(x)$ — функции Уолша, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Определение 1. Функцию

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m^2+3m-2}{2}} I^m W_{2^m-1}(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

будем называть *двоичным базисным сплайном m-й степени.*

Для удобства, мы выбрали функции φ_m нормированными в C. В [1] было доказано, что система сжатий и сдвигов функции $\varphi_m(x)$ является базисом в пространстве $C_0[0,1]$ и справедливо неравенство

$$|f(x) - S_{2^n+j}(x)| \leq \omega_f(\frac{1}{2^{n+2}}) + \omega_f^2(\frac{1}{2^{n+2}}).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

где $S_{2^n+j}(x)$ — значение частичных сумм в точке x, ω_f, ω_f^2 — модули непрерывности первого и второго порядка.

Обозначим $F(x)=\varphi_m(\frac{x}{2^m})$. Отметим, что $\mathrm{supp}F=[0,2^m]$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$F(x)=\frac{1}{2^m}F(2x-0)+\sum_{t=1}^{2^m-1}\frac{1}{2^{m-1}}F(2x-t)+\frac{1}{2^m}F(2x-2^m)$$

При каждом $n\in\mathbb{Z}$ образуем подпространства

$$V_n=\overline{(2^{\frac{n}{2}}F(2^nx+k)_{k\in Z})}$$

Определение 2. Если выполнены условия (аксиомы)

A1) $V_n\in V_{n+1}$;

A2) $\bigcup_{n\in Z}V_n=L_2(\mathbb{R})$;

A3) $\bigcap_{n\in Z}V_n=0$,

то совокупность $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ называют *обобщенным кратномасштабным анализом.* Говорят также, что *функция F порождает обобщенный КМА.*

Теорема 2. *Совокупность $(V_n)_{n\in Z}$ образует обобшенный КМА.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского, 2016. Т. 53. С. 163.

2. *Hongkai Zhao, editor* Mathematics in image processing // IAS/Park City mathematics series. 2013. Vol. 19. P. 245.

3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АЦФ, 1999. 550 с.

4. *Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А.* О новом классе систем функций типа Фабера - – Шаудера // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 643–651.

УДК 517.518

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ГЛАДКИМИ ФУНКЦИЯМИ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ[1]

С. А. Чумаченко, А. М. Шеина (Саратов, Россия)

chumachenkosa@info.sgu.ru, sheinaam@info.sgu.ru

Рассмотрим третью функцию Уолша. Проинтегрировав дважды эту функцию, получим гладкую функцию

$$\psi(x)=(4I)^2\omega_3(x),$$

[1]Работа Чумаченко С. А. поддержана грантом РФФИ 16-01-00152а.

где $If(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ – оператор интегрирования. Можно выписать явное представление функции $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} 8x^2, & x \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \\ -1 + 8x - 8x^2, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 8(1 - 2x + x^2), & x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right], \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Можно заметить, что функция $\psi(x)$ является сплайном второй степени. Ранее эта функция была рассмотрена в [1], [2].

Рассмотрим функцию

$$\psi(x, y) = \psi\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}\right),$$

то есть функцию, полученную вращением функции $\psi(x)$ вокруг оси симметрии.

Ставится задача об оценке точности интерполяции функции $f(x, y)$ над треугольной сеткой, порожденной правильными треугольниками со стороной d, псевдомногочленом

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \psi\left(\frac{2}{d}(x - x_k), \frac{2}{d}(y - y_k)\right),$$

где (x_k, y_k) – узлы треугольной сетки.

Для оценки точности интерполяции на ребре треугольной сетки верна следующая теорема

Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}$, (M_k) — равномерная треугольная сетка в D со стороной d, $P(x, y)$ — интерполяционный псевдомногочлен, построенный по этой сетке. Тогда для точек (x, y), лежащих на ребре $[M_{k_1}, M_{k_2}]$, справедлива оценка*

$$|f(x, y) - P(x, y)| \leq 2\omega_d(f) + 0.036|f(M_{k_3}) - f(M_{k_4})|d^2,$$

где M_{k_3} и M_{k_4} вершины треугольников со стороной $[M_{k_1}, M_{k_2}]$, $\omega_d(f)$ — модуль непрерывности функции f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера – Шаудера // Тр. Мат. Центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 53. 2016. Т. 53. С. 163–164.

2. *Шеина А. М.* О сходимости орторекурсивного разложения по гладкой системе типа Фабера – Шаудера // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 107–111.

УДК 517.53

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ф. А. Шамоян (Брянск, Россия)
shamoyanfa@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

1. Пусть $\mathbb{C}^n_+ = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \ \operatorname{Im} z_j > 0, \ j = 1, \ldots, n\}$, $N(\mathbb{C}^n_+) = \{f : f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}, \ h_j(z) \in H^\infty(\mathbb{C}^n_+), \ j = 1, 2, h_2(z) \neq 0, \ z \in \mathbb{C}^n_+\}$ — класс функций ограниченного вида в$\mathbb{C}^n_+$. В одномерном случае класс $N(\mathbb{C}^n_+)$ совпадает с классом $\mathbb{P}$. Неванлинны в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \mathbb{C}^1_+$ (см. [1]), при $n \geq 2$ класс Неванлинны, т.е класс функций f, для которых $ln|f|$ имеет n — гармоническую мажоранту и $N(\mathbb{C}^n_+)$ совершенно разные (см. [2, 3]).Известно, что если f принадлежит классу В. И. Смирнова $N^+(\mathbb{C}^n_+)$ (см. [2, 4]) и ее граничные значения на $\mathbb{R}^n$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}^n)$, то f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}^n_+)$ и тем самым преобразование Фурье этой функции $\hat{f(x)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) \exp^{-itx} dt$ обращается в нуль на $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^n_+$. Простой пример функции

$$f_a(z) = \prod_{j=1}^{n} e^{(-ia_j z_j)} \frac{1}{(i + z_j)^2}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n_+, \tag{1}$$

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, показывает, что такое утверждение не верно для $N(\mathbb{C}^n_+)$. При $n = 1$ в работе [5] было установлено, что если $\hat{f(x)} \to 0$, при $x \to -\infty$, достаточно сильно, то функция $\hat{f(x)}$ равна нулю тождественно на $\mathbb{R}_-$. При этом найдено необходимое и достаточное условие на скорость этого убывания при которых справедливо упомянутое утверждение. Для доказательства указанного результата существенную роль сыграло факторизационное представление функции из класса $N(\mathbb{C}_+)$ (см. [1]).

При $n \geq 2$ хорошо известно, что такие представления отсутствуют (см. [2, 3]). Здесь мы предложим другой подход для доказательства таких результатов при $n \geq 2$. Кроме того, приведем, на наш взгляд, ряд интересных приложений в теории квазианалитических классов функций.

2.Пусть $M(r) = M(r_1, \ldots, r_{j-1}, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ положительная, монотонно растущая функция по каждой переменной $r_j \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq j \leq$ $\leq n$, при фиксированных $r^{'} = (r_1, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, r_n) \in \mathbb{R}^{n-1}_+$, такая что

$\lim\limits_{|r|\to\infty} \frac{ln(r_1^2+\dots+r_n^2)}{\ln M(r)} = 0$, $|r| = \sqrt{r_1^2+\dots+r_n^2}$, положим

$$M_m^{(j)} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{x^m}{M(r_1,\dots,r_{j-1},x,r_{j+1},\dots,r_n)},\ m\in\mathbb{Z}_+,\ j=1,\dots,n,$$

$$T_j(r) = \sup_{m\geq 1} \frac{r^m}{M_m(j)}. \tag{2}$$

Пусть далее $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ — класс функций $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, для которых интеграл типа Коши тождественно равен нулю на множестве $\mathbb{C}_n \backslash \{\mathbb{C}_+^n \bigcup \mathbb{C}_-^n\}$

Теорема 1. *Пусть $f\in N(\mathbb{C}_+^n)$, при этом граничные значения f на $\mathbb{R}_+^n$ принадлежат классу $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{ln|f(iy)|}{|y|} \leq 0. \tag{3}$$

Пусть далее преобразование Фурье функции f удовлетворяет оценке

$$|\hat{f}(-x)| \leq \frac{1}{M(x)},\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n. \tag{4}$$

Тогда если

$$\int_1^\infty \frac{T_j(r)}{r^{\frac{3}{2}}}dr = +\infty,\quad 1\leq j\leq n, \tag{5}$$

то $\hat{f}(x)=0$, при всех $x\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{R}_+^n$, при этом функция f принадлежит классу Харди $H^1(\mathbb{C}_+^n)$.

