МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА,
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В.
ЛОМОНОСОВА

СЕКЦИЯ ИСТОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
УЧЕНОГО СОВЕТА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ПО ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ИЗДАЕТСЯ С I960 г.

Выпуск XXXIV

ФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1988

Неевклидовы пространства и явления переноса

Мысль о том, что в основу описания физических явлений может быть положено изменение геометрических форм во времени, проходит красной нитью через все теоретические построения. Наиболее отчетливо выраженная в пионерских работах Н.И.Лобачевского и Б. Римана, она используется в электродинамике и общей теории относительности. В теплофизике и гидромеханике вопросам формирования пространственно-временных представлений не уделяется должного внимания.

Основной постулат, который является источником представлений о характере пространства, связан с тем, что геометрические представления определяются по свойствам движения тел. под влиянием тех или иных сил. А. Пуанкаре писал: "Ни одно из наших ощущений, оставаясь в единственном числе, не могло бы привести нас к идее пространства. Мы приходим к ней исключительно лишь изучая законы, по которым эти ощущения следуют за другими" [1, с.4] .Представления о пространстве Эвклида формируются исходя из определения последовательности ощущений от механических движений идеально твердых тел. Следуя А.Пуанкаре можно мыслить себе и другое пространство, которое создается на основе ощущений, происходящих от движения тел, каким либо образом деформируемых. Самим А.Пуанкаре описан мир, который определяется движением тел, деформируемых под влиянием тепла." Допустим,- писал он,- существование мира, замкнутого в громадном шаре и подчиненного следующим законам: температура не одинакова, она выше всего в центре и уменьшается по мере удаления от него, достигая абсолютного нуля на границах, окружающих этот мир" [1, с.5]. В этом мире все тела обладают одним и тем же коэффициентом расширения, а линейная мера пропорциональна температуре. Всякий предмет по мере приближения к границам сферы уменьшается в своих размерах. Поэтому для наблюдателей, живущих в этом мире он представляется безграничным, а для нас - ограниченным."Если для нас,- указывает А.Пуанкаре,- геометрия лишь наука о законах движения твердых тел,сохраняющих неизменной свою форму, то для воображаемых существ, она будет наукой о законах движения твердых тел, деформируемых под влиянием температурных разностей"[1, с.5].

А.Пуанкаре построил указанный воображаемый мир в качестве иллюстрации неевклидовых пространств и для пояснения возможности их использования при рассмотрении совокупности тепловых явлений. Принимая, что тепловые явления, протекающие в пространстве Эвклида, допустимо рассматривать в воображаемом неевклидовом пространстве. А.Пуанкаре полагает, что выбор верной геометрии не предрешается опытом. Он замечает по этому поводу:" Проистекает ли вообще геометрия из опыта? Глубокое исследование покажет нам, что нет. Мы заключим отсюда, что эти принципы суть положения условные; но они не произвольны, и если бы мы были перенесены в другой мир(я его называю неевклидовым миром и стараюсь изобразить его), то мы остановились бы на других положениях. И далее : " Одна геометрия не может быть более истинна, чем другая; она может быть только более удобной"[1, с.61].

Теория явлений переноса в природных источниках энергии строится в рамках представлений о среде как континууме Эвклида. Такой подход оказывается удобным. Но он не исключает и другого пути, в котором среда,где происходит перенос различных субстанций рассматривается как многообразие, составляющее неевклидово пространство. Этот подход, по-видимому, более естественен тогда, когда флюктуациия в среде сопровождаются изменениями протяженности с образованием как упорядоченных , так и хаотических состояний.Если речь идет о явлениях переноса при которых элементарное движение частиц среды полностью хаотично и не содержит признаков организованности, то их описание на основе геометрии Эвклида можно считать исчерпывающим.Иная возможность для рассмотрения процессов переноса представляется тогда, когда в финальном виде движения материи (тепловом движении молекул) появляется упорядоченность и элементы самоорганизации.Не исключено, что при этом более подходящим и наглядным является переход к пространству, метрика которого отражает способность движущихся тел к кооперативным эффектам.Мерой их способности изменять свои размеры может служить некий параметр, который следит за степенью неравновесности процессов переноса.