Обратно, если $M(x_1,\dots,x_n) = e\left(\sum\limits_{j=1}^n P_j(x_j)\right)$, $\frac{P_j'(t)t}{P_j(t)} \uparrow +\infty (t\to+\infty)$, $j=1,\dots,n$ и хотя бы один из интегралов в (5) сходится, то можно построить функцию $f\in N(\mathbb{C}_+^n)\bigcap\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\hat{f}$ удовлетворяет оценке (4) в тоже время $\hat{f}\neq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $f\notin H^1(\mathbb{C}_+^n)$.

Пример функции f_a показывает, что существуют функции $g\in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^n\bigcap N(\mathbb{C}_+^n)\bigcap L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k} = 0$, $\forall\ k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, такие что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x+iy)|dx \geq c_0 \exp(a\cdot y)$, $a=(a_1,\dots,_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in$ $\in\mathbb{R}^n$, $c_0>0$.

Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $M=\{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел*

$$C^\infty(M) = \{g\in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |\frac{\partial^{|k|} g(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}}| \leq A^{|k|} M_{|k|}, \tag{6}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$, $f \in N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n) \bigcap C^\infty(M)$. Тогда если выполняются условия (3) и (5), где T — построенная функция Карлемана – Островского по последовательности M, то $f \in H_1(\mathbb{C}^n_+)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$ при всех $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Обратно, если интеграл (5) сходится или не выполняется условие (3), то можно построить функцию f, удовлетворяющую условию (6), но $f \notin H^1(\mathbb{C}^n_+)$

Следующее утверждение при $n = 1$, уточняет классическую теорему Р. Салинаса (см. [6]).

Теорема 3. *Пусть $g \in C^\infty(M)$,при этом существует функция $f \in N(\mathbb{C}^n_+) \bigcap \mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяющая условию (3), такая что $\lim\limits_{|y|\to 0} f(x+iy) = g(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Пусть далее $T(r) = \sup\limits_{k\geq 1} \frac{r_k}{M_k}$, $r \in \mathbb{R}_+$, если*

$$\int\limits_1^\infty \frac{T(r)}{r^{\frac{3}{2}}} dr = +\infty, \tag{7}$$

и при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial^{|k|} g(x_0)}{\partial x^k} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{8}$$

тогда $g(x) = 0$, при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Обратно, если интеграл (7) сходится, то можно построить функцию $g \in C^\infty_A(M) = C^\infty(\mathbb{C}^n_+ \bigcup \mathbb{C}^n_-) \bigcap H(\mathbb{C}^n_+)$ такую, что выполняется условие (8), но g тождественно отлична от нуля на $\mathbb{R}^n$, где $H(\mathbb{C}^n_+)$ — множество всех аналитических функций в $\mathbb{C}^n_+$.

Замечание. Пример функции $f(z_1, z_2) = \dfrac{\varphi(z_1)}{(i+z_1)^2(i+z_2)^2 S(z)}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2_+$, где $\varphi \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, S — произвольная внутренняя функция в $\mathbb{C}_+$, показывает, что принадлежность граничных значений функции f классу $\mathbb{R}P(\mathbb{R}^n)$ в известном смысле является необходимым для справедливости утверждений теорем 1–3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984.
2. *Рудин У.* Теория функций в полукруге. М. : Мир, 1974.
3. *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Итоги наук и техники, Современные проблемы математики, фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ, 1985. Т. 8. С. 115–190.
4. *Aleksandrov A. B.* // Lecture Notes in Math. 1981. Vol. 864. P. 1–90.
5. *Шамоян Ф. А.* // Алгебра и анализ. 2008. Vol. 20, iss. 4. P. 218–240.
6. *Salinas R. B.* // Rev. Acad. Ciencias. Madrid, 1955. Vol. 49. P. 331–368.

УДК 517.538

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДУ[1]

И. И. Шарапудинов (Махачкала, Россия)
sharapud@mail.ru

В настоящей работе мы продолжаем рассмотрение систем функций, ортогональных относительно скалярных произведений, в которых присутствуют одна или несколько точек с дискретными массами. Интерес к таким системам в последнее время интенсивно растет (см. [1–11] и цитированную там литературу). Это новое направление принято обозначать словами: «Функции, ортогональные по Соболеву». Возросшее внимание специалистов к этому направлению теории ортогональных систем можно объяснить в том числе и тем обстоятельством, что ряды Фурье по полиномам (и функциям), ортогональным по Соболеву, оказались естественным и весьма удобным инструментом для представления решений дифференциальных (разностных) уравнений. Скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)+\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx \tag{1}$$

обладает указанными свойствами. Ниже нам понадобятся некоторые факты, установленные в [2]. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a,b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)dx=\delta_{kl}, \tag{2}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых $\int_a^b|f(x)|^p\rho(x)dx<\infty$. Если $\rho(x)\equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a,b)=L^p(a,b)$ и $L(a,b)=L^1(a,b)$. Из (2) следует, что $\varphi_k(x)\in L^2_\rho(a,b)$ $(k=0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x)\in L(a,b)$ $(k=0,1,\ldots)$. Тогда, следуя [2], мы можем определить следующие порожденные системой $\{\varphi_k(x)\}$ функции

$$\varphi_{r,r+k}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^x(x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt,\quad k=0,1,\ldots, \tag{3}$$

$$\varphi_{r,k}(x)=\frac{(x-a)^k}{k!},\quad k=0,1,\ldots,r-1. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00486а).

Из (3) и (4) следует, что для п.в. $x \in (a,b)$

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \le \nu \le r-1,\ r \le k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \le k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \le k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \le r-1. \end{cases} \tag{5}$$

Через $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства (1). Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (3) и (4)) и равенством (5), нетрудно увидеть (см. [2]), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. Следуя [2], мы будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (1) и *порожденной* ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$. В [2] показано, что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ имеет смешанный характер, а именно:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{6}$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi^{(r)}_{r,k}(t)\rho(t)dt = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt,$$

поэтому ряд вида (6) будем называть *смешанным рядом* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, считая это название условным и сокращенным обозначением полного названия: «*ряд Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, ортонормированной по Соболеву, порожденной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$*».

Некоторые результаты общего характера

Важное значение имеет свойство смешанного ряда (6), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} \hat{f}_{r,k}\varphi_{r,k}(x) \tag{7}$$

при $r \le N$ совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = a$ r-кратно, т.е.

$$(Y_{r,N}(f,x))^{(\nu)}_{x=a} = f^{(\nu)}(a) \quad (0 \le \nu \le r-1).$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (3) и (4), установленные в работе [2].

Теорема A. *Предположим, что функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a, b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на* (a, b). *Тогда система* $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, *порожденная системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *посредством равенств* (3) *и* (4), *полна в* $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ *и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1).

Теорема B. *Предположим, что* $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a, b)$, *а функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a, b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на* (a, b), $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — *система, ортонормированная в* $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ *относительно скалярного произведения* (6), *порожденная системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *посредством равенств* (3) *и* (4). *Тогда если* $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, *то ряд Фурье (смешанный ряд)* (6) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [a, b]$.