Альтернативность подходов к рассмотрению теплового состояния вещества отчетливо представлял наш соотечественник Н.А.Умов.При решении задачи о термоупругих напряжениях в среде, подверженной температурному расширению, он сохраняет представление об евклидовости пространства.Однако показывает, что результат действия новых сил, возникающих в искаженном евклидовом пространстве тождественен эффекту искажения пространства [2]. В зависимости от требований, предъявляемых к постановке задачи, переход к неевклидовому пространству может содержать результаты, представленные в форме более удобной для аналитического обзора.

Интересная попытка показать, что при рассмотрении механических явлений кинематические образы, созданные нами на основе геометрии Эвклида, не являются исчерпывающими, была предпринята Н.Е.Жуковским [3]. В своей докторской диссертации, посвященной орбитальной устойчивости механических движений, им сконструировано особое неевклидово пространство с помощью которого весьма изящно удалось получить условия потери устойчивости орбитальных движений.

Конкретная реализация подхода, в котором рассмотрение теплопроводности жидкостей увязывалось с метрическими свойствами пространства, успешно осуществлялась А.С. Предводителевым [4-6]. Им используется расширяющееся риманово пространство. В метрику этого пространства включен коэффициент температурного расширения

$$\alpha = \frac{1}{s}\frac{ds}{dT}$$

где T - температура.

Для элемента длины такого многообразия записывается выражение вида:

$$ds^2 = \beta(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (1)$$

Здесь $\beta = \alpha^2 T^2$

Используя эту метрику А.С.Предводителев выводит кравнение теплопроводности. За основу вывода принимается результат, полученныйБ.Риманом при решении знаменитой Парижкой задачи [7]. Б.Риман по заданной форме уравнения теплопроводности указывает способ нахождения метрики пространства.А,С.Предводителев фактически решает обратную задачу. Переход к новой метрике позволил А.С.Предводителеву обосновать уравнение теплопроводности гиперболического типа.Им были также установлены новые формулы, связывающие коэффициент температуропроводности с температурой и плотностью среды.

Полученные А.С.Предводителевым результаты свидетельствуют о том, что аналогичный подход может оказать весьма плодотворным при рассмотрении явлений переноса массы,импульса и энергии в природных источниках энергии. В особенности перспективен такой путь тогда, когда обмен массой импульсом и энергией находится в прямой зависимости от характера внешних воздействий.

Получим уравнение переноса импульса для этого представим элемент длины гидродинамического континнума в следующем виде

$$ds^2 = \beta(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (2).$$

Метрический тензор представим диагональной матрицей

$$\begin{Vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{Vmatrix},$$

где $\beta = \omega^2\tau^2$, ω -модуль завихренности, τ -характерное время неравновесности процесса переноса завихренности.Определитель метрического тензора равен

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta^3.$$

Введенный нами гидродинамический континуум будем характеризовать с помощью двух функций $\vec{\omega} = \vec{\omega}(x_1, x_2, x_3, t)$ и $\mu = \mu(x_1, x_2, x_3, t)$. Первая представляет собой завихренность, вторая- коэффициент обобщенной вязкости. Следуя методу Римана-Предводителева уравнение переноса завихренности для выбранной метрики неевклидова пространства получим исходя из формулы Грина

$$\int_{(v)} (\frac{3}{\beta}\nabla\mu\nabla\vec{\omega})dv + \int_{(v)} \mu J_{\omega}dv = \int_{(\sigma)} \mu\nabla\vec{\omega}d\sigma \qquad (3),$$

где $J_{\omega} = \frac{3}{\beta}\Delta\vec{\omega} + \frac{3}{2\beta^2}\nabla\vec{\omega}\nabla\beta$.

Или в раскрытой форме

$$\int_{(v)} (\frac{3}{\beta}\nabla\mu\nabla\vec{\omega})dv + \int_{(v)} \frac{3\mu}{\beta}\Delta\vec{\omega}dv + \int_{(v)} \frac{3\mu}{2\beta^2}\nabla\vec{\omega}\cdot\nabla\beta dv = \int_{(\sigma)} \mu\nabla\vec{\omega}d\sigma \qquad (4).$$