О представлении решения задачи Коши для ОДУ рядом Фурье по функциям $\varphi_{r,n}(x)$

В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о приближении решения задачи Коши для ОДУ суммами Фурье по системе $\{\varphi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональной по Соболеву и порожденной ортонормированной системой функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ посредством равенств (3) и (4) с $a = 0$, $b = 1$. Полученные ниже (теорема 1) результаты можно перенести на системы дифференциальных уравнений вида $y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y_0$, где $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Но для простоты выкладок мы ограничимся рассмотрением задачи Коши вида

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \tag{8}$$

в которой функцию $f(x, y)$ будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области $\bar{G}$ переменных (x, y), содержащей точку $(0, y_0)$. Кроме того, мы будем считать, что $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \bar{G}$. Это требование не сужает дальнейшие рассмотрения, так как, не ограничивая в общности, мы можем, в случае необходимости, продолжить функцию $f(x, y)$ по переменной y на всё $\mathbb{R}$, сохраняя свойство ее подчиненности нижеследующему условию Липшица (10). Например, если область $\bar{G}$ такова, что прямая в $\mathbb{R}^2$ вида (x, ty) $(t \in \mathbb{R})$ для каждого $x \in [0, 1]$ и $y \in \mathbb{R}$ пересекается с границей области $\bar{G}$ не более, чем в двух (граничных для $\bar{G}$) точках (x, y') и (x, y''), то функцию $f(x, y)$ можно непрерывно продолжить на $[0, 1] \times \mathbb{R}$, считая ее постоянной на лучах, выходящих из точек (x, y') и (x, y'') в противоположные направления вдоль прямой (x, ty) $(t \in \mathbb{R})$.

Требуется аппроксимировать с заданной точностью функцию $y = y(x)$, определенную на $[0,1]$, которая является решением задачи Коши (8). Будем считать, что весовая функция $\rho(x)$ интегрируема на $(0,1)$, а система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы **B**, а порожденная система $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – условиям $(0 \le x \le 1)$

$$\delta_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{1,k}(x))^2 < \infty, \quad \kappa_\varphi = \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{1,k}(t))^2 \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (9)$$

Кроме того, мы предположим, что по переменной y функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \le \lambda |y' - y''|, \quad 0 \le x \le 1. \quad (10)$$

Через m обозначим наименьшее натуральное число, для которого $h\lambda\kappa_\varphi < 1$, где $h = 1/m$. Если, в частности, $\lambda\kappa_\varphi < 1$, то $m = 1$. Полагая $x = t/m$, отобразим линейно отрезок $[0,m]$ на $[0,1]$. Относительно новой переменной $t \in [0,m]$ уравнение (8) принимает следующий вид

$$\eta'(t) = hf(ht, \eta(t)), \quad \eta(0) = y_0, \quad 0 \le t \le m, \quad (11)$$

где $h = 1/m$, $\eta(t) = y(ht)$. Мы можем представить отрезок $[0,m]$ в виде объединения отрезков $[l, l+1]$ $(l = 0, 1, \dots m-1)$ и решать поставленную задачу Коши для уравнения (11) сначала на $[0,1]$, а затем, используя найденное начальное значение $\eta(1)$, решать её на $[1,2]$ и так далее. Мы ограничимся рассмотрением этой задачи для отрезка $[0,1]$. Поскольку, по предположению, функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\bar{G}$, то из (11) следует, что функция $\eta'(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и, следовательно, $\eta \in W^1_{L^2_\rho(0,1)}$, поэтому в силу теоремы **B** мы можем представить функцию $\eta(t)$ в виде равномерно сходящегося на $[0,1]$ ряда Фурье по порожденной системе $\{\varphi_{1,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\eta}_{1,k} \varphi_{1,k}(t),$$

где

$$\hat{\eta}_{1,k} = \int_0^1 \eta'(t) \varphi_{k-1}(t) \rho(t) dt \quad (k \ge 1). \quad (12)$$

Наша цель состоит в том, чтобы сконструировать итерационный процесс для нахождения приближенных значений коэффициентов $c_k = m\hat{\eta}_{1,k+1}$

$(k=0,1,\ldots)$. Для этого обратимся к соотношениям (5) и (7), которые вместе с (12) дают

$$\eta'(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\eta}_{1,k+1}\varphi_k(t), \tag{13}$$

где равенство понимается в том смысле, что ряд в правой части равенства (13) сходится к η' в метрике пространства $L^2_\rho(0,1)$. Положим $q(t)=f(ht,\eta(t))=m\eta'(t)$ и заметим, что в силу (12) (см. также (13)) коэффициенты Фурье функции $q=q(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ имеют вид

$$c_k(q)=\int_0^1 q(t)\varphi_k(t)\rho(t)dt=m\hat{\eta}_{1,k+1} \quad (k\geq 0). \tag{14}$$

С учетом этих равенств мы можем переписать (12) в следующем виде

$$\eta(t)=\eta(0)+h\sum_{k=0}^{\infty}c_k(q)\varphi_{1,k+1}(t). \tag{15}$$

Из (14) и (15), в свою очередь, выводим следующие соотношения

$$c_k(q)=\int_0^1 f\left[ht,\eta(0)+h\sum_{j=0}^{\infty}c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t)\right]\varphi_k(t)\rho(t)dt,\ k=0,1,\ldots. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство l_2, состоящее из последовательностей $C=(c_0,c_1,\ldots)$, для которых определена норма $\|C\|=\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$. В пространстве l_2 рассмотрим оператор A, сопоставляющий точке $C\in l_2$ точку $C'\in l_2$ по правилу

$$c_k'=\int_0^1 f\left[ht,\eta(0)+h\sum_{j=0}^{\infty}c_j\varphi_{1,j+1}(t)\right]\varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k=0,1,\ldots.$$

Из (16) следует, что точка $C(q)=(c_0(q),c_1(q),\ldots)$ является неподвижной точкой оператора $A:l_2\to l_2$. Для того чтобы найти точку $C(q)$ методом простых итераций, достаточно показать, что оператор $A:l_2\to l_2$ является сжимающим в метрике пространства l_2. С этой целью рассмотрим две точки $P,Q\in l_2$, где $P=(p_0,\ldots)$, $Q=(q_0,\ldots)$, и положим $P'=A(P)$, $Q'=A(Q)$. Имеем

$$p_k'-q_k'=\int_0^1 F_{P,Q}(t)\varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k=0,1,\ldots \tag{17}$$

где

$$F_{P,Q}(t) = f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} p_j\varphi_{1,j+1}(t)\right] -$$

$$-f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} q_j\varphi_{1,j+1}(t)\right]. \tag{18}$$

Из (17), пользуясь неравенством Бесселя, находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(p'_k - q'_k)^2 \leq \int_0^1 (F_{P,Q}(t))^2\rho(t)dt. \tag{19}$$

Из (18) и (10) имеем

$$(F_{P,Q}(t))^2 \leq (h\lambda)^2\left(\sum_{j=0}^{\infty}(p_j - q_j)\varphi_{1,j+1}(t)\right)^2, \tag{20}$$

откуда, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, выводим

$$(F_{P,Q}(t))^2 \leq (h\lambda)^2\sum_{j=0}^{\infty}(p_j - q_j)^2\sum_{j=0}^{\infty}(\varphi_{1,j+1}(t))^2.$$

Сопоставляя (20) с (19), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p'_k - q'_k)^2 \leq (h\lambda)^2\sum_{k=0}^{\infty}(p_k - q_k)^2\int_0^1\sum_{j=0}^{\infty}(\varphi_{1,j+1}(t))^2\rho(t)dt. \tag{21}$$

Из (21) и (9) имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(p'_k - q'_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq h\kappa_\varphi\lambda\left(\sum_{k=0}^{\infty}(p_k - q_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Неравенство (22) показывает, что если $h\kappa_\varphi\lambda < 1$, то оператор $A : l_2 \to l_2$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C^{\nu+1} = A(C^\nu)$ сходится к точке $C(q)$ при $\nu \to \infty$. Однако с точки зрения приложений важно рассмотреть конечномерный аналог оператора A. Мы рассмотрим оператор $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, сопоставляющий точке $C_N = (c_0, \ldots, c_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ точку $C'_N = (c'_0, \ldots, c'_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ по правилу

$$c'_k = \int\limits_0^1 f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{N-1} c_j\varphi_{1,j+1}(t)\right]\varphi_k(t)\rho(t)dt,\ k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{23}$$

Рассмотрим две точки $P_N, Q_N \in \mathbb{R}^N$, где $P_N = (p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$, $Q_N = (q_0, q_1, \ldots, p_{N-1})$ и положим $P'_N = A_N(P_N)$, $Q'_N = A_N(Q_N)$. Дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к неравенству (22), мы получим

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1}(p'_k - q'_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq h\kappa_\varphi\lambda\left(\sum_{k=0}^{N-1}(p_k - q_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Неравенство (24) показывает, что если $h\kappa_\varphi\lambda < 1$, то оператор $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C_N^{\nu+1} = A_N(C_N^\nu)$ при $\nu \to \infty$ сходится к его неподвижной точке, которую мы обозначим через $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_0(q), \ldots, \bar{c}_{N-1}(q))$. С другой стороны, рассмотрим точку $C_N(q) = (c_0(q), \ldots, c_{N-1}(q))$, составленную из искомых коэффициентов Фурье функции q по системе φ. Нам остается оценить погрешность, проистекающую в результате замены точки $C_N(q)$ точкой $\bar{C}_N(q)$. Другими словами, требуется оценить величину $\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N = \left(\sum_{j=0}^{N-1}(c_j(q) - \bar{c}_j(q))^2\right)^{\frac{1}{2}}$. С этой целью рассмотрим точку $C'_N(q) = A_N(C_N(q)) = (c'_0(q), \ldots, c'_{N-1}(q))$ и запишем

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \leq \|C_N(q) - C'_N(q)\|_N + \|C'_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N.$$

Далее, пользуясь неравенством (24), имеем

$$\|C'_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N = \|A_N(C_N(q)) - A_N(\bar{C}_N(q))\| \leq$$
$$\leq h\kappa_\varphi\lambda\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N. \tag{26}$$

Из (25) и (26) выводим

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \leq \frac{1}{1 - h\kappa_\varphi\lambda}\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N. \tag{27}$$

Чтобы оценить норму в правой части неравенства (27), заметим, что в силу неравенства Бесселя

$$\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^2 \leq \int_0^1 (F_{C(q),C_N(q)}(t))^2\rho(t)dt, \tag{28}$$

где

$$F_{C(q),C_N(q)}(t) = f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t)\right] -$$
$$-f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{N-1} c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t)\right]. \tag{29}$$

Из (29) и (10) следует, что

$$(F_{C(q),C_N(q)}(t))^2 \le \lambda^2 \left(\sum_{j=N}^{\infty} hc_j(q)\varphi_{1,j+1}(t) \right)^2,$$

отсюда с учетом (13) имеем

$$(F_{C(q),C_N(q)}(t))^2 \le \lambda^2 \left(\sum_{j=N}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j+1}\varphi_{1,j}(t) \right)^2. \tag{30}$$

Сопоставляя (30) с (28), получаем

$$\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^2 \le \lambda^2 \int_0^1 \left(\sum_{j=N}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j+1}\varphi_{1,j+1}(t) \right)^2 \rho(t)dt, \tag{31}$$

где согласно (12)

$$\hat{\eta}_{1,j+1} = \int_0^1 \eta'(t)\varphi_j(t)\rho(t)dt \quad (j = 0, 1, \ldots)$$

— коэффициенты Фурье функции $\eta'(t) = hf(ht, \eta(t))$.

Подводя итоги, из (27) и (31) мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть область $\bar{G}$ такова, что $[0,1] \times \mathbb{R} \subset \bar{G}$, функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\bar{G}$ и удовлетворяет условию Липшица (10), а h и λ удовлетворяет неравенству $h\lambda\kappa_\varphi < 1$, где величина κ_φ определена равенством (9). Далее, пусть l_2 гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $C = (c_0, \ldots)$, для которых введена норма $\|C\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, оператор $A : l_2 \to l_2$ сопоставлят точке $C \in l_2$ точку $C' \in l_2$ по правилу (15). Кроме того, пусть $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ — конечномерный аналог оператора A, сопоставляющий точке $C_N = (c_0, \ldots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ точку $C'_N = (c'_0, \ldots, c'_N) \in \mathbb{R}^N$ по правилу (23). Тогда операторы $A : l_2 \to l_2$ и $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ являются сжимающими и, следовательно, существуют их неподвижные точки $C(q) = (c_0(q), c_1(q), \ldots) = A(C(q)) \in l_2$ и $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_0(q), \bar{c}_0(q), \ldots, \bar{c}_N(q)) = A_N(\bar{C}_N(q)) \in \mathbb{R}^N$, для которых имеет место неравенство*

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \le \frac{\lambda\sigma_N^\varphi(\eta)}{1 - h\kappa_\varphi\lambda},$$

где

$$\sigma_N^{\varphi}(\eta) = \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j}\varphi_{1,j}(t) \right)^2 \rho(t)dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

а $C_N(q) = (c_0(q), \ldots, c_{N-1}(q))$ *— конечная последовательность, составленная из первых* N *компонент точки* $C(q)$*, при этом в силу* (13) *справедливо также равенство* $hC_N(q) = (\hat{\eta}_{1,1}, \hat{\eta}_{1,2}, \ldots, \hat{\eta}_{1,N})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 329–332.

2. *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. матем 82. Т. 82. (Принята к печати)

3. *A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett and J. M. Sanz-Serna* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. P. 151–175.

4. *F. Marcellan, M. Alfaro and M. L. Rezola* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. and Appl. Math. North-Holland. 1993. Vol. 48. P. 113–131.

5. *H. G. Meijer* Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. P. 1–16.

6. *K. H. Kwon and L. L. Littlejohn* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. № 2 P. 289–303.

7. *Lopez G. Marcellan F. Vanassche W.* Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11, № 1. P. 107–137.

8. *K. H. Kwon and L. L. Littlejohn* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. P. 547–594.

9. *F. Marcellan and Yuan Xu* On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33, № 3. P. 308–352.

10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. 2003. Т. 194, вып. 3. С. 115–148.

11. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала : Издательство Дагестанского научного центра. 2004. 176 с.

12. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ. 1999.

13. *Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

14. *G. Faber* Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1910. Vol. 19. P. 104–112.

УДК 517.538

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ ЯКОБИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

И. И. Шарапудинов,Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, Россия)
sharapud@mail.ru, tadgius@gmail.com

Пусть E произвольное множество, на котором задана мера Лебега m, $p = p(x)$ — неотрицательная m — измеримая функция, заданная на E. Через $L_m^{p(x)}(E)$ обозначим пространство m-измеримых функций $f = f(x)$, заданных на E, для которых конечен интеграл Лебега $\int_E |f(x)|^{p(x)} m(dx)$. Если $p = p(x)$ существенно ограничена на E, то, как показано в [1], $L_m^{p(x)}(E)$ является линейным топологическим пространством, в котором при дополнительном условии $1 \leq p(x) \leq \overline{p} < \infty$ можно ввести норму

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} m(dx) \leq 1\},$$

которая превращает $L_m^{p(x)}(E)$ в банахово пространство. Если $E \in \mathbb{R}^n$, $m(dx) = w(x)dx$, мы будем писать $L_w^{p(x)}(E)$ вместо $L_m^{p(x)}(E)$ и называть $L_w^{p(x)}(E)$ весовым пространством Лебега с переменным показателем $p(x)$ и весом $w = w(x)$.

В настоящей работе рассмотрена задача о базисности системы полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ в весовом пространстве Лебега $L_\mu^{p(x)}([-1,1])$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $\mu = \mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В случае $\alpha, \beta > -1/2$ показано, что если переменный показатель $p = p(x)$ подчинен на $[-1,1]$ некоторым естественным условиям, то ортонормированная система полиномов Якоби $p_n^{\alpha,\beta}(x) = (h_n^{\alpha,\beta})^{-\frac{1}{2}} P_n^{\alpha,\beta}(x)$ (n=0,1,...) является базисом в $L_\mu^{p(x)}([-1,1])$, если $4\frac{\alpha+1}{2\alpha+3} < p(1) < 4\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$, $4\frac{\beta+1}{2\beta+3} < p(-1) < < 4\frac{\beta+1}{2\beta+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.