Рассмотрим какими особенностями обладает гидродинамический континуум. Правую часть формулы (4) приравняем потоку завихренности

$$\int_{(v)} \rho(\frac{\partial\omega}{\partial t} + v\nabla)\vec{\omega}dv$$

Теперь интегральное равенство (4) можно переписать в следующем виде

$$\int_{(v)} (\frac{3}{\beta}\nabla\mu\nabla\vec{\omega})dv + \int_{(v)} \frac{3\mu}{\beta}\Delta\vec{\omega}dv + \int_{(v)} \frac{3\mu}{2\beta^2}\nabla\vec{\omega}\cdot\nabla\beta dv - \int_{(v)} \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{\omega}dv = \int_{(v)} \rho\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}dv.$$

Отсюда имеем

$$\frac{3}{\beta}\nabla\mu\nabla\vec{\omega} + \frac{3\mu}{2\beta^2}\nabla\vec{\omega}\cdot\nabla\beta - \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{\omega} + \frac{3\mu}{\beta}\Delta\vec{\omega} = \rho\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} \qquad (5)$$

Для того, чтобы разделить движения частиц различных размеров, совершающих в процессе переноса завихренности движения той или иной частоты и выявить влияние низкочастотных составляющих на коэффициенты уравнения (5), представим его в виде двух уравнений

$$\frac{3\nu}{\beta}\Delta\vec{\omega} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} \qquad (6),$$

$$\frac{3}{\beta}\nabla\nu + \frac{3\nu}{2\beta^2}\nabla\beta = \vec{v} \qquad (7).$$

Здесь введено обозначение обобщенного коэффициента кинематической вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Уравнение (7) указывает на такую взаимосвязь средних и пульсационных движений, при которой уравнение переноса завихренности представляется в форме обычного уравнения диффузии вихря (6). Из уравнения (5) следует, что можно сконструировать различные типы уравнений переноса завихренности, в том числе и нелинейные. При этом, неизменно на коэффициенты переноса накладываются определенные ограничения. Они получаются из дифференциального уравнения (7), которое определяет связь коэффициента переноса с метрикой неевклидова пространства, зависящей от параметра неравновесности.

Если за характерное время завихренность остается неизменной, то из уравнения (7) следует $\frac{3}{\beta}\nabla\nu = \vec{v}$. После интегрирования можно получить $\nu = \frac{\beta}{3}vL$.С учетом того,что $v = L\tau$ получаем , что коэффициент переноса может быть представлен в таком виде

$$\nu = \frac{1}{3}\beta\frac{L^2}{\tau} \qquad (8),$$

где L - линейный масштаб движений частиц среды, участвующих в переносе субстанции, соответствующий времени τ.

Если в уравнении (7) принять $\nu = const$,то

$\frac{3\nu}{2\beta^2}\nabla\beta = \vec{v}$.Отсюда находим $\beta = -\frac{2vL}{3\nu}$. А коэффициент переноса представляется выражением, имеющим отрицательный знак $\nu = -\frac{2}{3}\beta\frac{L^2}{\tau}$

В общем случае, в зависимости от характера взаимосвязи движений различных масштабов, коэффициент переноса будет иметь вид, отличающийся от того, который получается для относительно медленных потоков. В высокоскоростных течениях коэффициент переноса должен уже определяться из дифференциального уравнения (7) и зависеть от степени неравновесности.

Полученные результаты указывают на то, что характер перноса завихренности в неравновесных системах существенно связан с относительностью низкочастотных и высокочастотных составляющих из спектра движений, определяющих перенос.Для описания этой относительности, наряду с учетом нлинейных членов уравнений переноса можно также оценивать изменения, вносимые в коэффициенты переноса.

Литература

1.Пуанкаре А. Наука и гипотеза,-М.:1904.
2.Умов Н.А. Избранные сочинения.-М.:ГИТТЛ,1950.
3. Жуковский Н.Е. Сочинения,т.1.-М.:1912.
4. Предводителев А.С. // Проблемы тепло-и массопереноса.-М.: Энергия,1970,С.151-192.
6. Предводителев А.С.// ИМЕН, сер. Физика, вып. 22,-М.:Изд. МГУ,1979.,С.32-50.
6.Предводителев А.С. // ИМЕН,сер Физика, вып. 26.-М.:Изд. МГУ, 1981, С.13-33.
7. Риман Б. Сочинения .М.-Л.: Гостехиздат,1948,С.399-413.

Resume

A. A. Soloviev

Non Euclidian space and phenomenen of the transfer

A review of researches about non-Eeuclidian space in the hydrodynamics is discussed.