УДК 517.521

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ И ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ И ПОРОЖДЕННЫЕ КЛАССИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБЫШЕВА ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Т. И. Шарапудинов (Махачкала, Россия)
sharapudinov@gmail.com

Рассматривается задача Коши для разностного уравнения

$$\sum_{l=0}^{r} a_l(j)\Delta^l y(j) = f(j), \quad j \in \Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}, \tag{1}$$

с начальными условиями $\Delta^l y(0) = y_l$, $l = 0, 1, \dots, r-1$, где функции a_l, $l = 0, 1, \dots, r-1$, заданы на множестве Ω_N, а $\Delta^l y$ — оператор конечной разности порядка l.

Такая задача представляет интерес не только сама по себе, но и в связи с тем, что к ней может быть сведена проблема о приближенном решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$\sum_{l=0}^{r} a_l(t) y^{(l)}(t) = f(t) \tag{2}$$

с начальными условиями $y^{(l)}(0) = y_l$, $l = 0, 1, \dots, r-1$.

Заметим, что уравнение (1) можно переписать в следующем рекуррентном виде

$$a_r(j) y(j+r) = \sum_{l=0}^{r-1} b_l(j) y(j+l) + f(j),\ j \in \Omega_N, \tag{3}$$

в котором $b_l(j)$, $l = 0, 1, \dots, r-1$, — заданные функции, определенные на сетке Ω_N. Если функция $|a_r(j)| \geq c > 0$, $j \in \Omega_N$, то точное решение уравнения (1) можно найти с помощью рекуррентной формулы (3). Если же для некоторых $j \in \Omega_N$ будет $a_r(j) = 0$, то однозначно найти соответствующие значения $y(j+r)$ с помощью равенства (3) невозможно. Кроме того, отметим еще, что если значения $f(j)$ функции f, фигурирующей в правой части уравнения (1), содержат погрешности измерений, а их число N велико, то использование рекуррентной формулы (3) для нахождения решения задачи $y = y(j)$ может дать неудовлетворительные результаты даже в том случае, когда $|a_r(j)| \geq c > 0$, $j \in \Omega_N$. Таким образом, возникает задача о поиске альтернативных методов решения уравнения (1).

Предлагается новый подход приближенного решения задачи (1), основанный на разложении искомого решения $y(j)$ на сетке $\Omega_{N+r} = \{0, 1, \ldots, N-1+r\}$ в конечный ряд Фурье по полиномам $\tau_{r,n}^{\alpha,\beta}(x, N)$, $(n = 0, 1, \ldots, N-1+r)$, ортогональным по Соболеву в смысле скалярного произведения

$$\langle \tau_{r,n}^{\alpha,\beta}, \tau_{r,m}^{\alpha,\beta} \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k \tau_{r,n}^{\alpha,\beta}(0) \Delta^k \tau_{r,m}^{\alpha,\beta}(0) + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r \tau_{r,n}^{\alpha,\beta}(j) \Delta^r \tau_{r,m}^{\alpha,\beta}(j) \mu(j),$$

где $\alpha, \beta > -1$, $\mu(x)$ — дискретная весовая функция, задаваемая равенством

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}.$$

Полиномы $\tau_{r,n}^{\alpha,\beta}(x, N)$ определяются через классические полиномы Чебышева дискретной переменной с помощью следующих равенств:

$$\tau_{r,k}^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{x^{[k]}}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1),$$

$$\tau_{r,k+r}^{\alpha,\beta}(x, N) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \tau_k^{\alpha,\beta}(t, N).$$

УДК 517.518.23

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. А. Шкаликов (Москва, Россия)
shkalikov@mi.ras.ru

В докладе будут представлены последние результаты об описании пространств мультипликаторов действующих из одного пространства бесселевых потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ в другое пространство $H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)$. Основное внимание будет уделено случаю, когда индексы гладкости этих пространств разного знака, т.е. $s, t \geqslant 0$. Соответствующее пространство мультипликаторов состоит из распределений u, таких, что для всех

$\varphi \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ произведение $\varphi \cdot u$ корректно определено и принадлежит пространству $H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)$. В случае, когда $p \leqslant q$ и выполнено одно из условий

$$s \geqslant t \geqslant 0, \quad s > n/p, \quad \text{или} \quad t \geqslant s \geqslant 0, \quad t > n/q',$$

где $1/q + 1/q' = 1$, рассматриваемые пространства мультипликаторов удается описать явно, а именно

$$M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_q^{-t}(\mathbb{R}^n)] = H_{q,\,unif}^{-t}(\mathbb{R}^n) \cap H_{p',\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

где $H_{r,\,unif}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$ — пространства равномерно локализованных бесселевых потенциалов.

Для важного случая $s = t < n/\max(p, q')$ доказаны двусторонние вложения

$$H_{r_1,\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n) \subset M[H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-s}(\mathbb{R}^n)] \subset H_{r_2,\,unif}^{-s}(\mathbb{R}^n),$$

где числа $r_1 > r_2 > 1$ указываются явно.

Полученные результаты имеют важные приложения в теории дифференциальных операторов с коэффициентами-распределениями (обыкновенных и с частными производными), о чем будет рассказано в докладе.

Доклад основан на совместных работах с М. И. Нейман-заде и А. А. Беляевым.

УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ В ПОДГРУППАХ[1]

Ю. Н. Штейников (Москва, Россия)
yuriisht@gmail.com

Пусть G — мультипликативная подгруппа простого конечного поля из p элементов. Определим величины $T_k(G)$:

$$T_k(G) = |\{(x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k) \in G^{2k} : x_1 + ... + x_k = y_1 + ... + y_k\}|.$$

В своем докладе я расскажу о новой оценке для $T_k(G)$ и связанных с ней задачах.

Теорема. *При* $|G| < p^{1/2}$ *справедлива оценка*

$$T_3(G) = O(|G|^4 \log |G|.)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heath-Brown D. R., Konyagin S. V.* New bounds for Gauss sums derived from kth powers, and for Heilbronn's exponential sum // Q. J. Math. 2000. Vol. 51, iss. 2. P. 221–235.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

2. *Штейников Ю. Н.* Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и некоторые их приложения // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 4. С. 606–625.

3. *Murphy B., Rudnev M., Shkredov I. D. , Shteinikov Yu. N.* On the few products, many sums problem. https://arxiv.org/abs/1712.00410.

УДК 519.652

К ЗАДАЧЕ МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ ДВУХТОЧЕЧНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА ОТ N ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Шустов (Москва, Россия)
vshustov@gosniias.ru

Необходимость использования многомерной интерполяции часто возникает в реальных приложениях, в частности при обработке цифровых изображений или создании моделей полей скоростей в потоке жидкости или газа, а также в электронной картографии с использованием цифровой модели поверхности Земли.

Для случая одной переменной разработаны множество методов интерполяции, основанных на использовании многочленов Лагранжа, сплайн-функций, кривых Безье, B-сплайнов и др. Задача многомерной, в частности, двумерной интерполяции рассматривались в ряде работ, там же отмечены трудности, возникающие при решении этой задачи [1, с. 181; 2, с. 47]. Метод, сводящий многомерную интерполяцию к последовательности одномерных, возможен, но трудоемкость его реализации резко возрастает с увеличением числа переменных $n = 2, 3, 4$ и т.д.

Предлагаемый подход к многомерной интерполяции сеточной функции, заданной на регулярной сетке узлов, относится к локальным методам: значение функции в точке, попадающей в ячейку сетки, определяется значениями сеточной функции и ее производных только в вершинах этой ячейки. Метод основан на использовании двухточечных интерполяционных многочленов Эрмита, рассмотренных в [3], применительно к пространственной задаче многомерной интерполяции.

Для построения многомерной интерполяции требуется обобщение представления двухточечных многочленов Эрмита со случая одной переменной до общего случая n переменных.

Теорема. *Пусть в n-мерной области $\mathbf{D}^n \subset E^n$ задана регулярная сетка узлов* $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \left\{x^1_{i^1}\right\}^1_{i^1=0} \times ... \times \left\{x^n_{i^n}\right\}^1_{i^n=0},$$

являющаяся декартовым произведением одномерных сеток вида $C^s = [x^s_0, x^s_1]$, $s = 1, 2...n$. Индекс вверху s означает номер координаты, индекс *внизу i означает номер узла. Пусть в узлах сетки заданы значения функции и всех ее частных производных до порядка т включительно*

$$\nabla^{(j)} f_{i^1,...,i^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,...,i^n}, \quad j = 0, 1...m.$$

Тогда существует многочлен $H(x)$ от n переменных, $x = (x^1, ...x^n)$, определенный в области $\mathbb{D}^n$, степени не выше $2m+1$ по каждой переменной, удовлетворяющий условиям, наложенным на значения многочлена и его производных в узлах сетки

$$\nabla^{(j)} H(x^1_{i^1}, ...x^n_{i^n}) = \nabla^{(j)} f_{i^1,...i^n}, \quad i^s = \{0, 1\}, \quad s = 1, 2...n$$

и который может быть представлен в виде

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{1} ... \sum_{i^n=0}^{1} \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^m_j(\xi^1_{i^1})...\varphi^m_j(\xi^n_{i^n})}{j!} (\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,...,i^n},$$

где функции влияния $\varphi^m_j(\xi^s_{i^s})$ определены соотношением

$$\varphi^m_j(\xi^s_{i^s}) = (\xi^s_{1-i^s})^{m+1} \sum_{k=0}^{m-j} c^k_{m+k} \xi^k_{i^s},$$

выражение $(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,...,i^n}$ есть соответствующий член многочлена Тейлора для функции n переменных [4, с. 10], который представляется формулой

$$(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,,...,i^n} = \left((x^1 - x^1_{i^1}) \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + (x^n - x^n_{i^n}) \frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,...,i^n},$$

относительные переменные ξ^s_0 и ξ^s_1связаны с исходными переменными x^s, соотношениями

$$\xi^s_0 = \frac{x^s - x^s_0}{x^s_1 - x^s_0}, \quad \xi^s_1 = 1 - \xi^s_0, \quad s = 1, 2..., n.$$

Рассмотрены частные случаи представления многомерного двухточечного многочлена.

1. Пусть $m = 0$. Двухточечный многочлен $H(x)$ имеет вид:

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{1} ... \sum_{i^n=0}^{1} \xi^1_{1-i^1} ... \xi^n_{1-i^n} f_{i^1,...,i^n},$$

что соответствует случаю n-линейной интерполяции.

2. Пусть $m = 1$. Двухточечный многочлен $H(x)$ представляется в виде:

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{1} ... \sum_{i^n=0}^{1} (\xi^1_{1-i^1})^2 ... (\xi^n_{1-i^n})^2 [(1 + 2\xi^1_{i^1}) ... (1 + 2\xi^n_{i^n}) f_{i^1,...,i^n} +$$

$$+(\Delta x * \nabla) f_{i^1,...,i^n}],$$

что соответствует случаю n-гладкой интерполяции.

В случае, когда область, в которой задана сеточная функция, состоит из множества ячеек, на первом этапе необходимо определить номер i_0 ячейки, в которую попадает точка x в соответствии с условиями

$$x^s_{i^s_0} \leq x^s < x^s_{i^s_0+1}, \qquad s = 1, 2, ...n,$$

а затем определить значение интерполяционной функции $H(x)$ по заданным значениям сеточной функции и ее производных в вершинах этой ячейки.

В качестве примера на рис. 1 и рис. 2 представлены графики интерполяционных функций, построенные на сетке 3×3 с использованием кусочно-линейной ($m = 0$) и гладкой ($m = 1$) двумерной интерполяции ($n = 2$), соответственно.

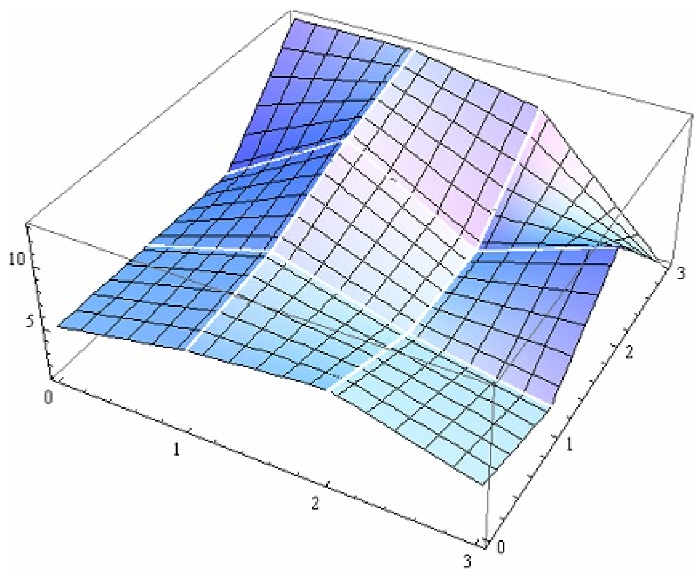


Рис. 1

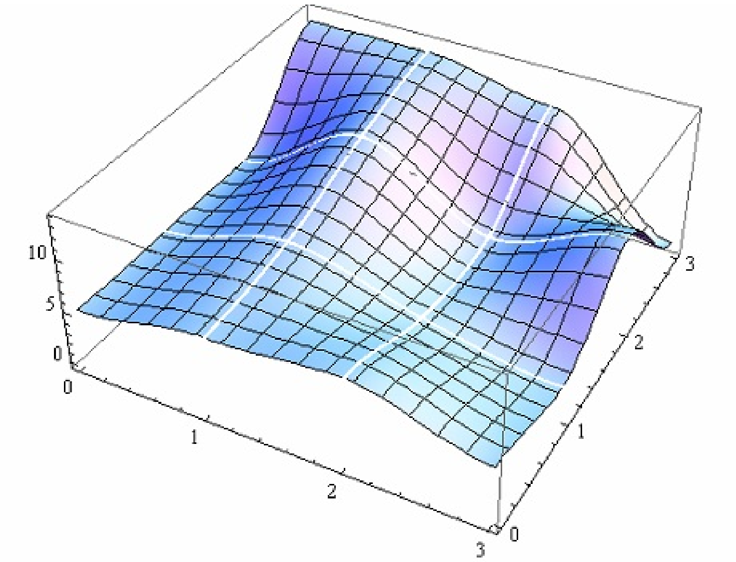


Рис. 2

Из рис. 1, 2 видно, что при использовании формул гладкой интерполяции наклон поверхности меняется плавно, что важно во многих приложениях.

Многомерные двухточечные многочлены Эрмита наряду с задачами интерполяции сеточных функций могут использоваться для аппроксимации функций многих переменных, облададающих требуемым уровнем гладкости, определяемой непрерывностью производных соответствующего порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М. : Физматлит, 1962. 464 с.
2. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
3. *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1091–1108
4. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 2. М. : Высш. шк., 1981. 584 с.

УДК 517.52

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ S-МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ ДИНИ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

В. И. Щербаков (Жуковский, Россия)

kafmathan@mail.ru

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \le a_k < p_{k+1}$, $1 \le a_s < p_{s+1}$, $0 \le n' < m_s$.

Рассмотрим группу целочисленных последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ и обратной операцией $\dot{-}$. Окрестностями нуля в G является вложенная система подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$$

$$\text{с} \;\; G_n = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G | x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\};$$

фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок p_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть $e_n = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, 1, 0, 0, \ldots\}$ — базисные элементы в $G_n \setminus G_{n-1} \in G$. Тогда имеет место формула

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = x_1 e_1 \dot{+} x_2 e_2 \dot{+} \ldots \dot{+} x_n e_n \dot{+} \ldots (\text{ для } x \in G \text{ и целого } n \ge 0 : \\ nx = \underbrace{x \dot{+} \ldots \dot{+} x}_{n \text{ раз}} \text{ и } 0x = 0). \tag{2}$$

Рассмотрии следующее отображение (его иногда называют отображением Монна [1, 2]:

$$G \ni x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \langle x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n} \in [0, 1]. \tag{3}$$

$\{p_n\}$ — иррациональные числа отрезка $[0, 1]$, а также ноль и единица имеют единственные прообразы в G по отображению (3); числа $\frac{l}{m_n}$ $(l = 1, 2, \ldots, p_n - 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ в G имеют два прообраза, один из которых конечен (то есть с нулями в конце последовательности: $(\frac{l}{m_n})_k = 0$ для $k > n$; его мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другой — бесконечен, который будем обозначать как $\frac{l}{m_n} -$ $((\frac{l}{m_n} -)_k = p_k - 1$ при $k > n$). С учётом вышеприведённых обозначений группа последовательностей G перешла в *модифицированный отрезок* $[0, 1]$, где $\{p_n\}$ — рациональные точки «раздвоились».

Обозначим за $G_{l,n} = l e_n \dot{+} G_n$ (на модифицированном отрезке $[0, 1]$ смежный класс $G_{l,n}$ соответствует отрезку $[\frac{l}{m_n}; \frac{l+1}{m_n} -]$, $l = 0, 1, \ldots p_n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Положив $\mu(x \dot{+} G_n) = \frac{1}{m_n}$, по схеме Лебега определяем меру (на борелевских множествах она совпадает с мерой Хаара) и абсолютно сходящийся интеграл на G. За $L(G)$ обозначим множество функций, интеграл от которых по группе G абсолютно сходится. Аналогично действительной прямой определяем ортогональные и ортонормированные системы функций. Рассмотрим следующие ортонормированные системы функций:

1) $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $\psi_0(x) \equiv 1$, $\psi_{m_k}(x) = \exp\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$ и $\psi_n(x) = \prod_{k=0}^{s}(\psi_{m_k}(x))^{a_k}$, а также

2) $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \gamma_0(x) \equiv 1$;

$\gamma_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k}\exp(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}), & \text{если } x \in G_k, \\ 0 & \text{для } x \in G \setminus G_k \end{cases}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = \left(\gamma_{m_s}\left(x \dot{-} \left(\frac{n'}{m_s}\right)\right)\right)^{a_s}$, где числа s, a_s и n'– определены равенством (1), и $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$.

Для $p_n \equiv 2$ система Ψ является системой Уолша [3] в нумерации Пэли [4], для $p_n \equiv p$ — системой Крестенсона [5] (либо Крестенсона – Леви); в общем случае — системой Прайса [6] либо (для простых p_n) — системой Виленкина на модифицированном отрезке $[0, 1]$ (Н. Я. Виленкин [7] систему Ψ рассматривал как систему характеров нульмерной компактной абелевой группы).

При $p_n \equiv 2$ система Γ (на отрезке $[0, 1]$) переходит в систему Хаара [8]; для $\sup\limits_n p_n < \infty$ она рассматривалась (на отрезке $[0, 1]$) Н. Я. Виленкиным [9], Б. И. Голубовым и А. И. Рубинштейном [10]; для любых p_n (также на отрезке $[0, 1]$) — Б. И. Голубовым [11]; на нульмерных компактных абелевых группах она исследовалась С. Ф. Лукомским [12].

Следующая функция (в [13] она обозначена как $q(x)$)

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \quad \text{для} \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G_n \setminus G_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

является мажорантой ядер Дирихле как для систем Ψ (см. [13]), так и для Γ (см. [14]).

В [13] доказана следующая

Теорема S. *Если выполнено условие*

$$\int\limits_{G \setminus G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| S(t)\, dt < \infty, \tag{4}$$

то ряд Фурье по системе Ψ *от функции* $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.

Для систем Γ условие (4) можно заменить на более слабое (см., напр. [14])

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n \setminus G_n+1} |f(x \dot{+} t) - f(x)| S(t)\, dt = 0 \tag{5}$$

(откуда, в частности, следует, что для $\sup\limits_n p_n < \infty$ Γ является системой сходимости).

На одном из семинаров по теории ортогональных и тригонометрических рядов П. Л. Ульяновым был задан вопрос: сколь минимальна функция $S(t)$. То есть если $q(t) \geq 0$ такова, что

$$\lim_{t \to 0} \frac{q(t)}{S(t)} = 0, \tag{6}$$

то существует ли функция $f(t) \in L(G)$ такая, что

$$\int\limits_{G \setminus G_n} |f(x \dotplus t) - f(x)| q(t)\, dt < \infty, \tag{7}$$

однако её ряд Фурье по системе Ψ расходится в точке $x \in G$. Ответ даёт следующая

Теорема 1. *Для всякой функции $q(t) \geq 0$, удовлетворяющей условию* (6), *найдётся $f(t) \in L(G)$ такая, что выполнено* (7), *однако её ряд Фурье по системе Γ, а также по системе Ψ, расходится в точке $x \in G$.*

Однако я несколько изменил условие (6) (для систем Ψ), то есть показал, что верна

Теорема 2. *Пусть $q(t)$ постоянна на смежных классах $G_{l,n}$ $(l = 1, 2, \ldots, p_n - 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ и*

$$\liminf_{t \to 0} \frac{q(t)}{S(t)} = 0. \tag{8}$$

Тогда найдётся функция $f(t) \in L(G$ такая, что выполнено (7), *однако её ряд Фурье по системе Ψ расходится в точке $x \in G$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что

1) условие $\int\limits_{G \setminus G_n} |f(x \dotplus t) - f(x)| \langle \frac{1}{t} \rangle\, dt < \infty$ (классический признак Дини) не может гарантировать сходимости ряда Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ по системе Ψ;

2) на группах Н. Я. Виленкина (нульмерных компактных абелевых группах) сходимость ряда Фурье по системам Н. Я. Виленкина (S-признак Дини (4)) зависит от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}(e_n \in G_n \setminus G_{n+1})$.

Отметим, что для системы Γ теорема 2 уже не имеет места (то есть (даже при $\sup\limits_n p_n = \infty$) могут быть функции $q(t)$, удовлетворяющие (8), однако из условия (7) будет следовать сходимость ряда Фурье функции $f(t) \in L(G)$ в точке $x \in G$. Отметим, что обобщение П. Л. Ульянова (6) (теорема 1) остаётся справедливым и для систем Γ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Monna A. F.* Analysys non-Archimedence. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Veilag, 1970. 118 p.

2. *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-аддический анализ и математическая физика // Теория и приложения. М. : Физматгиз, 2012. 452 с.

3. *Walsh J. L.* A constructive of normal orthonormal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, № 1. P. 5–24.

4. *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthonormal functions // Proc. of London Math Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.

5. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pac. J. Math. 1955. Vol. 5, № 1, P. 17 –31.

6. *Price J. J.* Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math. 1957. Vol. 9, № 3. P. 413–425.

7. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4, С. 363–400.

8. *Haar A.* Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme // Mathem. Anal. 1910. B. 69. S. 331–371.

9. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортгональных рядов. М. : Физматгиз, 1958. Дополнения Н. Я. Виленкина, § 1, п. 6. С. 475–479.

10. *Голубов Б. И., Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.

11. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.

12. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.

13. *Щербаков В. И.* О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. 1983. № 2. С. 37–42.

14. *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара // Матем. заметки. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 446–473.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ[1]

В. А. Юрко (Саратов, Россия)

YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных пучков дифференциальных операторов второго порядка, заданных на произвольных компактных графах при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделено наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, № 17-51-53180)

обратной задачи доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура построения решения. При этом используется развитие идей метода спектральных отображений [1]. Отметим, что основные результаты для классических обратных спектральных задач для дифференциальных операторов *на интервале* представлены в монографиях [1–5]. Обратные спектральные задачи для *операторов Штурма–Лиувилля* на графах изучались в [6–8] и других работах.

Рассмотрим компактный связный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_s\}$, множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и с отображением σ, которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины $u_{2j-1} =: \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} =: \sigma^+(e_j)$ называются *начальной* и *конечными* вершинами e_j, соответственно. Будем говорить, что ребро e_j *начинается* в точке u_{2j-1} и *заканчивается* в u_{2j}. Точки $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$ называются *концевыми* для $\mathcal{E}$. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности (который обозначается тем же символом v): $v = \{u_{j_1}, \ldots, u_{j_\nu}\}$ так, что $v = u_{j_1} = \ldots = u_{j_\nu}$. Другими словами, множество U разделяется на m классов эквивалентности $v_1, \ldots, v_m$. Число концевых точек в классе v_k называется *валентностью* вершины v_k и обозначается $val\,(v_k)$. Вершина $v_k \in \mathcal{V}$ называется *граничной*, если $val\,(v_k) = 1$. Остальные вершины называются *внутренними*. Пусть $\mathcal{V}_0 = \{v_1, \ldots, v_p\}$ — граничные вершины, а $\mathcal{V}_1 = \{v_{p+1}, \ldots, v_m\}$ — внутренние вершины. Ребро e_j называется *граничным*, если одна из его концевых точек лежит в $\mathcal{V}_0$. Остальные ребра называются внутренними. Пусть $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \ldots, e_p\}$ – граничные ребра и $v_k \in e_k$ при $k = \overline{1,p}$. Ребро $e_k \in \mathcal{E}$ называется *примыкающим* к $v \in \mathcal{V}$, если $v \in e_k$. Через $R(v, G)$ обозначим множество ребер графа G, примыкающих к v. Пусть l_j — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1} соответствует $x_j = 0$, а конечная точка u_{2j} соответствует $x_j = l_j$.

Цепочка ребер $\{e_{\nu_1}, \ldots, e_{k,\nu_\eta}\}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Ребро $e_j \in \mathcal{E}$ называется *простым*, если оно не является частью цикла. В частности, все граничные ребра $e_1, \ldots, e_p$ являются простыми. Занумеруем ребра следующим образом: $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \ldots, e_r\}$ — простые ребра, $\mathcal{E}_2 = \{e_{r+1}, \ldots, e_s\}$ — ребра, которые образуют множество циклов. Пусть для определенности $p > 1$ (случаи $p = 0$ и $p = 1$ требуют небольших изменений; см. замечание в конце статьи). Возьмем граничную вершину v_p в качестве корня. Соответствующее ребро e_p будем называть *корневым*. Для определенности условимся, что если $e_j \in \mathcal{E}_1$ — простое ребро, то u_{2j} расположена ближе к корню, чем u_{2j-1}. Стягивая каждый цикл в точку, получим новый граф G^* с множеством ребер $\mathcal{E}_1$. Ясно, что G^* — дерево (т.е. граф без циклов). Зафиксируем $e_k \in G^*$.

Наименьшее число ω_k ребер G^* между корневым ребром и e_k (включая e_k) называется *порядком* ребра e_k. Порядок корневого ребра равен нулю. Число $\omega := \max\limits_{e_k \in G^*} \omega_k$ называется порядком G^*. Пусть $\mathcal{E}^{(\mu)}$, $\mu = \overline{0, \omega}$ — множество простых ребер порядка μ.

Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j. Обозначим

$$Y_{|u_{2j-1}} := y_j(0), \quad Y_{|u_{2j}} := y_j(l_j), \quad \partial Y_{|u_{2j-1}} := y_j'(0), \quad \partial Y_{|u_{2j}} := -y_j'(l_j).$$

Если $v \in \mathcal{V}$, то $Y_{|v} = 0$ означает, что $Y_{|u_j} = 0$ для всех $u_j \in v$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1,s}}$ и $P = \{p_j\}_{j=\overline{1,s}}$ — комплекснозначные функции на G; они называются потенциалами. Предположим, что $q_j(x_j) \in L(0, l_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, l_j]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G:

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x_j) + q_j(x_j)) y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in [0, l_j], \tag{1}$$

где $j = \overline{1, s}$, ρ — спектральный параметр, функции y_j, y_j', $j = \overline{1, s}$, абсолютно непрерывны на $[0, l_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине $v_\xi \in \mathcal{V}_1$:

$$Y_{|u_i} = Y_{|u_j} \text{ for all } u_i,\, u_j \in v_\xi, \qquad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y_{|u_i} = 0. \tag{2}$$

УС (2) называются стандартными УС. Зафиксируем $e_k \in \mathcal{E}_2$ и $\varepsilon_k = 0 \vee 1$. Положим $w_k := u_{2k - \varepsilon_k}$. Если (2) верно для множества $U \setminus \{w_k\}$, то будем называть эти условия w_k-УС.

Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с УС (2) во внутренних вершинах $\mathcal{V}_1$ и с граничными условиями Дирихле в граничных вершинах $\mathcal{V}_0$:

$$Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p}. \tag{3}$$

Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p-1}$ для уравнения (1) с УС (2) и с граничными условиями

$$\partial Y_{|v_k} = 0, \quad Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p} \setminus k.$$

Таким образом, $L_k(G)$ получается из $L_0(G)$ заменой краевого условия Дирихле в $v_k = \sigma^-(e_k)$ на условие Неймана в v_k. Обозначим $\Lambda_k = \{\rho_{kn}\}_{n \geq 1}$, $k = \overline{0, p-1}$ — собственные значения (с учетом кратностей) задачи $L_k(G)$.

Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, — краевые задачи для уравнения (1) с w_ξ — УС и с граничными условиями

$$\partial^\nu Y_{|w_\xi} = 0, \quad Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p},$$

где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Через $\Lambda_\nu^\xi = \{\rho_{\nu n}^\xi\}_{n\ge 1}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи $L_\nu^\xi(G)$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Даны спектры Λ_k, $k = \overline{0, p-1}$, и Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, построить потенциалы P и Q на G.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для оператора Штурма – Лиувилля на *интервале* и на *деревьях*.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с (P, Q) рассмотрим потенциалы $(\tilde P, \tilde Q)$. Везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к (P, Q), то $\tilde\alpha$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $(\tilde P, \tilde Q)$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_k = \tilde\Lambda_k$, $k = \overline{0, p-1}$, $\Lambda_\nu^\xi = \tilde\Lambda_\nu^\xi$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, *то* $P = \tilde P$ *и* $Q = \tilde Q$.

Получена также конструктивная процедура решения обратной задачи 1.

Замечание. Пусть $p \le 1$ (т.е. $p = 0$ или $p = 1$). Тогда обратная задача ставится следующим образом: *даны спектры* Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, *построить потенциалы* P *и* Q *на* G. Для $p = 1$ все вышеприведенные рассуждения и результаты остаются верными; в частности, для нахождения потенциалов P и Q на G может быть использован алгоритм 1 без шага 3. Если $p = 0$, $r > 0$, то дерево G^* непусто. Тогда выбираем одну из граничных вершин G^* в качестве корня и повторяем вышеприведенные рассуждения. Если $r = 0$, то G^* пусто, и мы опускаем шаг 3 в алгоритме 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 393 с.

4. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 246 с.

5. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : NOVA Science Publ., 2001. 305 p.

6. *Belishev M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.

7. it Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

8. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs // Journal of Inverse and Ill-Posed Proplems. 2010. Vol. 18, № 3. P. 245–261.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П. Л. Ульянова (Саратов, 29 января – 2 февраля 2018 г.)

Подготовка оригинал-макета: О. А. Королева, В. А. Халова

Подписано в печать 12.01.2018. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 21,17(23,75). Тираж 225 экз. Заказ 233
ООО Издательство «Научная книга».
410031, Саратов, ул. Московская, 35.
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии «Техно-Декор».
410012, г. Саратов, ул. Московская, 160.